[Problem 1] (20 Points) The output $y(t)$ of a second-order system produced by the input $x(t)$ is given by

$$y(t) = [1 - e^{-\alpha t}\cos\omega_n t]u(t), \qquad x(t) = u(t) \tag{1.1}$$

where $u(t)$ is the unit step, while the exponential parameter α and the frequency parameter ω_n are both real. Then, show that the impulse response of the system is given by

$$h(t) = [\alpha e^{-\alpha t}\cos\omega_n t + \omega_n e^{-\alpha t}\sin\omega_n t]u(t). \tag{1.2}$$

Sol.)

< Method I >

(1.1)에 의해 입력 $x_1(t),\ x_2(t)$ 에 대한 출력 $y_1(t),\ y_2(t)$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \frac{1}{\varepsilon}u(t+\varepsilon) \\ x_2(t) &= \frac{1}{\varepsilon}u(t) \end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \frac{1}{\varepsilon}\left[1 - e^{-\alpha(t+\varepsilon)}\cos\omega_n(t+\varepsilon)\right]u(t+\varepsilon) \\ y_2(t) &= \frac{1}{\varepsilon}\left[1 - e^{-\alpha t}\cos\omega_n t\right]u(t) \end{aligned} \tag{1.4}$$

(1.3)으로 부터 다음을 정의한다.

$$x_\varepsilon(t) \triangleq x_1(t) - x_2(t) \tag{1.5}$$

마찬가지로 (1.4)로 부터 다음을 정의한다.

$$\begin{aligned} y_\varepsilon(t) &\triangleq y_1(t) - y_2(t) \\ &= \frac{1}{\varepsilon}\left\{u(t+\varepsilon) - u(t)\right\} - \frac{1}{\varepsilon}\left\{e^{-\alpha(t+\varepsilon)}u(t+\varepsilon)\cos\omega_n(t+\varepsilon) - e^{-\alpha t}u(t)\cos\omega_n t\right\} \end{aligned} \tag{1.6}$$

(1.5)의 극한으로 부터 다음의 결과를 얻을 수 있다.

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} x_\varepsilon(t) \tag{1.7}$$

따라서 (1.6)의 극한을 통해 impulse response를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon(t) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{\varepsilon}\left\{u(t+\varepsilon) - u(t)\right\} - \frac{e^{-\alpha t}}{\varepsilon}\left\{e^{-\alpha\varepsilon}u(t+\varepsilon)\sin\omega_n\varepsilon\sin\omega_n t\right\}\right. \\ &\qquad \left. - \frac{e^{-\alpha t}\cos\omega_n t}{\varepsilon}\left\{e^{-\alpha\varepsilon}u(t+\varepsilon)\cos\omega_n\varepsilon - u(t)\right\}\right] \\ &= \delta(t) + \omega_n e^{-\alpha t}u(t)\sin\omega_n t - e^{-\alpha t}\delta(t)\cos\omega_n t + \alpha e^{-\alpha t}u(t)\cos\omega_n t \\ &= [\alpha e^{-\alpha t}\cos\omega_n t + \omega_n e^{-\alpha t}\sin\omega_n t]u(t) \end{aligned} \tag{1.8}$$

< Method II >

(1.1)의 Laplace 변환은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \mathcal{L}\left\{1-e^{-\alpha t}\cos\omega_n t\right\} \\
&= \frac{1}{s} - \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\omega_n^2}
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

$$
X(s) = \frac{1}{s}
$$

(1.9)으로 부터 구한 전달 함수는 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
H(s) &= \frac{Y(s)}{X(s)} \\
&= \frac{\alpha s+\alpha^2+\omega_n^2}{(s+\alpha)^2+\omega_n^2} \\
&= \frac{\alpha(s+\alpha)}{(s+\alpha)^2+\omega_n^2} + \frac{\omega_n^2}{(s+\alpha)^2+\omega_n^2}
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

(1.10)의 inverse Laplace 변환을 통해 impulse response인 (1.2)를 구할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{H(s)\right\} \\
&= [\alpha e^{-\alpha t}\cos\omega_n t + \omega_n e^{-\alpha t}\sin\omega_n t]u(t)
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

[Problem 2] (20 Points) Consider a discrete-time LTI system with the unit impulse response

$$h[n] = (n+1)\alpha^n u[n] \tag{2.1}$$

where $|\alpha| < 1$.

(a) Show that the above system is BIBO stable.

(b) Show that the step response of the above system is given by

$$s[n] = \left[\frac{1}{(\alpha-1)^2} - \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2}\alpha^n + \frac{\alpha}{(\alpha-1)}(n+1)\alpha^n \right] u[n] \tag{2.2}$$

(c) Determine the steady-state response of the above system.

Sol.)

(a) Impulse response (2.1)은 다음과 같이 absolutely stable하다.

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| &= \sum_{k=0}^{\infty} \left|(k+1)\alpha^k\right| \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \left|(k+1)\alpha^k\right| \\ &= \lim_{N\to\infty} \frac{d}{d\alpha} \sum_{k=0}^{N+1} |\alpha|^k \\ &= \frac{1}{(1-|\alpha|)^2} < \infty \end{aligned} \tag{2.3}$$

따라서 본 시스템은 BIBO stable하다.

(b) Step response는 impulse response (2.1)과 unit step의 convolution으로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} s[n] &= h[n] * u[n] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]u[n-k] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \\ &= \begin{cases} \sum_{k=0}^{n} (k+1)\alpha^k, & n \ge 0 \\ 0, & otherwise \end{cases} \end{aligned} \tag{2.4}$$

한편, (2.3)와 같이 (2.4)를 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(k+1)\alpha^{k} &= \frac{d}{d\alpha}\sum_{k=0}^{n+1}\alpha^{k} \\ &= \frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1-\alpha^{n+2}}{1-\alpha}\right] \\ &= \frac{1-(n+2)\alpha^{n+1}+(n+1)\alpha^{n+2}}{(1-\alpha)^{2}}\end{aligned} \tag{2.5}$$

따라서 (2.4)를 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}s[n] &= \left[\frac{1-(n+2)\alpha^{n+1}+(n+1)\alpha^{n+2}}{(1-\alpha)^{2}}\right]u[n] \\ &= \left[\frac{1}{(\alpha-1)^{2}}-\frac{\alpha}{(\alpha-1)^{2}}\alpha^{n}+\frac{\alpha}{(\alpha-1)}(n+1)\alpha^{n}\right]u[n]\end{aligned} \tag{2.6}$$

(c) (2.6)의 steady-state response는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}s_{ss} &= \lim_{n\to\infty} s[n] \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(\alpha-1)^{2}}-\frac{\alpha}{(\alpha-1)^{2}}\alpha^{n}+\frac{\alpha}{(\alpha-1)}(n+1)\alpha^{n}\right] \\ &= \frac{1}{(\alpha-1)^{2}}\end{aligned} \tag{2.7}$$

[Problem 3] (20 Points) (a) Strictly speaking, the following general Nth-order linear constant-coefficient ODE cannot be used to represent a causal system S. Explain why.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k x^{(k)}(t) \tag{3.1}$$

(b) Find the general Nth-order linear constant-coefficient ODE for $N \geq M$ which can represent legally a causal system but which gives the same input-output transfer function as the above ODE.

(c) Draw the block diagram representation of the Nth-order linear constant-coefficient ODE you have found in (b).

(d) The Nth-order linear constant-coefficient ODE you have found in (b) is not a causal system if $M > N$. Explain why.

Sol.)

(a) 입력 신호 $x(t)$ 에 대해 임의의 시각 $t = a$ 에서 k^{th} 도함수가 정의되려면 다음의 두 조건을 만족해야 한다.

(i) 시각 $t = a$ 에서 $x^{(k-1)}(t)$ 가 정의 되어야 한다.

(ii) 다음의 (3.2)가 정의 되어야 한다.

$$x^{(k)}(a) = \lim_{h \to 0} \frac{x^{(k-1)}(a+h) - x^{(k-1)}(a)}{h} \tag{3.2}$$

(3.2)는 다음을 뜻한다.

$$\lim_{h \to +0} \frac{x^{(k-1)}(a-h) - x^{(k-1)}(a)}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{x^{(k-1)}(a+h) - x^{(k-1)}(a)}{h} \tag{3.3}$$

(3.3) 의 우변의 식을 보면 현재 시각 t 보다 미래의 값을 요구한다. ($s = t$ 에서 미분이 정의되려면 t 근방에서 $x(s)$ 가 정의되어야 한다) 따라서 입력으로 미분이 들어가 있는 시스템은 엄밀하게 말해서 *noncausal* 시스템이다.

(3.1)에서 $M = 0$ 이면 *causal* 시스템이고, $M \geq 1$ 이면 입력의 미분값이 시스템에 들어가게 되므로 *noncausal* 시스템이다.

(b) (3.1)을 전개하면 다음과 같다.

$$a_N \frac{d^N y(t)}{dt^N} + a_{N-1} \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}} + \cdots + a_0 y(t) = b_M \frac{d^M x(t)}{dt^M} + b_{M-1} \frac{d^{M-1} x(t)}{dt^{M-1}} + \cdots + b_0 x(t) \tag{3.4}$$

(3.4) 양변을 *Laplace transform* 을 하면 다음과 같다.

$$(a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \cdots + a_0) Y(s) = (b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \cdots + b_0) X(s) \tag{3.5}$$

(3.5)에서 주어진 시스템의 전달함수 $H(s)$ 를 구하면 다음과 같다.

$$H(s) \triangleq \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_M s^M + b_{M-1}s^{M-1} + \cdots + b_0}{a_N s^N + a_{N-1}s^{N-1} + \cdots + a_0} \tag{3.6}$$

주어진 시스템이 *causal* 하려면 전달함수 $H(s)$ 는 분모의 차수가 분자의 차수 보다 크거나 같아야 한다.

즉, $N \geq M$ 일 때 주어진 시스템은 *causal* 하다.

dummy variable $z(t)$ 의 *Laplace transform* 을 $Z(s)$ 라하고 (3.6)의 분모와 분자에 곱하면 다음과 같다.

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{(b_M s^M + b_{M-1}s^{M-1} + \cdots + b_0)Z(s)}{(a_N s^N + a_{N-1}s^{N-1} + \cdots + a_0)Z(s)} \tag{3.7}$$

(3.7)에서 분모와 분자를 분리해 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} X(s) &= (a_N s^N + a_{N-1}s^{N-1} + \cdots + a_0)Z(s) \\ Y(s) &= (b_M s^M + b_{M-1}s^{M-1} + \cdots + b_0)Z(s) \end{aligned} \tag{3.8}$$

(3.8)에서 입력 $x(t)$ 와 출력 $y(t)$ 에 대해 각각 *Inverse Laplace transform* 하면

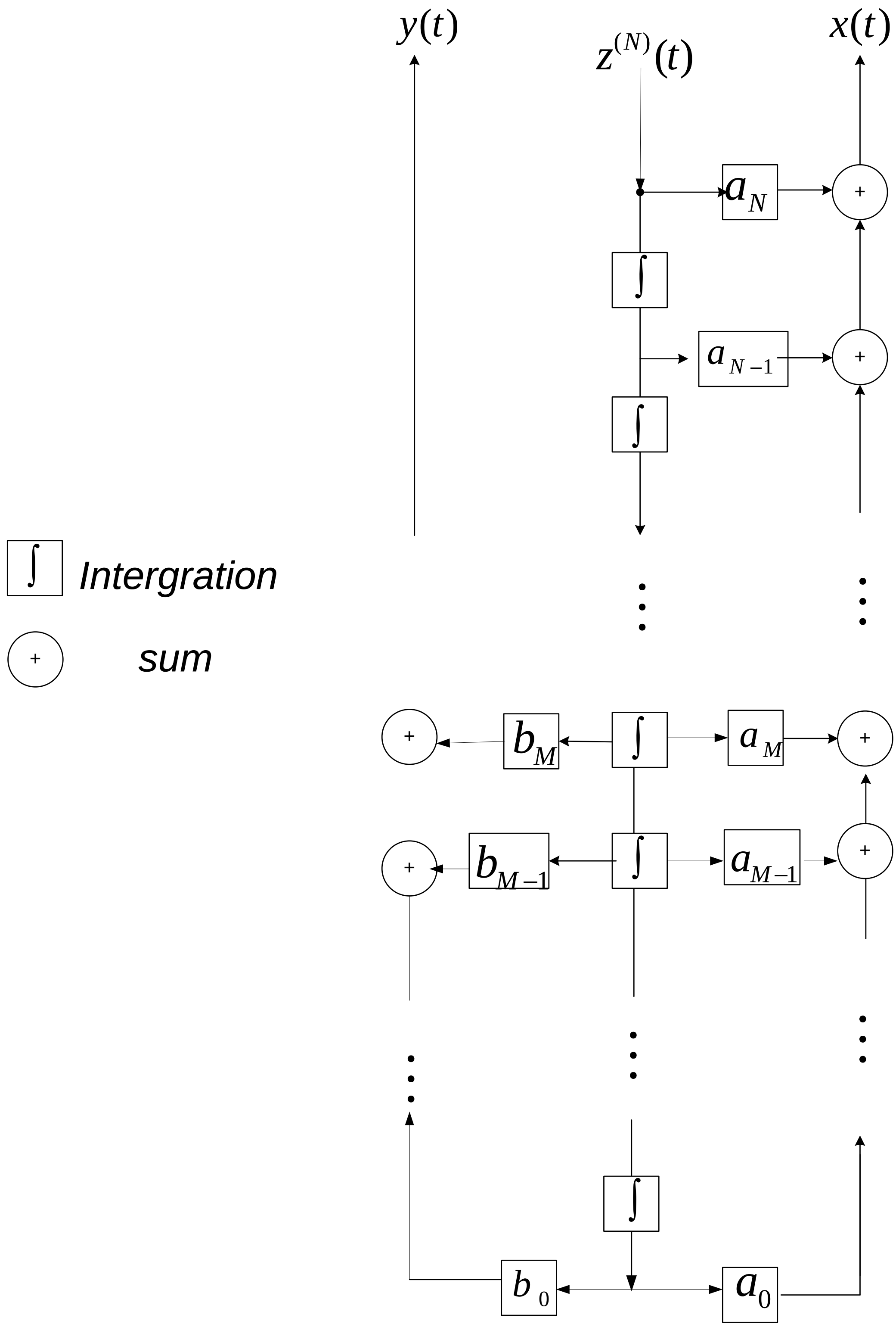
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{N} a_k z^{(k)}(t) &= x(t) \\ y(t) &= \sum_{k=0}^{M} b_k z^{(k)}(t) \end{aligned} \tag{3.9}$$

(3.9)는 (3.1)과 같은 전달함수를 가지며 $N \geq M$ 일 때 *causal* 하다.

(b) (3.9)의 다이어그램은 다음과 같다.

$$y(t) = \sum_{n=0}^{M} b_k z^{(k)}(t)$$

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N} a_k z^{(k)}(t)$$



(d) $M > N$ 일 때, (3.9)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 z(t) + a_1 z^{(1)}(t) + \cdots + a_N z^{(N)}(t) \\ y(t) &= b_0 z(t) + b_1 z^{(1)}(t) + \cdots + b_N z^{(N)}(t) + b_{N+1} z^{(N+1)}(t) + \cdots + b_M z^{(M)}(t) \end{aligned} \qquad (3.10)$$

(3.10)의 결과 $b_{N+1} z^{(N+1)}(t) + \cdots + b_M z^{(M)}(t)$ term에 의해 입력인 $x(t)$ 의 미분이 필요한 것을 알 수 있다. 따라서 이 시스템은 (a)의 결과에 의해 *noncausal* 시스템이다.

[Problem 4] (20 Points) Let $x[n]$ and $y[n]$ be two periodic signals with common period N. Let

$$z[n] = \sum_{r=<N>} x[r]y[n-r] \tag{4.1}$$

be their periodic convolution.

(a) Show that $z[n]$ is also periodic with period N.

(b) Verify that if a_k, b_k and c_k are the Fourier coefficients of $x[n], y[n]$, and $z[n]$, respectively, then

$$c_k = Na_k b_k. \tag{4.2}$$

(c) Let

$$x[n] = \sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right) \tag{4.3}$$

and

$$y[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le 3 \\ 0, & 4 \le n \le 7 \end{cases} \tag{4.4}$$

be two signals that are periodic with period 8. Find the Fourier series representation of the periodic convolution of these signals.

(solution)

(a) 식(4.1)을 N만큼 shift하면 다음과 같다.

$$z[n+N] = \sum_{r=<N>} x[r]y[n+N-r] \tag{4.5}$$

$y[n]$의 주기가 N이므로 다음이 성립한다.

$$y[n] = y[n+N] \tag{4.6}$$

식(4.5)와 식(4.6)에 의해 다음이 성립하므로

$$\begin{aligned} z[n+N] &= \sum_{r=<N>} x[r]y[n-r] \\ &= z[n] \end{aligned} \tag{4.7}$$

$z[n]$은 주기가 N인 signal이다.

(b)교과서 p. 213의 식(3.95)에 의해 $z[n]$의 Fourier series coefficient는 다음과 같다.

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n \in <N>} z[n] e^{-jk\omega_0 n} \tag{4.8}$$

식(4.5)를 식(4.8)에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{N}\sum_{n\in<N>}\sum_{r=<N>} x[r]y[n-r]\, e^{-jk\omega_0 n} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{r=<N>}\left(x[r]e^{-jk\omega_0 r}\sum_{n\in<N>} y[n-r]e^{-jk\omega_0(n-r)}\right) \\
&= \frac{1}{N} Na_k Nb_k \\
&= Na_k b_k
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

식(4.9)에 의해 식(4.2)가 성립함을 알 수 있다.

(c)식(4.3)을 complex exponential의 형태로 바꾸면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
x[n] &= \sin\left(\frac{3\pi n}{4}\right) \\
&= \frac{1}{2j}\left(e^{j\frac{3\pi n}{4}} - e^{-j\frac{3\pi n}{4}}\right)
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

식(4.10)에 의하여 a_k 는 다음과 같다.

$$
a_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2j} & ,k = 8n+3 \\ -\dfrac{1}{2j} & ,k = 8n+5 \quad ,n = 0,\pm1,\pm2,\cdots \\ 0 & ,otherwise \end{cases}
\tag{4.11}
$$

교과서 p. 213의 식(3.95)에 의해 b_k 는 다음과 같다.

$$
b_k = \frac{1}{8}\sum_{n\in<N>} y[n]e^{-jk\frac{2\pi}{8}}
\tag{4.12}
$$

식(4.12)에 식(4.4)를 대입하면 다음과 같다.

$$
b_k = \frac{1}{8}(1 + e^{-j\frac{k\pi}{4}} + e^{-j\frac{k\pi}{2}} + e^{-j\frac{3k\pi}{4}})
\tag{4.13}
$$

식(4.13)에 의하여 b_k 는 다음과 같다.

$$
b_k = \begin{cases} \dfrac{1}{4\left(1-e^{-j\frac{k\pi}{4}}\right)} & ,k \text{ is odd} \\ \dfrac{1}{2} & ,\ k = 0 \\ 0 & ,\ k \text{ is even} \end{cases}
\tag{4.14}
$$

따라서 식(4.2), 식(4.11), 식(4.14)에 의하여 $z[n]$ 의 Fourier series coefficient는 다음과 같다.

$$c_k = \begin{cases} \dfrac{1}{j\left(1-e^{-j\frac{k\pi}{4}}\right)}, k=8n+3 \\ \dfrac{1}{j\left(1-e^{-j\frac{k\pi}{4}}\right)}, k=8n+5 \quad , n=0,\pm1,\pm2,\cdots \\ 0 \qquad , otherwise \end{cases} \tag{4.15}$$

[Problem 5] (20 Points) The representation of a periodic signal by the Fourier series or, more generally, as the linear combination of orthogonal functions in a set is computationally efficient and, in fact, very useful for obtaining good approximations of signals.

Specifically, let $\{\phi_i(t),\ i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ be a set of orthonormal functions on the interval $a \le t \le b$. Let $x(t)$ be a given signal. Consider the following approximation of $x(t)$ over the interval $a \le t \le b$.

$$\hat{x}_n(t) = \sum_{i=-N}^{+N} a_i \phi_i(t) \tag{5.1}$$

$$a_i = b_i + jc_i \tag{5.2}$$

$$\phi_i(t) = u_i(t) + jv_i(t) \tag{5.3}$$

Here, the a_i are complex number. To measure the deviation between $x(t)$ and the series approximation $\hat{x}_N(t)$, we consider the error $e_N(t)$ defined as

$$e_N(t) \triangleq x(t) - \hat{x}_N(t) \tag{5.4}$$

A reasonable and widely used criterion for measuring the quality of the approximation is the energy in the error signal over the interval of interest. That is, the integral of the square of the magnitude of the error over the interval $a \le t \le b$:

$$E = \int_a^b | e_N(t) |^2 \, dt \tag{5.5}$$

(a) Define $\vec{a} \in \mathbb{R}^{4N+2}, \vec{\varphi}(t) \in \mathbb{C}$ and $\vec{\psi}(t) \in \mathbb{R}^{4N+2}$ by

$$\vec{y} \triangleq \begin{bmatrix} b_{-N} & c_{-N} & \cdots & b_N & c_N \end{bmatrix}^T \tag{5.6}$$

$$\varphi_i \triangleq \int_a^b x(t)\phi_i^*(t)\, dt \tag{5.7}$$

$$\vec{\psi}(t) \triangleq \begin{bmatrix} \mathrm{Re}[\varphi_{-N}] & \mathrm{Im}[\varphi_{-N}] & \cdots & \mathrm{Re}[\varphi_N] & \mathrm{Im}[\varphi_N] \end{bmatrix}^T \tag{5.8}$$

Then, equation (5.5) can be represented in the following form

$$f(\vec{z}) = \frac{1}{2}\vec{z}^T P \vec{z} + \vec{q}^T \vec{z} + r \tag{5.9}$$

Equation (5.9) is strictly convex if and only if the matrix $P \in \mathbb{R}^{(4N+2)\times(4N+2)}$ is positive definite. (Matrix P is positive definite if and only if all of its eigenvalues are positive). Any local minimum of E is also a global minimum.

Specify $\vec{z},\ \vec{q},\ r$ and P in terms of $\vec{y},\ \vec{\varphi}(t),\ \vec{\psi}(t)$.

(b) Show that E is minimized by choosing

$$a_i = \int_a^b x(t)\phi_i^*(t) dt \tag{5.10}$$

(c) The set of Walsh functions is and often-used set of orthonormal functions. The set of five Walsh functions, $\phi_0(t), \phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t), \phi_4(t)$, is illustrated in Fig.5, where we have scaled time so that the $\phi_i(t)$ are nonzero and orthonormal over the interval $0 \le t \le 1$. Let $x(t) = \sin \pi t$. Find the approximation of $x(t)$ of the form

$$\hat{x}(t) = \sum_{i=0}^{4} a_i \phi_i(t) \tag{5.11}$$

such that

$$\int_0^1 | x(t) - \hat{x}(t) |^2 \, dt \tag{5.12}$$

is minimized.

(d) Show that $\hat{x}_N(t)$ and $e_N(t)$ are orthogonal if the a_i are chosen as in eq. (5.10).

(Solution)

(a) 식(5.1)과 식(5.4)를 식(5.5)에 대입하면 다음과 같다.

$$E = \int_a^b \left(x(t) - \sum_{i=-N}^{N} a_i \phi_i(t) \right) \left(x(t) - \sum_{j=-N}^{N} a_j \phi_j(t) \right)^* dt$$

$$= \int_a^b |x(t)|^2\, dt - \sum_{i=-N}^{N} a_i \int_a^b x^*(t)\phi_i(t) dt - \sum_{j=-N}^{N} a^*{}_j \int_a^b x(t)\phi_j{}^*(t) dt \tag{5.13}$$

$$+ \sum_{i=-N}^{N} \sum_{j=-N}^{N} a_i a_j{}^* \int_a^b \phi_i(t)\phi_j{}^*(t) dt$$

식(5.13)을 항 별로 정리하도록 하자. 우선 첫 번째 항을 정리하면 다음과 같다.

$$\int_a^b |x(t)|^2 dt = \sigma_x{}^2 \tag{5.14}$$

식(5.13)에서 두 번째, 세 번째 항은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=-N}^{N} a_i \int_a^b x^*(t)\phi_i(t) dt + \sum_{j=-N}^{N} a^*{}_j \int_a^b x(t)\phi_j{}^*(t) dt &= 2 \sum_{i=-N}^{N} \mathrm{Re}\left[a_i \int_a^b x^*(t)\phi_i(t)\, dt \right] \\
&= 2 \sum_{i=-N}^{N} \Bigg[\mathrm{Re}\left[a_i\right] \mathrm{Re}\left[\int_a^b x^*(t)\phi_i(t)\, dt \right] - \\
&\qquad \mathrm{Im}\left[a_i\right] \mathrm{Im}\left[\int_a^b x^*(t)\phi_i(t)\, dt \right] \Bigg] \\
&= 2 \sum_{i=-N}^{N} \left[b_i \,\mathrm{Re}\left[\varphi_i\right] + c_i \,\mathrm{Im}\left[\varphi_i\right] \right] \\
&= 2 \vec{\psi}^T \vec{y}
\end{aligned} \tag{5.15}$$

식(5.15)의 첫 번째 등호는 다음 관계에 의해 성립하고

$$x + x^* = 2\,\mathrm{Re}[x] \tag{5.16}$$

식(5.15)의 두 번째 등호는 다음 관계에 의해 성립한다.

$$\mathrm{Re}[xy] = \mathrm{Re}[x]\mathrm{Re}[y] - \mathrm{Im}[x]\mathrm{Im}[y] \tag{5.17}$$

네 번째 항을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=-N}^{N} \sum_{j=-N}^{N} a_i a_j{}^* \int_a^b \phi_i(t)\phi_j{}^*(t)\, dt &= \sum_{i=-N}^{N} |a_i|^2 \\
&= \sum_{i=-N}^{N} \left(|b_i|^2 + |c_i|^2 \right) \\
&= |\vec{y}|^2 \\
&= \vec{y}^T I_{(4N+2)\times(4N+2)} \vec{y}
\end{aligned} \tag{5.18}$$

식(5.18)의 첫 번째 등호는 다음 관계에 의해 성립한다.

$$\int_a^b \phi_i(t)\phi_j^*(t)\,dt = \begin{cases} 1\,, i=j \\ 0,\ i\neq j \end{cases} \tag{5.19}$$

식(5.13)을 식(5.6), 식(5.8)의 notation으로 표현하면 다음과 같다.

$$E = \vec{y}^T I_{(4N+2)\times(4N+2)}\vec{y} - 2\vec{\psi}^T\vec{y} + \sigma_x^{\ 2} \tag{5.20}$$

식(5.20)과 식(5.9)를 비교하여 $\vec{z},\vec{q},r,P$ 를 구하면 다음과 같다.

$$\vec{z} = \vec{y} \tag{5.21}$$

$$\vec{q} = -2\vec{\psi} \tag{5.22}$$

$$r = \sigma_x^{\ 2} \tag{5.23}$$

$$P = 2I_{(4n+2)\times(4n+2)} \tag{5.24}$$

따라서 E 는 convex 이다.

(b) 문제5-(a)의해 E 가 convex 이므로 E 를 최소로 만드는 필요충분 조건은 다음과 같다.

$$\frac{\partial E}{\partial b_k} = \frac{\partial E}{\partial c_k} = 0\ , k = 0,\pm1,\pm2,\cdots,\pm N \tag{5.25}$$

식(5.5)를 b_i, c_i 에 대해 각각 편미분하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial E}{\partial b_i} = -\int_a^b x(t)\phi^*{}_i(t)\,dt + 2b_i - \int_a^b x^*(t)\phi_i(t)\,dt \tag{5.26}$$

$$\frac{\partial E}{\partial c_i} = j\int_a^b x(t)\phi^*{}_i(t)\,dt + 2c_i - j\int_a^b x^*(t)\phi_i(t)\,dt \tag{5.27}$$

식(5.26)과 식(5.27)에 의해 식(5.25)를 만족하는 b_i, c_i 는 다음과 같다.

$$b_i = \frac{1}{2}\left(\int_a^b x(t)\phi_i^*(t)\,dt + \int_a^b x^*(t)\phi_i(t)\,dt\right) \tag{5.28}$$

$$c_i = -\frac{j}{2}\left(\int_a^b x(t)\phi_i^*(t)\,dt - \int_a^b x^*(t)\phi_i(t)\,dt\right) \tag{5.29}$$

a_i, b_i, c_i 의 관계는 식(5.2)와 같으므로 식(5.28), 식(5.29)에 의하여 a_i 는 다음과 같다.

$$a_i = \int_a^b x(t)\phi_i^*(t)dt \tag{5.30}$$

따라서 E 를 minimize하는 계수 a_i 는 식(5.10)과 같다.

(c) 주어진 신호 $x(t) = \sin \pi t$ 를 Fig.5와 같은 orthonormal basis로 구성된 함수에 근사하고자 한다. 문제 5-(b)에 의해 error를 minimize하는 계수는 식(5.10)이므로 이를 이용해 $a_0 \sim a_4$ 를 구하면 다음과 같다.

우선 a_0 는 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \int_0^1 \phi_0(t)\sin\pi t dt \\
&= \int_0^1 \sin\pi t dt \\
&= \frac{2}{\pi}
\end{aligned}
\tag{5.31}
$$

a_1 을 구하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \int_0^1 \phi_1(t)\sin\pi t\, dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \sin\pi t\, dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 \sin\pi t\, dt \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{5.32}
$$

a_2 를 구하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
a_2 &= \int_0^1 \phi_2(t)\sin\pi t\, dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{4}} \sin\pi t\, dt - \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \sin\pi t\, dt + \int_{\frac{3}{4}}^1 \sin\pi t\, dt \\
&= \frac{2\left(1-\sqrt{2}\right)}{\pi}
\end{aligned}
\tag{5.33}
$$

a_3 를 구하면 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
a_3 &= \int_0^1 \phi_3(t)\sin\pi t\, dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{4}} \sin\pi t\, dt - \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \sin\pi t\, dt + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \sin\pi t\, dt - \int_{\frac{3}{4}}^1 \sin\pi t\, dt \\
&= 0
\end{aligned}
\tag{5.34}
$$

a_4 를 구하면 다음과 같다

$$
\begin{aligned}
a_4 &= \int_0^1 \phi_3(t)\sin\pi t\, dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{8}} \sin\pi t\, dt - \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{3}{8}} \sin\pi t\, dt + \int_{\frac{3}{8}}^{\frac{5}{8}} \sin\pi t\, dt - \int_{\frac{5}{8}}^{\frac{7}{8}} \sin\pi t\, dt + \int_{\frac{7}{8}}^1 \sin\pi t\, dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left(2 - 4\cos\frac{\pi}{8} + 4\cos\frac{3\pi}{8}\right)
\end{aligned}
\tag{5.35}
$$

(d)구간 $[a \;\; b]$ 에서 정의된 두 함수 $f(x), g(x)$ 가 다음조건을 만족할 때

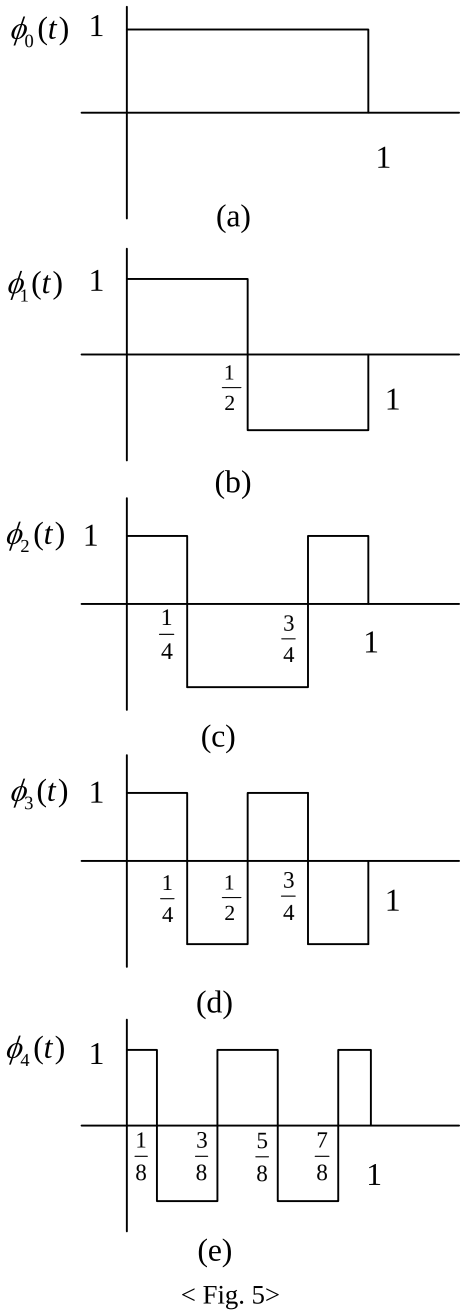
$$
\int_a^b f^*(x)g(x)dx = 0 \tag{5.36}
$$

두 함수 $f(x), g(x)$ 는 구간 $[a \;\; b]$ 에서 orthogonal이라 한다.

문제에서는 두 함수 $\hat{x}(t)$ 와 $e(t)$ 가 orthogonal인지 확인해야 하므로 식(5.1)과 식(5.4)를 식(5.36)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \hat{x}^*(t)e(t)\,dt &= \int_0^1 \sum_{i\in<N>} a_i^*\phi_i^*(t)\left[x(t) - \sum_{j\in<N>} a_j\phi_j(t)\right]dt \\ &= \sum_{i\in<N>} a_i^* \int_0^1 x(t)\phi_i^*(t)dt - \sum_{i\in<N>}\sum_{j\in<N>} a_i^* a_j \int_0^1 \phi_i^*(t)\phi_j(t)dt \\ &= \sum_{i\in<N>} a_i^* a_i - \sum_{i\in<N>} a_i^* a_i \\ &= 0\end{aligned} \tag{5.37}$$

따라서 두 함수 $\hat{x}(t)$ 와 $e(t)$ 는 orthogonal 하다.



< Fig. 5>