

Mechanical and Aerospace System Analysis

Final Exam

June. 9. 2009

1. Answer the following questions.

A. Explain why the frequency response plot can be represented using $G(s)$. (10점)

Sol)

$$\begin{aligned}
 u(t) &= P \sin \omega t \\
 G(s) &= \frac{K(s+z_1)(s+z_2) \cdots (s+z_n)}{(s+s_1)(s+s_2) \cdots (s+s_n)} \\
 Y(s) &= G(s) \cdot u(s), \quad u(s) = P \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\
 Y(s) &= G(s) \frac{P\omega}{s^2 + \omega^2} \\
 &= \frac{a}{s+j\omega} + \frac{\bar{a}}{s-j\omega} + \frac{b_1}{s+j\omega} + \frac{b_2}{s+j\omega} + \cdots + \frac{b_n}{s+j\omega} \\
 y(t) &= ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} + b_1e^{-s_1t} + b_2e^{-s_2t} + \cdots + b_ne^{-s_nt} \quad (t \geq 0) \\
 y_{ss}(t) &= ae^{-j\omega t} + \bar{a}e^{j\omega t} \\
 a &= G(s) \frac{\omega P}{s^2 + \omega^2} (s+j\omega)|_{s=-j\omega} = -\frac{PG(-j\omega)}{2j} \\
 \bar{a} &= G(s) \frac{\omega P}{s^2 + \omega^2} (s-j\omega)|_{s=j\omega} = \frac{PG(j\omega)}{2j} \\
 G(j\omega) &= |G(j\omega)|e^{j\phi} \\
 \phi &= \angle G(j\omega) = -\tan^{-1} \left[\frac{\text{Im } G(j\omega)}{\text{Re } G(j\omega)} \right] \\
 G(-j\omega) &= |G(-j\omega)|e^{-j\phi} = |G(j\omega)|e^{-j\phi} \\
 a &= \frac{P|G(j\omega)|e^{-j\phi}}{2j}, \quad \bar{a} = \frac{P|G(j\omega)|e^{j\phi}}{2j} \\
 y_{ss}(t) &= P|G(j\omega)| \frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j} \\
 &= P|G(j\omega)| \sin(\omega t + \phi) \\
 &= Y \sin(\omega t + \phi)
 \end{aligned}$$

사인파입력을 받은 안정한 선형 시불변시스템은 정상상태에서 입력과 같은 주파수의 출력을 가진다. 그러나 출력의 진폭과 위상은 일반적으로 입력의 진폭과 위상과는 다르다.

그러므로 사인파입력에 대한 시스템의 정상상태응답 특성은 선형시스템의 사인파 전달 함수를 시스템의 전달함수에서 s 를 $j\omega$ 로 바꿈으로써 얻어질 수 있다.

식 또는 글로 명확히 설명할 경우 10점

식의 경우 강의 교재대로 위의 전 과정이 온전히 논리전개가 되어야 인정

글로 설명할 경우 입력과 같은 주파수의 출력을 가짐을 포함해야 함

논리 전개가 미흡한 경우 5점

그 외 0점

B. For a second order system with a transfer function,(10점)

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

i. Derive the magnitude of the frequency response as a function of the frequency ω .

Sol)

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n j + \omega_n^2}$$

$$M(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\zeta\omega_n\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2})^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}}$$

온전히 맞을 경우 5점

부분 실수 3점(ex. 부호, 제곱)

그 외 0점

ii. Derive the phase of the frequency response as a function of the frequency ω .

Sol)

$$\phi(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{2\zeta\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} = -\tan^{-1} \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - (\frac{\omega}{\omega_n})^2}$$

온전히 맞을 경우 5점

부분 실수 3점(ex. 부호, 제곱)

그 외 0점

C. If you are given a frequency response plot of a second order system,(5점)

i. How would you find the natural frequency?

Sol)

In phase graph at phase -90° , the point of phase change is exists and then that's frequency is natural frequency

Or in magnitude graph at peak point, that's frequency is natural frequency

Or high frequency asymptote line and low frequency asymptote line across at the frequency, that frequency is natural frequency

ii. How would you find the damping ratio of the system?

Sol)

In magnitude graph at peak point, we can find damping ratio from equation $M_m = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$ or $\omega_m = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$

C의 경우 두 개 모두 맞을 경우 5점

C의 i의 경우 3가지 중 한가지 경우에 해당할 경우 맞는 것으로 인정

둘 중 한 개만 맞을 경우 3점

그 외 0점

D. For a system described with a state space equation $\dot{x} = Ax + Bu$,

i. Derive the State Transition Matrix by finding the solution of the equation.(10점)

Sol)

Multiply both side by integrating factor e^{-At} ,

$$e^{-At}\dot{x} - Ae^{-At}x = e^{-At}Bu, \quad \frac{d}{dt}[e^{-At}x] = e^{-At}Bu(t)$$

$$\Rightarrow e^{-At}x(t) - Ix(0) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$= \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$\dot{x} = Ax + Bu \Rightarrow sX = AX + BU$$

$$X = (sI - A)^{-1}BU$$

$$\therefore \Phi = (sI - A)^{-1} = e^{At}$$

전개과정 모두 맞을 경우 10점

전개과정 중 부분 실수하여 전개 5점

전개과정 중 미흡한 경우 3점

시작부터 잘못 접근한 경우 0점

라플라스를 이용한 식만으로 정의한 경우 0점

그 외 0점

ii. Write 5 properties of the state transition matrix.(5점)

Sol) 각 1점 (1의 경우 곱이 합으로 합침을 보이면 인정, 3의 경우 지수가 계수로 내려움을 보이면 인정)

1. $\Phi(t_2 - t_1)\Phi(t_1 - t_0) = \Phi(t_2 - t_0)$ for any t_0, t_1, t_2
2. $\Phi(0) = I$
3. $\Phi(t)\Phi(t) = \Phi^2(t) = \Phi(2t)$ ($\because (e^{At})^2 = e^{A \cdot 2t} = \Phi(2t)$) $\Phi^g(t) = \Phi(gt)$
4. $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$
5. $\Phi(t)$ is nonsingular for all finite values of t (inverse exists)

2.

A. 그림이 말이 되면 2 점

다음 중 하나 없을 때 마다 1 점씩 감점

1. Load 와 belt 와의 관계(F)
2. Conveyor system 과 힘,토크와의 관계
3. 모터의 토크와 conveyor system 에 전달되는 토크와의 관계

B. $\left(\frac{1}{\text{reduction ratio}}\right)^2 (I_{\text{con}} + m_{\text{load}}r^2) = \left(\frac{1}{100}\right) (1 + 100 * 0.01) = 0.02$

1. Reduction ratio = 1/10 의 제곱에 비례함 4 점
2. $I_{\text{con}} + m_{\text{load}}r^2$ 3 점
3. $m_{\text{load}}r^2$ 3 점

C. $T_{\text{motor}} = I_e \ddot{\theta}$ 5 점

D. 개당 2 점씩 감점

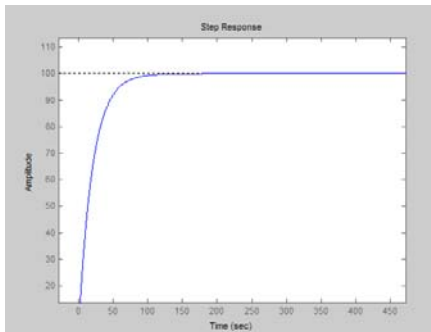
1. $e_b = K_b \frac{d\theta}{dt}$
2. $L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b = e_a$
3. $T = K i_a$

E. 답틀리면 0 점 맞으면 5 점

1.

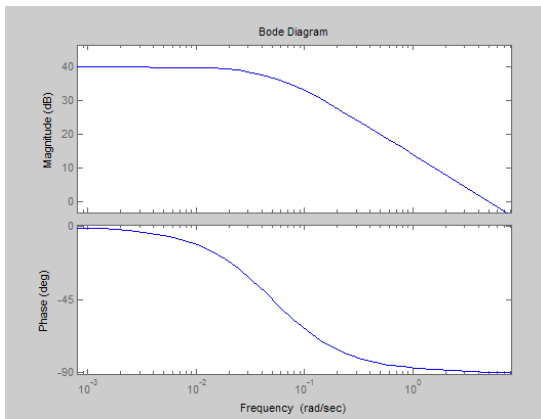
$$\begin{aligned} \frac{W}{E_a}(s) &= \frac{K}{(JL_a s^2 + JR_a s + KK_b)} \\ &= \frac{1}{0.0002s^2 + 0.2s + 0.01} \end{aligned}$$

F.



overdamped 임을 표시 하면 2 점 , steady state 값 표시 하면 3 점
peak 과, %overshoot 을 표시하면(없다를 포함) 5 점

G.



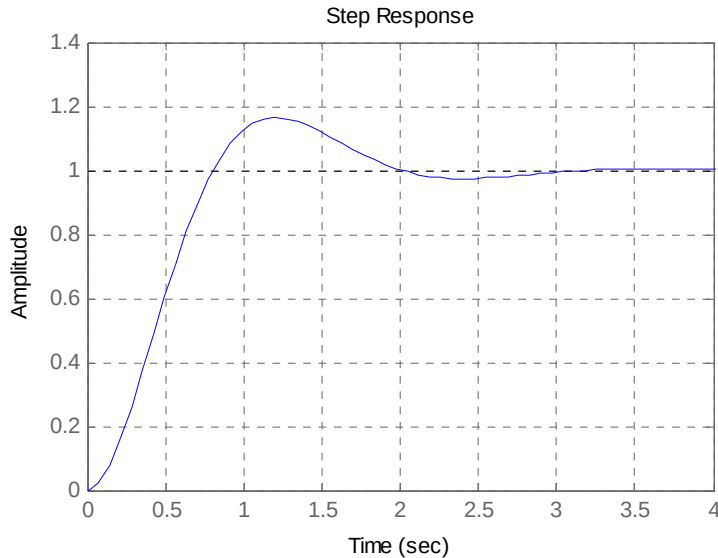
그래프의 개형이(magnitude 값 포함) 맞으면 2 점 시작점이 맞으면 3 점
peak 이 없고, phase $\sqrt{50}$ 를 맞추면 5 점

magnitude 의 시작점이 맞으면 3 점

overdamped 가 나오지 않았으면 peak, $w_n\sqrt{1-2\zeta^2}$, phase w_n 임을 명시하면 5 점

H. 주파수가 감소함을 나타내면 5 점

3. Following is the step response of a second order system.



From the graph, the peak time is 1.2 secs, the settling time is 2.66 secs.

i. Draw the pole zero map of the system (5점)

Sol) 그림과 좌표 값 각 2점, 전부 맞을 경우 추가 1점, 총 5점

$$\text{At peak time, } T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\pi}{\omega_d} = 1.2 \quad \therefore \omega_d = 2.617993878 \approx 2.6$$

$$\text{At settling time, } T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} = \frac{4}{\sigma} = 2.66 \quad \therefore \sigma = 1.503759398 \approx 1.5$$

좌표에서 부호가 틀린 경우 2점

ii. Find the natural frequency and damping ratio of the system. Round off the values to the first digit after decimal. (10점)

Sol) 각 5점

$$\omega_n = \sqrt{\omega_d^2 + \sigma^2} = \sqrt{2.6^2 + 1.5^2} = 3.001666204 \approx 3.0$$

$$\zeta = \frac{\sigma}{\omega_n} = \frac{1.5}{3.0} = 0.5$$

iii. Draw a bode plot of the system. Make sure to plot the following.(10점)

- Magnitude of the frequency response at 0 Hz.
- The frequency where the peak M_m occurs, ω_m .
- The overshoot of the frequency response plot.
- The frequency where the phase plot crosses 90 degrees.
- Slope of the frequency response plot.

Sol) 각 2점

$$\text{A. As } \lim_{\omega \rightarrow 0} |G(j\omega)| = 1, \quad 20 \log M_m = 0 \text{ (dB)}$$

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{9}{s^2 + 3s + 9} = \frac{1}{\left(\frac{s}{3}\right)^2 + \frac{s}{3} + 1}$$

$$B. \omega_m = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} = 2.121320344 \approx 2.1$$

$$M_m = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} = 1.154700538 \approx 1.2, \quad 20\log M_m = 1.583624921 \approx 1.6 \text{ (dB)}$$

$$M_m = 1.1547, \quad 20\log(1.1547) = 1.249 \text{ (dB)}$$

$$C. \%OS = \exp\left(-\pi\zeta/\sqrt{1 - \zeta^2}\right) \times 100 = 16.30335348 \approx 16.3 \text{ (\%)}$$

$$D. \omega_n = 3$$

$$E. -40\text{dB/decade}$$

M_m 의 값은 소수 첫째 자리까지 반올림한 1.2 를 사용한 값과 반올림하지 않고 1.1547 을 사용한 값 둘 다 맞는 것으로 처리함

%OS 대신 Overshoot을 언급한 경우 인정

iv. Write the transfer function of the system. (5점)

Sol)

$$G(s) = \frac{9}{s^2 + 3s + 9}$$

v. If we want to reduce the peak time in half without changing the overshoot of the system, (10점)

A. Where should the poles move to?

B. How does the frequency response plot change?

Sol) A 5점, B 5점

A.

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

$$\%OS = \exp\left(-\pi\zeta/\sqrt{1 - \zeta^2}\right) \times 100$$

따라서 %OS의 변화를 가져오지 않으면서 Peak time을 절반으로 하기 위해서는 damping ratio를 그대로 둔 채 natural frequency를 두 배로 증가시키면 된다. Pole-zero 그래프 상에서는 zero-pole line을 따라가되 σ 가 -3의 위치에 있어야 한다. $\omega_n = 6, \omega_d = 5.2$

Damping ratio를 유지하면서 Natural frequency가 2배가 된다는 것을 명시할 때 5점

Natural frequency만 2배가 됨을 명시하면 3점

크기의 변화량을 언급하지 않고 극점의 이동 방향만을 맞게 언급할 경우 3점

그 외 0점

B.

FRP에서는 그래프의 개형이 유지되면서 cutoff frequency의 위치가 3에서 6으로 오른쪽으로 이동한다.

정확한 수치를 언급 안하고도 개형의 변화 양상을 맞게 설명한 경우 인정

FRP로 설명하지 않고 time response 그래프로 설명한 경우 0점

4.

	ω_n (rad/s)	ζ
Fig. A	8	0.3
B	6	(0.3 ~ 0.5)
C	5	
D	4	0.7

$\Rightarrow 5$

$\Rightarrow 5$

$\omega_n \rightarrow$ phase -90° 인 point !!

$\zeta \rightarrow$ Fig 10.17 참조..

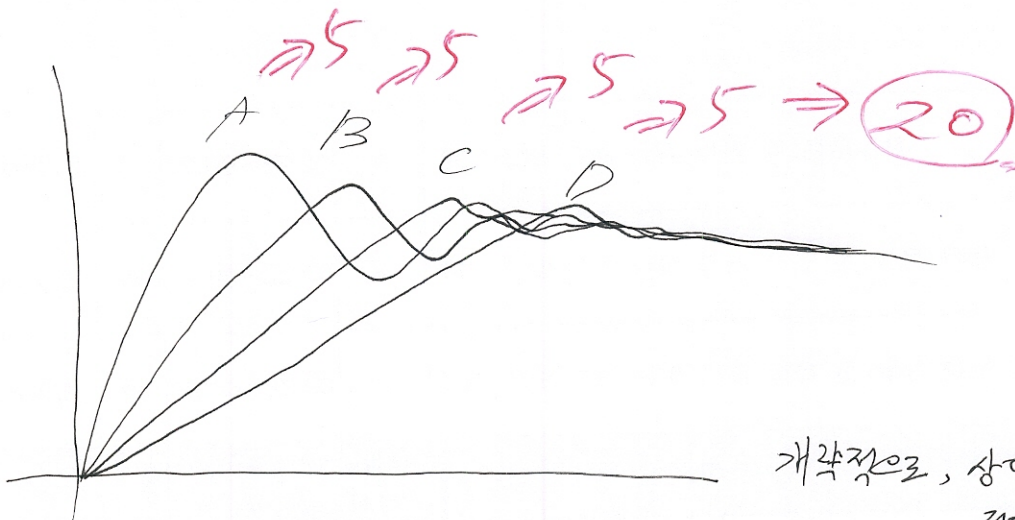
$$\% OS = e^{-\left(\frac{\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} \times 100$$

$A > B > C > D$

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

$A < B < C < D$

$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n}$$



개략적으로, 상대편차이 보인 경우
정답해나..

$D \Rightarrow$ not overdamped case..

overshoot $\approx 24\%$!!

peak 이 없으니까 overdamped (X)