[Problem 1] (20points)Consider the system S shown in Fig. 1, with the following input

$$x(t) = \frac{1}{\pi t}\sin\frac{3t}{8}\cos\frac{t}{8}. \tag{1.1}$$

The impulse response of the channel is

$$h_c(t) = \delta(t-4) \tag{1.2}$$

and the impulse response of the ideal low pass filter is

$$h_{lp}(t) = \frac{\sin t}{\pi t}. \tag{1.3}$$

(a) Sketch the Fourier transform of the output $y(t)$.

(b) Find the impulse response $h(t)$ of the system S and its Fourier transform.

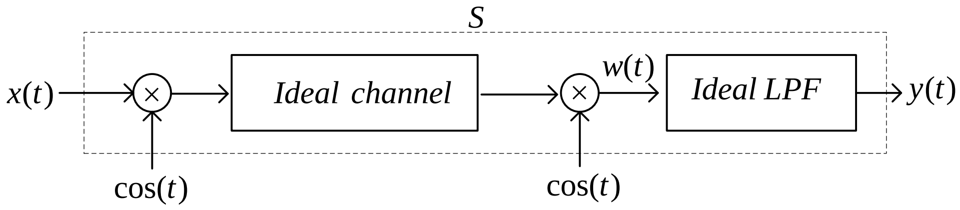


Fig. 1

(a)식(1.1)을 sin 함수의 합으로 분리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{\pi t}\left(\frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin\frac{1}{4}t\right) \\ &= \frac{1}{4\pi} sinc\left(\frac{t}{2\pi}\right) + \frac{1}{8\pi} sinc\left(\frac{t}{4\pi}\right) \end{aligned} \tag{1.4}$$

입력 $x(t)$의 Fourier transform $X(j\omega)$는 식(1.4)에 의하여 다음과 같고

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1 & , \ |\omega| < \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & , \ \frac{1}{4} < |\omega| < \frac{1}{2} \\ 0 & , \ otherwise \end{cases} \tag{1.5}$$

이를 plot하면 다음과 같다.

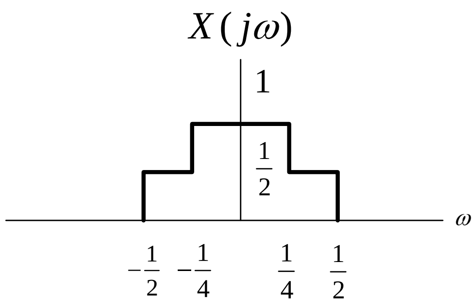


Fig. 1.1

한편 the ideal low pass filter의 입력 $w(t)$ 는 다음과 같고

$$\begin{aligned} w(t) &= \left(\left(x(t)\cos t\right) * \delta(t-4)\right)\cos t \\ &= x(t-4)\left(\cos^2 t\cos 4 + \cos t\sin t\sin 4\right) \\ &= x(t-4)\left(\frac{1+\cos 2t}{2}\cos 4 + \frac{\sin 2t}{2}\sin 4\right) \end{aligned} \tag{1.6}$$

$w(t)$ 의 Fourier transform $W(j\omega)$ 는 식(1.6)에 의하여 다음과 같다.

$$\begin{aligned} W(j\omega) &= \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\left\{x(t-4)\right\} * \mathcal{F}\left\{\frac{1+\cos 2t}{2}\cos 4 + \frac{\sin 2t}{2}\sin 4\right\} \\ &= \frac{\cos 4}{2}X(j\omega)e^{-j4\omega} + X\left(j(\omega-2)\right)e^{-j4(\omega-2)}\left\{\frac{\cos 4}{4}+\frac{\sin 4}{4j}\right\} \\ &\quad + X\left(j(\omega+2)\right)e^{-j4(\omega+2)}\left\{\frac{\cos 4}{4}-\frac{\sin 4}{4j}\right\} \end{aligned} \tag{1.7}$$

식(1.7)의 마지막 등호는 다음 두식에 의하여 성립한다.

$$\mathcal{F}\left\{1+\cos 2t\right\} = 2\pi\delta(\omega) + \pi\delta(\omega-2) + \pi\delta(\omega+2) \tag{1.8}$$

$$\mathcal{F}\left\{\sin 2t\right\} = \frac{\pi}{j}\delta(\omega-2) - \frac{\pi}{j}\delta(\omega+2) \tag{1.9}$$

출력 $y(t)$ 의 Fourier transform $Y(j\omega)$ 는 식(1.7)에 의해 다음과 같고

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= H_{lp}(j\omega)W(j\omega) \\ &= c_1 H_{lp}(j\omega)X(j\omega) + c_2 H_{lp}(j\omega)X\left(j(\omega-2)\right) \\ &\quad + c_3 H_{lp}(j\omega)X\left(j(\omega+2)\right) \end{aligned} \tag{1.10}$$

이때 상수 c_1, c_2, c_3 는 다음과 같다.

$$c_1 = \frac{\cos 4}{2}e^{-j\omega} \tag{1.11}$$

$$c_2 = e^{-j4(\omega-2)}\left\{\frac{\cos 4}{4}+\frac{\sin 4}{4j}\right\} \tag{1.12}$$

$$c_3 = e^{-j4(\omega+2)}\left\{\frac{\cos 4}{4}-\frac{\sin 4}{4j}\right\} \tag{1.13}$$

여기서 $H_{lp}(j\omega)$ 는 cutoff frequency가 1인 ideal low pass filter이므로 그 그래프는 다음과 같다.

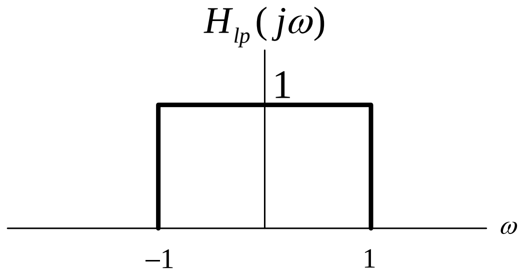


Fig. 1.3

식(1.10)에서 계수를 제외한 부분은 Fig. 1. 1, Fig. 1. 3에 의해 다음과 같이 그릴 수 있다.

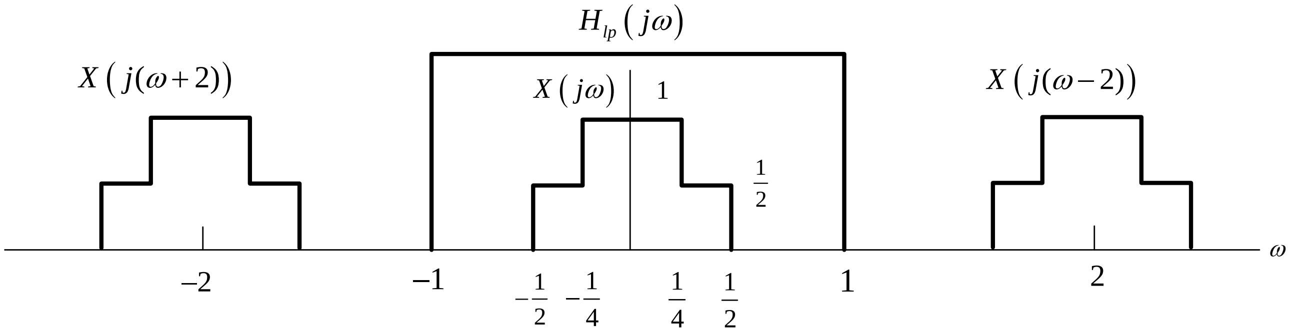


Fig. 1.4

따라서 식(1.10)은 Fig. 1.4에 의해 첫 번째 항을 제외하면 모두 0이 되므로 $Y(j\omega)$ 는 다음과 같다.

$$Y(j\omega) = \frac{\cos 4}{2} X(j\omega) e^{-j4\omega} \qquad (1.14)$$

이를 plot하면 다음과 같다.

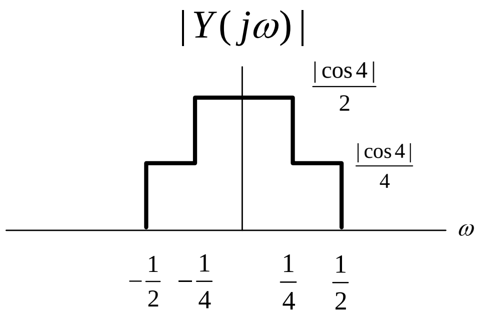


Fig. 1.5

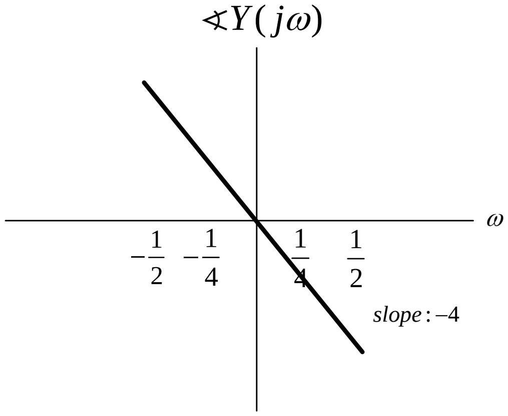


Fig. 1.6

(b)전체 system S의 전달함수는 식(1.14)에 의해 다음과 같다.

$$H(j\omega) \triangleq \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\cos 4}{2} e^{-j4\omega} \tag{1.15}$$

따라서 $h(t)$는 식(1.15)의 inverse Fourier transform이므로 time shift property에 의해 다음과 같다.

$$h(t) = \frac{\cos 4}{2} \delta(t-4) \tag{1.16}$$

[Problem 2] (20points) Suppose that a discrete-time system H can be described by the following discrete-time state vector difference equation.

$$\begin{aligned} \mathbf{q}[n+1] &= \mathbf{A}\mathbf{q}[n] + \mathbf{B}x[n] \\ y[n] &= \mathbf{C}\mathbf{q}[n] + \mathbf{D}x[n] \end{aligned} \tag{2.1}$$

where $\mathbf{q}[n] \in \mathbb{R}^n,\ x[n] \in \mathbb{R},\ y[n] \in \mathbb{R}$, while $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ are constant matrices with appropriate dimensions.

(a) Assume that the Fourier transforms of the input $x[n]$ and the impulse response of the system H exist. Then, show that

$$H(e^{j\omega}) = \mathcal{F}\{h[n]\} = \mathbf{C}(e^{j\omega}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \tag{2.2}$$

(b) Suppose that the constant matrices $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ are given by

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Then, determine specifically the impulse and frequency responses of the system H. Further, find the difference equation in terms of $x[n],\ y[n]$, which has the same frequency response of the system H.

Sol.)

(a) $\mathbf{Q}(e^{j\omega}) \triangleq \mathcal{F}\{\mathbf{q}[n]\}$ 일 때 Time shifting property에 의해 (2.1)의 Fourier transform은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} e^{j\omega}\mathbf{Q}(e^{j\omega}) &= \mathbf{A}\mathbf{Q}(e^{j\omega}) + \mathbf{B}X(e^{j\omega}) \\ Y(e^{j\omega}) &= \mathbf{C}\mathbf{Q}(e^{j\omega}) + \mathbf{D}X(e^{j\omega}) \end{aligned} \tag{2.4}$$

이를 $\mathbf{Q}(e^{j\omega})$ 에 관해 정리하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\mathbf{Q}(e^{j\omega}) = (e^{j\omega}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}X(e^{j\omega}) \tag{2.5}$$

이를 (2.4)에 대입하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \mathbf{C}\mathbf{Q}(e^{j\omega}) + \mathbf{D}X(e^{j\omega}) \\ &= \mathbf{C}(e^{j\omega}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}X(e^{j\omega}) + \mathbf{D}X(e^{j\omega}) \end{aligned} \tag{2.6}$$

따라서 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} \\ &= \mathbf{C}(e^{j\omega}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \end{aligned} \tag{2.7}$$

(b) (2.3)가 주어졌을 때 system의 frequency response는 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
H(e^{j\omega}) &= \mathbf{C}(e^{j\omega}\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D} \\
&= \frac{1}{\left(e^{j\omega}+\frac{1}{2}\right)\left(e^{j\omega}-\frac{1}{4}\right)}+1 \\
&= \frac{1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}+\frac{7}{8}e^{-j2\omega}}{1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-j2\omega}} \\
&= \frac{\frac{8}{3}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}+\frac{\frac{16}{3}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}-7
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

System의 impulse response는 (2.8)의 inverse Fourier transform을 통해 구할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
h[n] &= \mathcal{F}^{-1}\{H(e^{j\omega})\} \\
&= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{\frac{8}{3}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}}+\frac{\frac{16}{3}}{1-\frac{1}{4}e^{-j\omega}}-7\right\} \\
&= \frac{8}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\frac{16}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]-7\delta[n] \\
&= \left\{\frac{8}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{16}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}u[n]-7\delta[n]
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

한편, $H(e^{j\omega})=\dfrac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}$ 이므로 (2.8)을 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$
Y(e^{j\omega})\left(1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}-\frac{1}{8}e^{-j2\omega}\right)=X(e^{j\omega})\left(1+\frac{1}{4}e^{-j\omega}+\frac{7}{8}e^{-j2\omega}\right)
\tag{2.10}
$$

(2.10)의 inverse Fourier transform을 통해 다음의 difference equation을 구할 수 있다.

$$
y[n]+\frac{1}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]=x[n]+\frac{1}{4}x[n-1]+\frac{7}{8}x[n-2]
\tag{2.11}
$$

[Problem 3] (20points) A particular discrete-time system has input $x[n]$ and output $y[n]$. The Fourier transforms of these signals are related by the equation

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{X(e^{j\omega})}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} - j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \tag{3.1}$$

(a) Is the system linear? Cleary justify your answer.
(b) Is the system time invariant? Cleary justify your answer.
(c) What is $y[n]$ if $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$?

Sol.)

(a) System에 대한 임의의 입력 $x_1[n]$을 상수 a, b에 대해 다음과 같이 쓸 수 있다고 하자.

$$x_1[n] \triangleq ax_2[n] + bx_3[n] \tag{3.2}$$

Fourier transform에 대해 linearity가 보존되므로 다음이 성립한다.

$$X_1(e^{j\omega}) = aX_2(e^{j\omega}) + bX_3(e^{j\omega}) \tag{3.3}$$

또한 system의 입력 $x_2[n], x_3[n]$에 대한 출력을 각각 $y_2[n], y_3[n]$라 할 때 (3.1)에 의해 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} Y_2(e^{j\omega}) &= \frac{X_2(e^{j\omega})}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} - j\frac{dX_2(e^{j\omega})}{d\omega} \\ Y_3(e^{j\omega}) &= \frac{X_3(e^{j\omega})}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} - j\frac{dX_3(e^{j\omega})}{d\omega} \end{aligned} \tag{3.4}$$

따라서 입력 $x[n]$에 대한 출력은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} Y_1(e^{j\omega}) &= \frac{aX_2(e^{j\omega}) + bX_3(e^{j\omega})}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} - j\frac{d}{d\omega}\left\{aX_2(e^{j\omega}) + bX_3(e^{j\omega})\right\} \\ &= aY_2(e^{j\omega}) + bY_3(e^{j\omega}) \end{aligned} \tag{3.5}$$

따라서 본 system은 linear system이다.

(b) 임의의 입력 $x_1[n]$에 대해 n_0 만큼 time shifting된 입력을 $x_2[n]$을 다음과 같이 정의한다.

$$x_2[n] \triangleq x_1[n-n_0] \tag{3.6}$$

Time shifting property에 의해 (3.6)의 Fourier transform은 다음과 같다.

$$X_2(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} X_1(e^{j\omega}) \tag{3.7}$$

입력 $x_2[n]$에 대한 출력은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
Y_2(e^{j\omega}) &= \frac{X_2(e^{j\omega})}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} - j\frac{dX_2(e^{j\omega})}{d\omega} \\
&= \frac{e^{-j\omega n_0}X_1(e^{j\omega})}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} - je^{-j\omega n_0}\frac{dX_1(e^{j\omega})}{d\omega} - n_0 e^{-j\omega n_0}X_1(e^{j\omega}) \\
&= e^{-j\omega n_0}\left\{\frac{X_1(e^{j\omega})}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} - j\frac{dX_1(e^{j\omega})}{d\omega}\right\} - n_0 e^{-j\omega n_0}X_1(e^{j\omega}) \\
&\neq e^{-j\omega n_0}Y_1(e^{j\omega})
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

따라서 본 system은 time invariant system이 아니다.

(c) <Method I>

$x[n]$의 Fourier transform은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
X(e^{j\omega}) &= \mathcal{F}\{x[n]\} \\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

이를 (3.1)에 대입하면 다음을 구할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
Y(e^{j\omega}) &= \frac{X(e^{j\omega})}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}} - j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \\
&= \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)^2} - j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}\right) \\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

따라서 $y[n]$은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
y[n] &= \mathcal{F}^{-1}\left\{Y(e^{j\omega})\right\} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

<Method II>

(3.1)의 inverse Fourier transform은 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
y[n] &= \mathcal{F}^{-1}\left\{Y(e^{j\omega})\right\} \\
&= \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\right\} * x[n] - nx[n] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k x[n-k] - nx[n]
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

문제에 주어진 $x[n]$을 (3.12)에 대입하면 다음의 $y[n]$을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} u[n-k] - n\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n] \\ &= (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n] - n\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n] \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n] \end{aligned} \tag{3.13}$$

[Problem 4] (20points) Let $h_d[n]$ denote the unit sample response of a desired ideal system with frequency response $H_d(e^{j\omega})$, and let $h[n]$ denote the unit sample response for an FIR system of length N and with frequency response $H(e^{j\omega})$. In this problem, we show that a rectangular window of length N samples applied to $h_d[n]$ will produce a unit sample response $h[n]$ such that the mean square error

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})\right|^2 d\omega \tag{4.1}$$

is minimized.

(a) The error function $E(e^{j\omega}) = H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})$ can be expressed as the power series

$$E(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n]e^{-j\omega n} \tag{4.2}$$

Find the coefficients $e[n]$ in terms of $h_d[n]$ and $h[n]$.

(b) Using Parseval's relation, express the mean square error ε^2 in terms of the coefficients $e[n]$.

(c) Show that for a unit sample response $h[n]$ of length N samples, ε^2 is minimized when

$$h[n] = \begin{cases} h_d[n], & 0 \le n \le N-1 \\ 0, & otherwise \end{cases} \tag{4.3}$$

That is, simple truncation gives the best mean square approximation to a desired frequency response for a fixed value of N.

Sol.)

(a) $E(e^{j\omega})$ 의 정의에 의해 (4.2)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} E(e^{j\omega}) &= H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega}) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{h_d[n]e^{-j\omega n} - h[n]e^{-j\omega n}\right\} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{h_d[n] - h[n]\right\}e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e[n]e^{-j\omega n} \end{aligned} \tag{4.4}$$

따라서 $e[n]$은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} e[n] &= \mathcal{F}^{-1}\left\{E(e^{j\omega})\right\} \\ &= h_d[n] - h[n] \end{aligned} \tag{4.5}$$

(b) Parseval's relation에 의해 (4.3)을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|H_d(e^{j\omega}) - H(e^{j\omega})\right|^2 d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|E(e^{j\omega})\right|^2 d\omega \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|e[n]\right|^2
\end{aligned} \tag{4.6}
$$

(c) (4.5)에 의해 (4.6)를 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|e[n]\right|^2 \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|h_d[n] - h[n]\right|^2 \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-1}\left|h_d[n]\right|^2 + \sum_{n=0}^{N-1}\left|h_d[n] - h[n]\right|^2 + \sum_{n=N}^{\infty}\left|h_d[n]\right|^2
\end{aligned} \tag{4.7}
$$

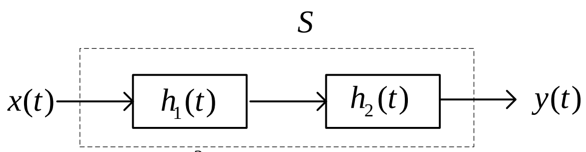
이 때 $\sum_{n=-\infty}^{0}\left|h_d[n]\right|^2$ 와 $\sum_{n=N}^{\infty}\left|h_d[n]\right|^2$ 는 각각 상수이므로 (4.3)이 만족할 때 ε^2 이 최소가 됨을 알 수 있다.

[Problem 5] (20points) Consider a band pass filter whose frequency response is specified as

$$H(j\omega)=\begin{cases} 1\ ,\ \omega_0-\dfrac{w}{2}\le|\omega|\le\omega_0+\dfrac{w}{2} \\ 0\ ,\qquad otherwise \end{cases}. \tag{5.1}$$

(a) Find the impulse response of equation (5.1).

(b) An ideal band-pass filter can be approximated by cascading a first-order low-pass and a first-order high-pass filter. Sketch the Bode plot for system S as shown in Fig. 2.



$$H_1(j\omega)=\frac{10^3}{10^3+j\omega}\qquad H_2(j\omega)=\frac{j\omega}{10^2+j\omega}$$

Fig. 2

(a) 우선 cutoff frequency가 $\dfrac{w}{2}$ 인 ideal low pass filter의 frequency response를 $H_{lp}(j\omega)$ 라고 하자. 그러면 식(5.1)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$H(j\omega)=H_{lp}(j\omega)*\left(\delta(t-\omega_0)+\delta(t+\omega_0)\right) \tag{5.2}$$

$H(j\omega)$ 의 inverse Fourier transform $h(t)$ 는 식(5.2)에 의해 다음과 같다.

$$\begin{aligned} h(t)&=\left(\mathcal{F}^{-1}\left\{H_{lp}(j\omega)\right\}\right)\times\left(e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t}\right) \\ &=\frac{2}{\pi t}\sin\left(\frac{w}{2}t\right)\cos\left(\omega_0 t\right) \end{aligned} \tag{5.3}$$

식(5.3)의 마지막 등호는 다음 수식에 의해 성립한다.

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{H_{lp}(j\omega)\right\}=\frac{1}{\pi t}\sin\frac{w}{2}t \tag{5.4}$$

(b) Fig. 2에서 전체 시스템 S는 first order low pass filter $h_1(t)$ 와 first order high pass filter $h_2(t)$ 의 cascade이므로 $H(j\omega)$ 는 Convolution property에 의해서 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} H(j\omega)&=H_1(j\omega)H_2(j\omega) \\ &=\frac{j\omega\times10^3}{(100+j\omega)(10^3+j\omega)} \\ &=\frac{j\dfrac{\omega}{100}}{\left(1+j\dfrac{\omega}{100}\right)\left(1+j\dfrac{\omega}{1000}\right)} \end{aligned} \tag{5.5}$$

이제 식(5.5)의 Bode plot을 그리도록 하자. 우선 Log-magnitude plot을 그리기 위해 식(5.5)의

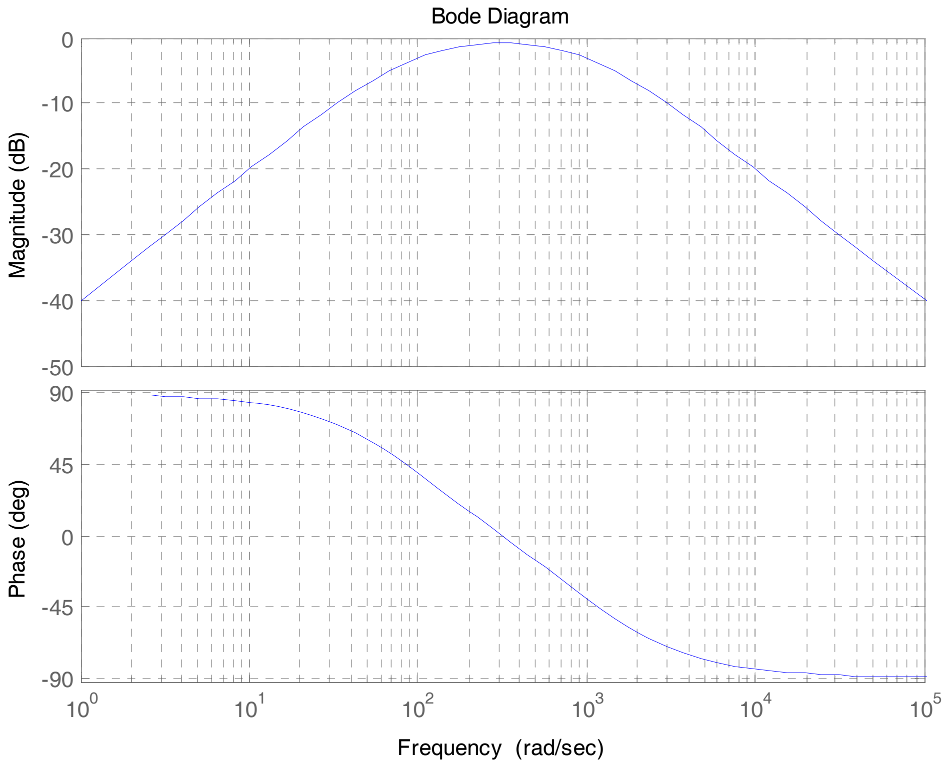
이제 식(5.5)의 Bode plot을 그리도록 하자. 우선 Log-magnitude plot을 그리기 위해 식(5.5)의 logarithmic magnitude를 구하면 다음과 같다.

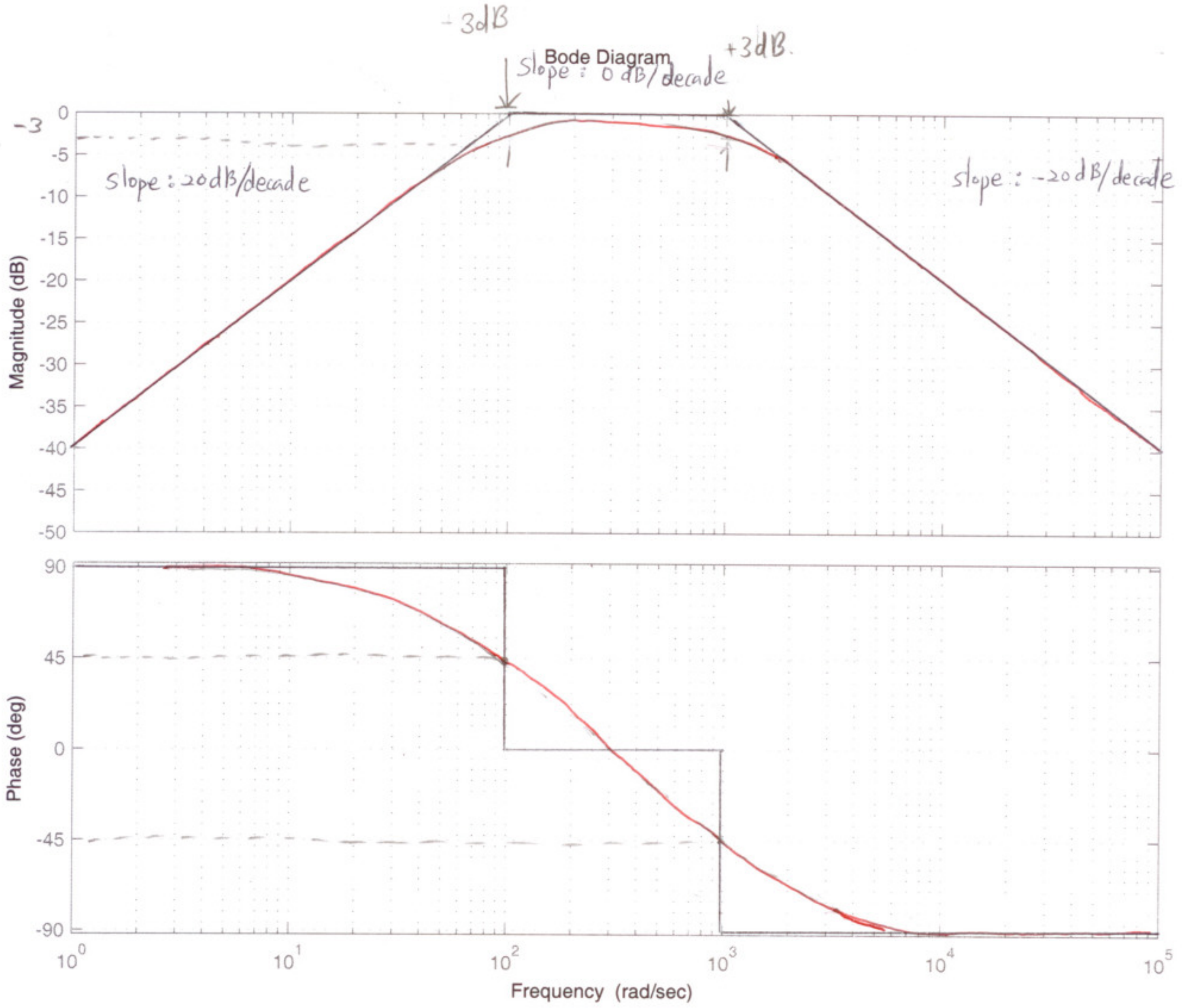
$$20\log_{10}|H(j\omega)| = 20\log_{10}|\frac{\omega}{100}| - 20\log_{10}\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{100}\right)^2} - 20\log_{10}\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{1000}\right)^2} \tag{5.6}$$

다음으로 phase plot을 그리기 위해 식(5.5)의 phase를 구하면 다음과 같다.

$$\sphericalangle H(j\omega) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{100}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{1000}\right) \tag{5.7}$$

$H(j\omega)$의 Bode plot을 Matlab을 이용하여 구하면 다음과 같다.




Bode Diagram
-3dB
+3dB.
slope: 0 dB/decade
slope: 20dB/decade
slope: -20dB/decade
-3
Magnitude (dB)
Phase (deg)
Frequency (rad/sec)