1. **(25점) 다음과 불확정성 원리(uncertainty principle)를 관계 지어 설명하시오.**

(가) (10점) Fourier transform (10줄 이내)

(Gaussian 함수를 이용하여 설명. 풀이에 대한 해석만 정확하다면 어떤 함수를 사용해도 상관은 없음)

$$\Psi(x) = e^{-x^2}$$

라 두고 이를 Fourier Transform 하면

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-jkx}\, dx$$

한편, 적분 내부의 수식을 정리해 보면

$$e^{-x^2} e^{-jkx} = e^{-(x^2+jkx)} = e^{-\left(x+j\frac{1}{2}k\right)^2 - \frac{k^2}{4}}$$

$X = x + j\frac{1}{2}k$ 라 두고 수식을 간단히 하면 (dX=dx)

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-X^2}\, dX = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{k^2}{4}}$$

이 때 Ψ의 분산은 $\frac{1}{\sqrt{2}}$이고 이의 Fourier transform인 g의 분산은 $\sqrt{2}$이므로

$$\Delta x \Delta k = 1$$

$$\Delta x \Delta(\hbar k) = \hbar, \quad \therefore \Delta x \Delta p = \hbar$$

같은 방법으로 w와 t의 관계도 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\Delta w \Delta t = 1$$

$$\Delta(\hbar w)\Delta t = \hbar, \quad \therefore \Delta E \Delta t = \hbar$$

이 결과를 말로써 설명하면 어떤 함수를 x에 대해서 국한 시키면 시킬수록 이를 Fourier Transform 한 k-domain에서는 함수가 퍼지게 된다. 반대의 경우도 마찬가지이다. 즉, x와 k-domain 둘의 경우를 모두 국한시킬 수는 없다.

(채점 기준)

- 구체적인 함수(혹은 예시)를 제시하여 불확정성 원리를 도출할 경우 10점
- 잘 설명했지만 구체적인 함수(혹은 예시)를 이용하여 제시하지 않았을 경우 혹은 구체적인 계산은 있지만 설명이 부족한 경우 8점

  (이에 해당하지만 $\Delta x \Delta k = 1$ 라는 식으로부터 불확정성의 원리를 이끌어낸 경우라면 10점. 즉 2점 추가)
- 설명은 부실하지만 대략적으로 이해를 하고 있는 경우 5점
- 설명이 부분적으로만 맞을 경우 3점
- 이외의 경우는 모두 점수 없음

(감점 사항)

- 기타 풀이 과정상 중요한 문제가 보일 경우 2점씩 감점

(나) (15점) 연산자의 교환성 여부 (20줄 이내)

두 연산자가 교환이 가능하다는 것은 $[\mathrm{A,B}] = \mathrm{AB} - \mathrm{BA} = 0$ 인 경우를 말한다. 즉,

$$(<\Delta A>)^2(<\Delta B>)^2 \geq \frac{1}{4}|<[\mathrm{A,B}]>|^2$$

에서 A, B가 교환 가능하다면 위 식의 우변은 0이 되고 따라서 A나 B 모두 동시에 확정짓는 것이 가능하다. 하지만 A, B가 교환 가능하지 않다면 위 식의 우변은 0이 아닌 값이 되고 이는 곧 A와 B 모두 동시에 확정짓는 것이 불가능하다는 것을 의미한다. 혹은 어떤 물리량을 측정하게 되면 이에 해당하는 연산자의 eigenvalue값을 얻을 수 있고 파동함수는 측정된 eigenvalue에 해당하는 eigenfunction으로 collapse하게 된다. 만일 연산자가 교환가능하다면 이는 곧 두 연산자가 공통의 eigenfunction을 가진다는 것을 뜻하므로 불확정성의 원리가 적용되지 않는다. 반대로 두 연산자가 교환 가능하지 않다면 이는 곧 어느 하나의 연산자를 적용하여 측정할 경우 파동함수가 collapse 되어 불확정성의 원리가 적용된다.

이를 $\mathrm{A = x,\ B = p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}$ 를 이용하여 풀면

$$\mathrm{xp} = -\mathrm{i}\hbar\mathrm{x}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}$$

$$\mathrm{px} = -\mathrm{i}\hbar(1 + \mathrm{x}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}})$$

$$\therefore <x,p> = i\hbar$$

이를 Schwarz inequality 에 대입하면

$$(<\Delta x>)^2(<\Delta p>)^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

$$\therefore <\Delta x><\Delta p> \geq \frac{\hbar}{2}$$

(채점 기준)

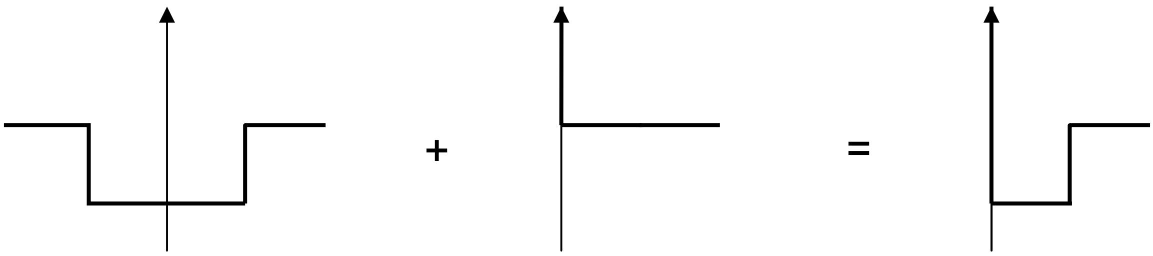
- 설명이 부족하지만 둘의 관계를 잘 설명하려고 노력한 경우 5점
- $<x,p> = i\hbar$ 라는 식만 잘 유도한 경우 5점(계산 과정이 없는 경우 3점)
- Schwarz inequality에 대한 언급이 간접적으로라도 있을 경우 5점
- 수식 전개는 잘 하였지만 이에 대한 해석이 부족한 경우 13점
- 꼭 Schwarz inequality를 이용하지 않더라도 연산자의 교환성과 불확정성 원리와의 관계를 논리있게 설명한 경우라면 15점

(감점 사항)

- 기타 풀이 과정상 중요한 문제가 보일 경우 2점씩 감점

2번 문항 (30점)

(가) (20점) (B)의 potential은 다음과 같은 두 개의 potential의 합으로 생각할 수 있다.



(A) (C) (B)

(A), (B), (C) 각각의 potential에 대한 파동함수를 ψ_A, ψ_B, ψ_C라 하면, (B)에서의 파동방정식은,

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_B}{dx^2} + U_B\psi_B = E\psi_B \qquad (2\text{-}1)$$

로 적을 수 있다. x<0 인 영역에서는 $U_B = \infty$ 이므로, $\psi_B = 0$ 이 된다.

여기까지 (5점)

x>0 인 영역에서는 위 관계를 이용하여, $U_B = U_A + U_C$ 로 놓고, 파동함수 ψ_B는 ψ_A와 ψ_C의 선형 결합으로 표현될 수 있으므로,

$$\psi_B = c_A\psi_A + c_C\psi_C \qquad (2\text{-}2)$$

와 같이 쓰고 (2-1) 식에 넣고 정리하게 되면,

$$c_A\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_A}{dx^2} + (U_A - E)\psi_A\right) + c_C\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi_C}{dx^2} + (U_C - E)\psi_C\right) = 0 \qquad (2\text{-}3)$$

식을 얻게 된다. 그런데 여기서 문제 (가)의 경우처럼 $U_0 < E < 0$ 인 경우 E가 모든 영역에서 U_C보다 아래쪽에 놓이게 되므로 $\psi_C = 0$ 이 됨을 알 수 있다. 따라서 ψ_B는 다음과 같다.

$$\psi_B = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ c_A\psi_A & x > 0 \end{cases} \qquad (2\text{-}4)$$

여기까지 (12점)

이유가 타당하지 않거나 이유 없이 위와 같이 적은 경우 3점 감점

여기서 중요한 사실은 ψ_B역시 경계조건을 만족해야만 하므로, ψ_A중에서 $\psi_A|_{x=0} = 0$,을 만족하는 파동함수만 해가 된다. 이것은 odd function만 해당이 된다.

여기까지 (17점)

왜 odd function만 되는지 설명이 없는 경우 3점 감점

c_A값은 normalize를 통해서 알 수 있다. ψ_A가 원점에 대해서 대칭이므로, $\int_{-\infty}^{\infty}|\psi_A|^2 = 1$

따라서 $\int_0^{\infty}|\psi_A|^2 = \frac{1}{2}$ 그런데 $\int_0^{\infty}|\psi_B|^2 = c_A^2\int_0^{\infty}|\psi_A|^2 = 1$ 이므로 $c_A = \sqrt{2}$가 되며,

$$\psi_B = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sqrt{2}\psi_A(\text{odd mode}) & x > 0 \end{cases} \qquad (2\text{-}5)$$

(20점)즉, normalization 3점

(나) (10점) (가) 풀이에서 $E > 0$ 인 경우, (2-3) 식에서 ψ_C 부분의 해가 존재할 수 있다.

따라서 ψ_B가 x>0인 영역에서 ψ_A 와 ψ_C 의 선형결합의 형태로 주어지기 때문에,

이 경우에는 ψ_B는 ψ_A의 상수 배로 주어지지 않아 그 모양이 동일하지 않다.

풀이 없이 답만 맞은 경우 3점

(가) 의 경우 경계조건 직접 세워서 푼 경우에도 정답을 정확히 유도하면 만점

(가) 의 경우 꼭 위와 같이 풀지 않고 정성적으로 풀되 다음의 언급이 모두 포함된 경우 만점

(1) B 구조는 x<0인 구간에서 $\psi_B = 0$(5점)

(2) B 구조는 x=0에서의 경계 조건 때문에 odd function만이 선택된다.(7점)

(3) $U_0 < E < 0$ 라는 조건으로 인해 potential well 바깥에서 exponentially decay한다(5점)

(이 말이 빠지면 문제 (나)와 구분이 되지 않음, 비슷한 식으로라도 언급 필요, mode 그림 그려서 보여줘도 됨)

(4) normalization 계산(3점)

(나) 의 경우 꼭 위와 같이 풀지 않더라도, 나름대로의 맞는 이유를 들어 정답을 제시한 경우 만점 (논리의 정확도에 따라 최대 7점까지 감점)

예를 들면, wave의 각각의 경계 조건에서 반사파와 투과파를 이용하여 A구조와 달리 B구조는 standing wave와 같은 mode만이 존재하게 됨을 설명 하는 등의 경우.

(나)의 경우 답이 틀리면 0점

기타 풀이 과정상 문제점이 있는 경우 3점씩 감점

3번(20점) 3차원 Harmonic Oscillator

1차원 Harmonic Oscillator Energy Level

$$E = \hbar\omega(n + \frac{1}{2}), \qquad (n = 0, 1, 2....)$$

(5점)

3차원 Schrodinger's equation(time independent)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})\psi(x, y, z) + U(x, y, z)\psi(x, y, z) = E\psi(x, y, z)$$

변수분리법을 이용, $\psi(x, y, z) = \psi_x(x)\psi_y(y)\psi_z(z)$

양변을 $\psi(x, y, z) = \psi_x(x)\psi_y(y)\psi_z(z)$ 으로 나누면, (10점)

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\psi_x}\frac{d^2\psi_x}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = \frac{\hbar^2}{2m}(\frac{1}{\psi_y}\frac{d^2\psi_y}{dy^2} + \frac{1}{\psi_z}\frac{d^2\psi_z}{dz^2}) - \frac{1}{2}m\omega^2(y^2 + z^2) + E = E_x$$

마찬가지로 E_y , E_z 를 구할 수 있으며, 전체에너지 $E = E_x + E_y + E_z$ 가 된다.

$\therefore$

$$E_x = \hbar\omega(n_x + \frac{1}{2})$$

$$E_y = \hbar\omega(n_y + \frac{1}{2}) \qquad (n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2.....)$$

$$E_z = \hbar\omega(n_z + \frac{1}{2})$$

$$E = E_x + E_y + E_z = \hbar\omega(n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}) \qquad (n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2.....)$$

,

(20점)

채점기준

-안쓰면 0점

-답만 적은 경우 5점

-기타 풀이 과정상 중요한 문제가 있는경우 3점씩 감점

4번(25점) Hermitian operator의 eigenvalue는 실수(real number)이며, 서로 다른 eigenvalue에 해당하는 eigenfunction (또는 eigen vector/ket/bra)는 서로 직교(orthogonal)한다는 것을 증명하시오.

Operator A가 임의의 i와 j에 대해서 $|a_i>$ 와 $|a_j>$ 라는 eigenfunction들을 가지고 각각의 eigenvalue를 a_i, a_j 라고 생각하면

$$A|a_i> = a_i|a_i> \qquad (1)$$
$$A|a_j> = a_j|a_j> \qquad (2)$$

(1)과 (2)의 왼쪽에 각각 $<a_j|, <a_i|$ 를 곱해주면

$$<a_j|A|a_i> = a_i <a_j|a_i> \qquad (3)$$
$$<a_i|A|a_j> = a_j <a_i|a_j> \qquad (4)$$

(4) 양변에 conjugate를 취하고 $A = A^+$를 이용하여 (3), (4)를 연립하면

$$<a_j|A|a_i> = a_i <a_j|a_i>$$
$$<a_j|A|a_i> = a_j^* <a_j|a_i>$$
$$(a_i - a_j^*) <a_j|a_i> = 0 \qquad (5)$$

(i) i=j 라면

$$<a_i|a_i> \neq 0$$

이므로

$$a_i = a_i^*$$

즉, eigenvalue는 실수.

(ii) i≠j 라면 문제의 조건에서

$$a_i \neq a_j$$

이므로

$$<a_j|a_i> = 0$$

즉, 서로 다른 eigenvalue에 해당하는 eigenfunction은 서로 직교.

(채점 기준)

- Hermitian이면 $A = A^+$ 이다 5점
- 식 (5) 까지 잘 풀었을 경우 15점
- (i)와 (ii)인 경우를 잘 나누어서 풀었을 경우 각각 5점씩
- 위와 다른 풀이과정의 경우 Real인 것을 잘 보인 경우 10점, 직교인 것을 풀었을 경우는 15점(단, 풀이 과정이 타당할 경우)

(감점 사항)

- Hermitian operator의 뜻을 간접적으로라도 명시하지 않으면 3점 감점
- 기타 풀이 과정상 중요한 문제가 보일 경우 3점씩 감점
