

[Problem1] The system in Fig. 1 processes discrete-time signals using a continuous-time filter $h_c(t)$. Suppose that the continuous-time filter $h_c(t)$ satisfies the following equation

$$\frac{d^2 y_c(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy_c(t)}{dt} + 3y_c(t) = x_c(t). \quad (1.1)$$

Suppose that the input signal $x[n]$ is band limited such that $X_d(e^{j\omega}) = 0$ for $\omega_m < |\omega| < \pi$. Determine the frequency response $H_d(e^{j\omega})$ and the impulse response $h[n]$ of the overall system with input $x[n]$ and output $y[n]$.

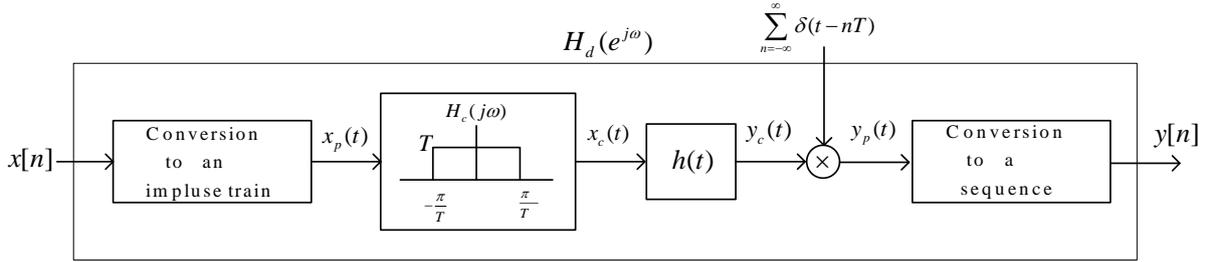


Fig. 1

(solution)

식(1.1)의 전달함수 $H_c(j\omega)$ 를 구하면 다음과 같다.

$$H_c(j\omega) = \frac{1}{-\omega^2 + 4j\omega + 3} \quad (1.2)$$

식(1.2)를 inverse Fourier transform하면 다음과 같다.

$$h_c(t) = \frac{1}{2}(e^{-t} - e^{-3t})u(t) \quad (1.3)$$

Text book p. 540의 식(7.25)에 의해 $H_c(j\omega)$ 를 $H_d(e^{j\Omega})$ 로 표현하면 다음과 같다.

$$H_d(e^{j\Omega}) = H_c(j\frac{\Omega}{T}), |\Omega| < \pi \quad (1.4)$$

식(1.4)의 우변을 $H_{band}(j\Omega)$ 이라 정의하면, $H_{band}(j\Omega)$ 는 $H_c(j\omega)$ 를 frequency scaling하고 band limited한 형태이므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$H_{band}(j\Omega) \triangleq H_c(j\frac{\Omega}{T}) \mathcal{F}\left\{\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right\} \quad (1.5)$$

$H_d(e^{j\Omega})$ 는 $H_{band}(j\Omega)$ 가 2π 를 주기로 반복된 형태이므로 식(1.5)에 의해 다음이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} H_d(e^{j\Omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{band}(j(\Omega - 2\pi n)) \\ &= H_{band}(j\Omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi n) \end{aligned} \quad (1.6)$$

식(1.5)의 inverse Fourier transform은 다음과 같고

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ H_c \left(j \frac{\Omega}{T} \right) \mathcal{F} \left\{ \frac{\sin \pi t}{\pi t} \right\} \right\} = Th_c(Tt) * \left\{ \frac{\sin \pi t}{\pi t} \right\} \quad (1.7)$$

식(1.6)의 impulse train의 inverse Fourier transform은 다음과 같다.

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi n) \right\} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n) \quad (1.8)$$

이제 식(1.3), 식(1.7)과 식(1.8)에 의해 식(1.6)의 inverse Fourier transform $h[n]$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} h[n] &= 2\pi \left[Th_c(Tt) * \left\{ \frac{\sin \pi t}{\pi t} \right\} \right] \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n) \\ &= \left[Th_c(\tilde{t}) * \left\{ \frac{\sin \pi \tilde{t}/T}{\pi \tilde{t}/T} \right\} \right] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tilde{t} - nT) \quad \text{Letting } \tilde{t} = Tt \\ &= \left[\frac{T}{2} \int_0^{\infty} (e^{-\tau} - e^{-3\tau}) \frac{\sin(\pi(\tilde{t} - \tau)/T)}{\pi(\tilde{t} - \tau)/T} d\tau \right]_{\tilde{t}=nT} \\ &= \frac{T}{2} \int_0^{\infty} (e^{-\tau} - e^{-3\tau}) \frac{\sin(\pi(nT - \tau)/T)}{\pi(nT - \tau)/T} d\tau \end{aligned} \quad (1.9)$$

[Problem2] Consider a continuous-time causal band-limited differentiator which corresponds to the practical approximation of the noncausal differentiator $H_c(j\omega) = j\omega$ introduced in the textbook. Its frequency response usually takes the following form.

$$H_c(j\omega) = \begin{cases} \frac{j\omega}{1 + j\omega\tau}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (2.1)$$

where ω_c is the cutoff frequency.

- (a) Determine and sketch the discrete-time transfer function $H_d(e^{j\omega})$ corresponding to the discrete-time implementation of the continuous-time band-limited differentiator $H_c(j\omega)$ in (2.1) using a sampling frequency $\omega_s = 2\omega_c$.
- (b) Find the impulse response $h_d[n]$, the inverse Fourier transform of $H_d(e^{j\omega})$.

(solution)

(a)

Text book p. 540의 식(7.25)에 의해 $H_c(j\omega)$ 를 $H_d(e^{j\Omega})$ 로 표현하면 다음과 같다.

$$H_c(j\omega) = \begin{cases} H_d(e^{j\omega T}), & |\omega| < \omega_s/2 \\ 0, & |\omega| > \omega_s/2 \end{cases} \quad (2.2)$$

식(2.1)과 식(2.2)를 비교하면 $H_d(e^{j\Omega})$ 는 다음과 같다.

$$H_d(e^{j\Omega}) = \frac{j \frac{\Omega}{T}}{1 + j \frac{\Omega}{T} \tau} \quad (2.3)$$

식(2.3)을 plot을 하기 위해 먼저 식(2.2)를 plot 하도록 하자. 식(2.2)의 Magnitude와 Phase를 구하면 다음과 같다.

$$|H_c(j\omega)| = \frac{|\omega|}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \quad (2.4)$$

$$\angle H_c(j\omega) = \text{sgn}(\omega) \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(\omega\tau) \quad (2.5)$$

식(2.4)와 식(2.5)를 이용해 $|H_c(j\omega)|$ 와 $\angle H_c(j\omega)$ 를 plot 다음과 같다.

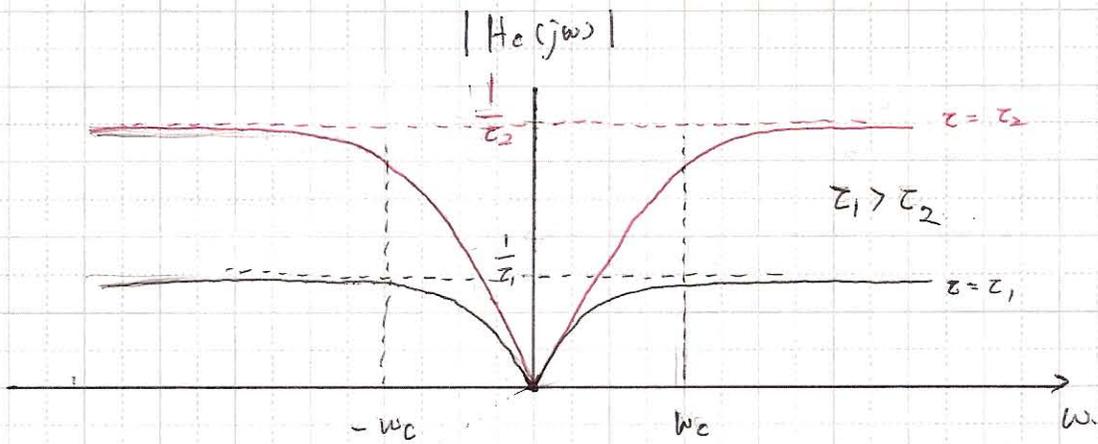


Fig 2.1

$\angle H_c(j\omega)$ 는 식 (2.5)와 같으므로, 그 개형은 다음과 같다.

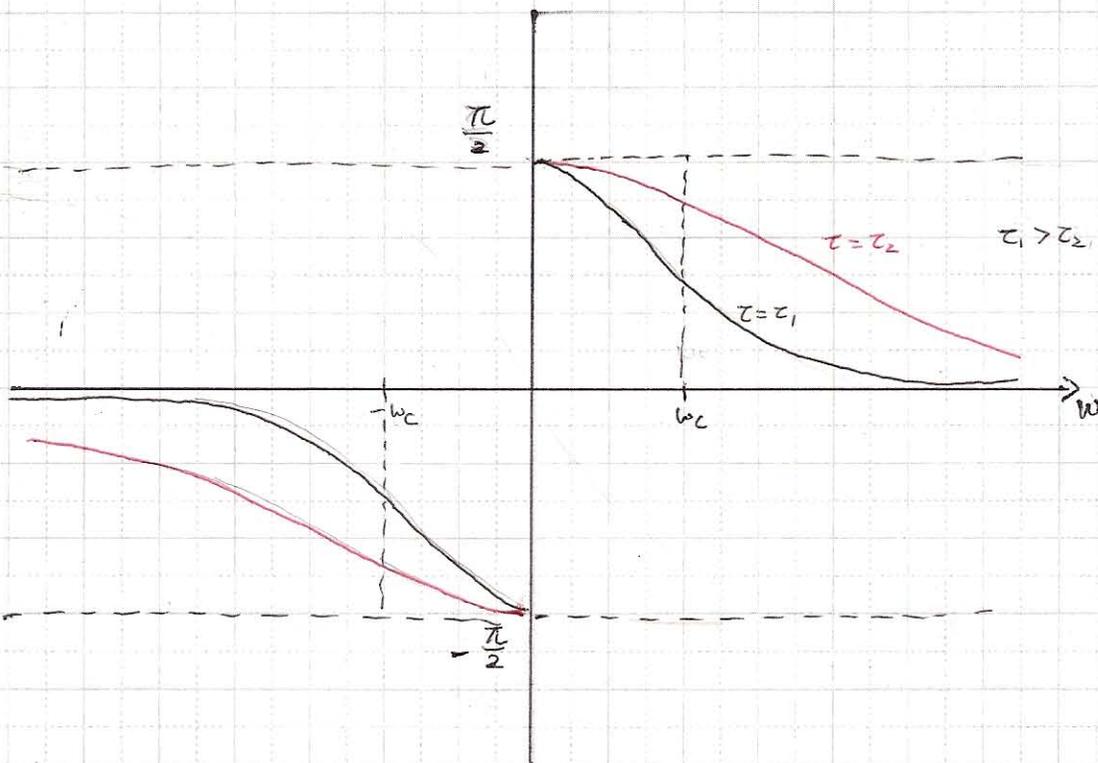


Fig 2.2

Fig 2.1 과 Fig 2.2 에서 알 수 있듯이 τ 가 작을 수록 ideal differentiator에 가까워진다.

$\omega_s = 2\omega_c$ 일때, τ 가 충분히 작은 경우 Fig 2.1, Fig 2.2를 이용해 $H_d(e^{j\omega})$ 를 plot 하면 다음과 같다.

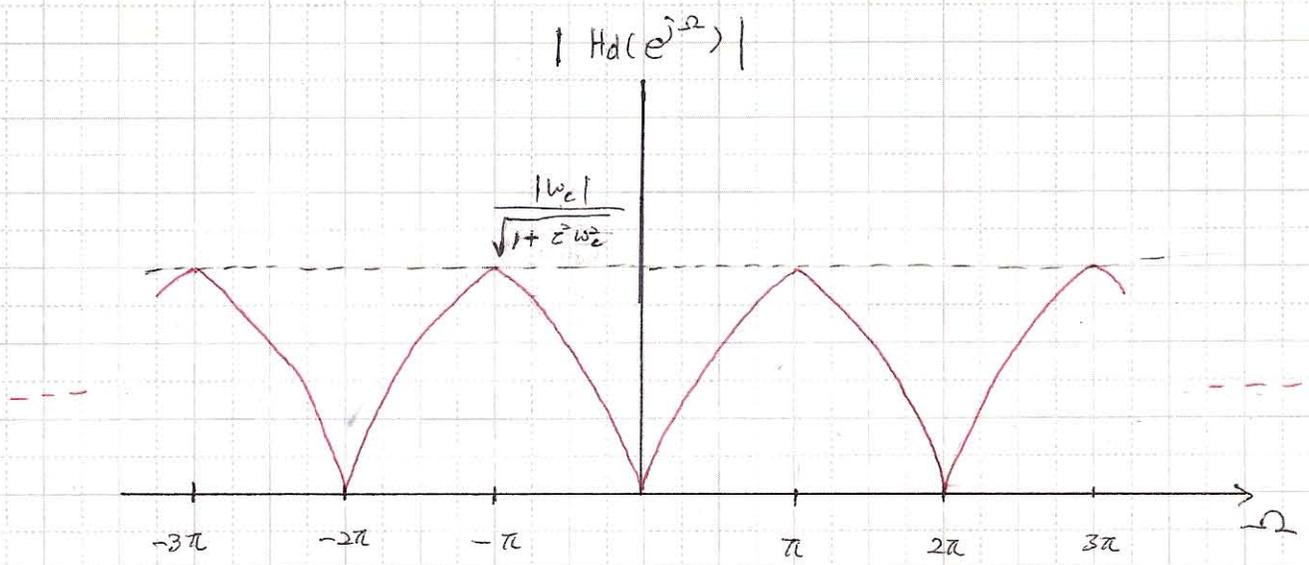


Fig 2.3

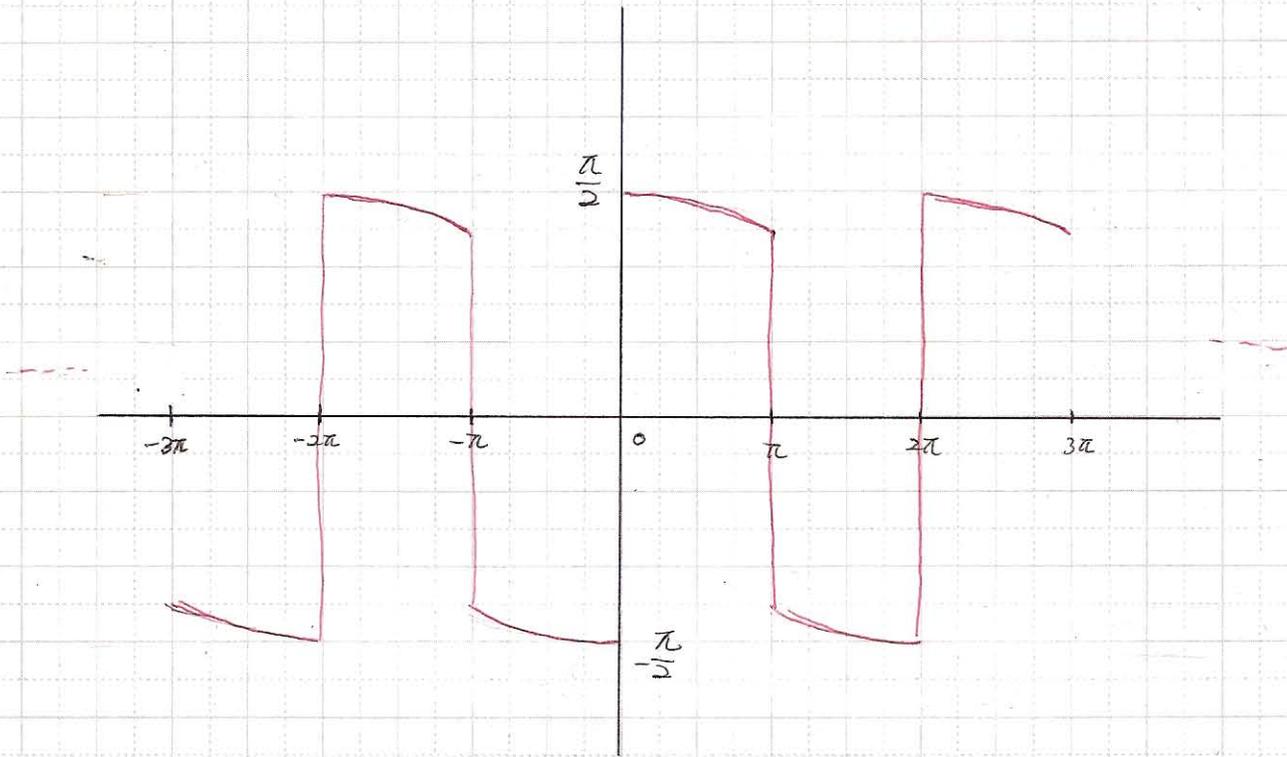


Fig 2.4

(b)

식(2.1)에 의하여 $H_c(j\omega)$ 는 다음과 같다.

$$H_c(j\omega) = \left[\frac{j\omega}{1+j\omega\tau} \right] \mathcal{F} \left\{ \frac{\sin \omega_c t}{\pi t} \right\} \quad (2.6)$$

식(2.6) 대괄호의 inverse Fourier transform은 다음과 같다.

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{j\omega}{1+j\omega\tau} \right\} = \frac{1}{\tau} \delta(t) - \frac{1}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}} u(t) \quad (2.7)$$

$\omega_s = 2\omega_c$ 이므로 $H_d(e^{j\Omega})$ 는 $H_c(j\omega)$ 를 frequency scaling하고 2π 를 주기로 반복한 것이므로 식(2.6)에 의해 다음과 같다.

$$H_d(e^{j\Omega}) = \left[H_c(j\frac{\Omega}{T}) \mathcal{F} \left\{ \frac{\sin \pi t}{\pi t} \right\} \right] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\Omega - 2\pi n) \quad (2.8)$$

식(2.8) 대괄호의 inverse Fourier transform은 다음과 같다.

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ H_c(j\frac{\Omega}{T}) \mathcal{F} \left\{ \frac{\sin \pi t}{\pi t} \right\} \right\} = Th_c(Tt) * \left\{ \frac{\sin \pi t}{\pi t} \right\} \quad (2.9)$$

이제 식(2.9)을 이용해 식(2.8)의 inverse Fourier transform $h[n]$ 을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} h[n] &= \frac{1}{2\pi} \left[Th_c(Tt) * \left\{ \frac{\sin \pi t}{\pi t} \right\} \right] 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n) \\ &= \left[Th_c(\tilde{t}) * \left\{ \frac{\sin \pi \tilde{t}/T}{\pi \tilde{t}/T} \right\} \right] \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\tilde{t}-nT) \quad \text{Letting } \tilde{t} = Tt \\ &= \left[\frac{T}{\tau^2} \int_0^{\infty} \left(\tau \delta(s) - e^{-\frac{s}{\tau}} u(s) \right) \frac{\sin(\pi(\tilde{t}-s)/T)}{\pi(\tilde{t}-s)/T} ds \right]_{\tilde{t}=nT} \\ &= \frac{T}{\tau^2} \int_0^{\infty} \left(\tau \delta(s) - e^{-\frac{s}{\tau}} u(s) \right) \frac{\sin(\pi(nT-s)/T)}{\pi(nT-s)/T} ds \end{aligned} \quad (2.10)$$

[Problem3] Recall that the region of convergence for the z-transform of a sequence $x[n]$ is defined by the set

$$ROC = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \text{ converges} \right\}. \quad (3.1)$$

Let

$$\overline{ROC} = \left\{ re^{j\omega} \in \mathbb{C} \mid \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| r^{-n} \text{ converges} \right\} \quad (3.2)$$

Then, prove or disprove $ROC = \overline{ROC}$.

(solution)

우선 $\overline{ROC} \subset ROC$ 를 보이자. $z_0 \in \overline{ROC}$ 인 z_0 는 식(3.2)를 만족하므로 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z_0^{-n} \right| &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]z_0^{-n}| \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| r_0^{-n} < \infty \end{aligned} \quad (3.3)$$

식(3.3)에 의해 $z_0 \in ROC$ 이므로 $\overline{ROC} \subset ROC$ 이다.

$ROC \subset \overline{ROC}$ 가 아님을 보이자. 신호 $x[n]$ 이 다음과 같은 교대급수일 때

$$x[n] = \frac{(-1)^n}{|n+1|} \quad (3.4)$$

$z=1$ 을 식(3.1)에 대입하면 다음과 같으므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} &= \dots - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right) - 1 \\ &< \infty \end{aligned} \quad (3.5)$$

$1 \in ROC$ 이다. 식(3.5)의 마지막 괄호는 교대급수이고 그 극한값이 0이므로 수렴한다.

하지만 식(3.4)와 $z=1$ 을 식(3.2)에 대입하면 다음과 같으므로

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| r_0^{-n} &= \dots + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \\ &= \infty \end{aligned} \quad (3.6)$$

$1 \notin \overline{ROC}$ 이다. 따라서 $ROC \not\subset \overline{ROC}$ 이므로 $ROC = \overline{ROC}$ 가 성립하지 않음을 보였다.

[Problem 4] Show that if a discrete-time signal $x[n]$ is causal, and all poles of $(1 - z^{-1})X(z)$ are inside $|z| < 1$, then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z). \quad (4.1)$$

(solution)

신호 $x[n]$ 이 causal하므로 $x[n] = 0, n < 0$ 이다. 우선 다음과 같은 식을 생각하자.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (x[n] - x[n-1])z^{-n} &= \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} - x[0] - z^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} x[n-1]z^{-(n-1)} \\ &= (1 - z^{-1})X(z) - x[0] \end{aligned} \quad (4.2)$$

식(4.2)에 z 를 1로 보내는 극한을 취하면 다음과 같다.

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (x[n] - x[n-1])z^{-n} \right) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z) - x[0] \quad (4.3)$$

식(4.3)의 좌변을 전개하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^m (x[n] - x[n-1])z^{-n} \right) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{z \rightarrow 1} \left(\sum_{n=1}^m (x[n] - x[n-1])z^{-n} \right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^m (x[n] - x[n-1]) \right) \quad * \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} x[m] - x[0] \end{aligned} \quad (4.4)$$

식(4.3)과 식(4.4)를 정리하면 다음과 같으므로

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z) \quad (4.5)$$

식(4.7)에 의해 Final value Theorem이 증명되었다.

* 식(4.4)의 첫 번째 등호가 성립하기 위해서는 극한의 순서를 바꿀 수 있어야 한다. ROC 내부의 한 점 $z_0 = r_0 e^{j\omega_0}$ 에 대해 식(4.4)의 함수열은 다음과 같은 부등식을 만족한다.

$$\begin{aligned} |(x[n] - x[n-1])z_0^{-n}| &= |x[n] - x[n-1]| r_0^{-n} \\ &\leq (|x[n]| + |x[n-1]|) r_0^{-n} \\ &= |x[n]| r_0^{-n} + |x[n-1]| r_0^{-n} \end{aligned} \quad (4.6)$$

식(4.6)의 무한급수는 다음과 같으므로

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x[n]| r_0^{-n} + \sum_{n=1}^{\infty} |x[n-1]| r_0^{-n} < \infty \quad (\text{by the definition of ROC}) \quad (4.7)$$

식(4.7)과 Weierstrass M-test에 의해 식(4.4)는 uniform converge하게 되고 따라서 식(4.4)에서 극한의 순서를 바꾸는 것이 가능하다.

[Problem 5] (20 points) A discrete-time system S is governed by the following difference equation.

$$y[n] + \frac{9}{4}y[n-1] + \frac{3}{8}y[n-2] - \frac{1}{4}y[n-3] = x[n] - \frac{1}{4}x[n-1] - \frac{1}{8}x[n-2] \quad (5.1)$$

(a) Find the transfer function $H(z)$ of the system S. Draw the three different forms of block diagram representation of the system S using the minimal number of time delays.

(b) Find the state-vector difference equation of the system S using the results in (a).

Sol.)

(a) (5.1)의 양변에 z-transform을 취하면 다음과 같다.

$$Y(z) \left(1 + \frac{9}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2} - \frac{1}{4}z^{-3} \right) = X(z) \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2} \right) \quad (5.2)$$

따라서 system S의 transfer function은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} H(z) &\triangleq \frac{Y(z)}{X(z)} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}{1 + \frac{9}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2} - \frac{1}{4}z^{-3}} \end{aligned} \quad (5.3)$$

< Direct form >

(5.3)의 분자와 분모에 dummy variable $w[n]$ 의 z-transform인 $W(z)$ 를 곱한다.

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2} \right) W(z)}{\left(1 + \frac{9}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2} - \frac{1}{4}z^{-3} \right) W(z)} \quad (5.4)$$

(5.4)는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$X(z) = \left(1 + \frac{9}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2} - \frac{1}{4}z^{-3} \right) W(z) \quad (5.5)$$

$$Y(z) = \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2} \right) W(z) \quad (5.6)$$

(5.5)와 (5.6)의 inverse z-transform은 다음과 같다.

$$w[n] + \frac{9}{4}w[n-1] + \frac{3}{8}w[n-2] - \frac{1}{4}w[n-3] = x[n] \quad (5.7)$$

$$y[n] = w[n] - \frac{1}{4}w[n-1] - \frac{1}{8}w[n-2] \quad (5.8)$$

(5.7)과 (5.8)을 이용한 block diagram은 다음과 같다.

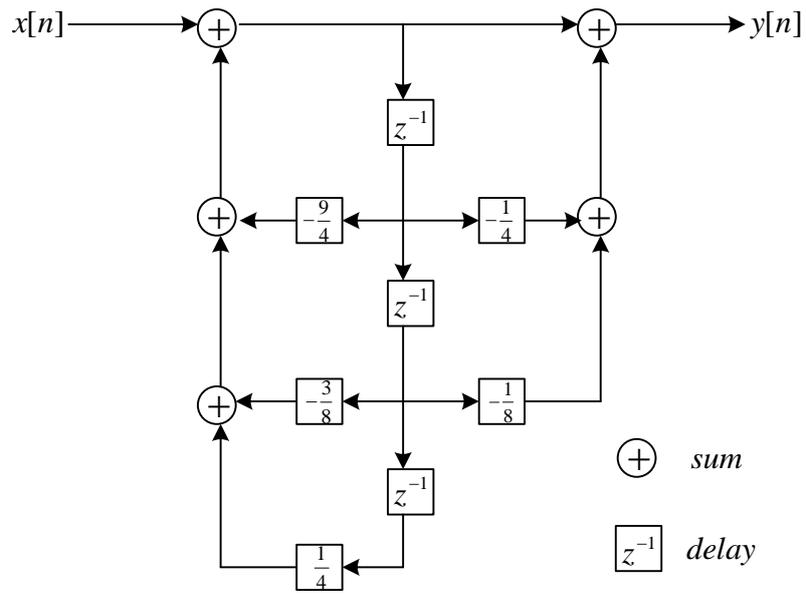


Fig. 6. 1. Direct form (Text 방식)

혹은, 다음과 같이 그릴 수 있다.

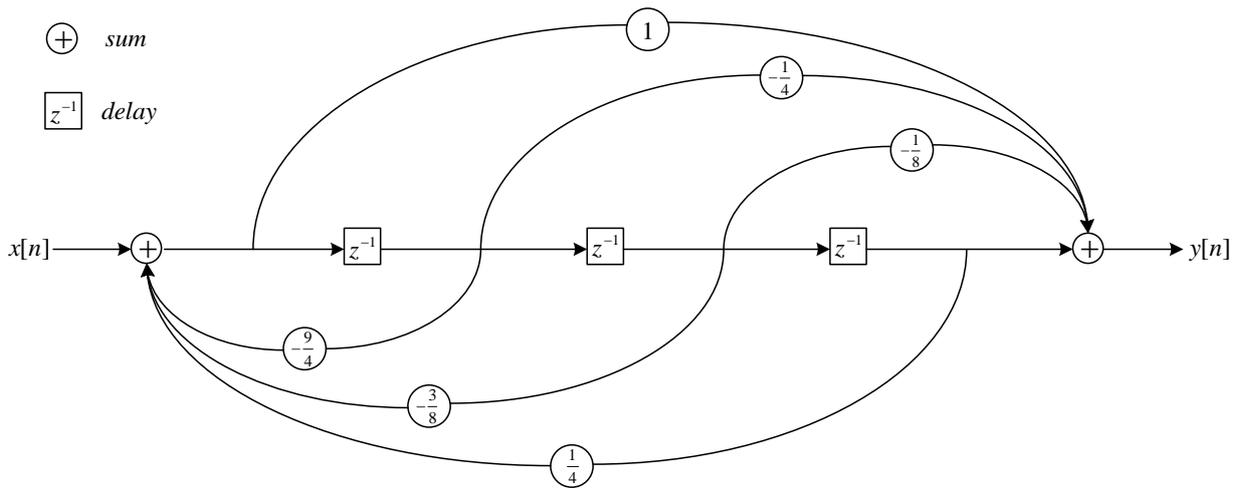


Fig. 6. 2. Direct form

< Cascade form >

(5.3)을 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}{1 + \frac{9}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2} - \frac{1}{4}z^{-3}} \\
 &= \frac{\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}{\left(1 + \frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 + 2z^{-1}\right)} \\
 &= \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}\right)\left(\frac{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}\right)\left(\frac{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}{1 + 2z^{-1}}\right)
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

(5.9)에 의해 다음의 block diagram을 구할 수 있다.

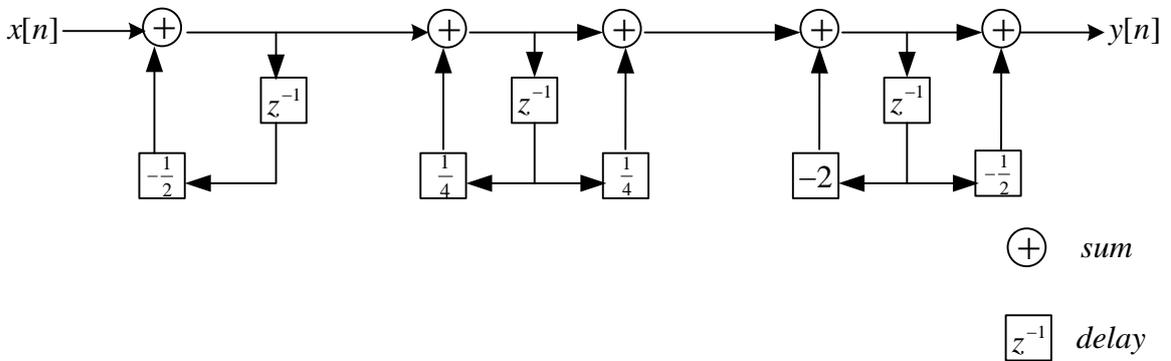


Fig. 6. 3. Cascade form

< Parallel form >

(5.3)을 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}{1 + \frac{9}{4}z^{-1} + \frac{3}{8}z^{-2} - \frac{1}{4}z^{-3}} \\
 &= \frac{-\frac{2}{9}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{-\frac{2}{27}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{\frac{35}{27}}{1 + 2z^{-1}}
 \end{aligned} \tag{5.10}$$

(5.10)에 의해 다음의 block diagram을 구할 수 있다.

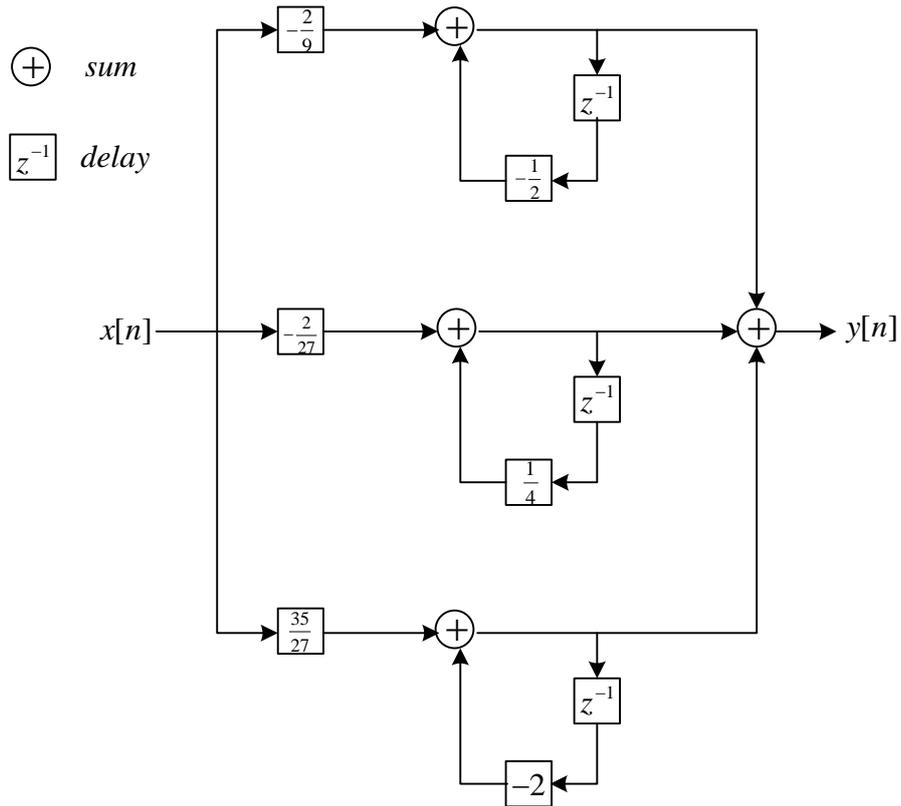


Fig. 6. 4. Parallel form

(b) State-vector variable $\mathbf{v}[n]$ 을 dummy variable $w[n]$ 에 대해 다음과 같이 정의한다.

$$\mathbf{v}[n] \triangleq \begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \\ v_3[n] \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} w[n] \\ w[n-1] \\ w[n-2] \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

(5.7)에 의해 $\mathbf{v}[n]$ 은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} v_1[n] \\ v_2[n] \\ v_3[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{4}v_1[n-1] - \frac{3}{8}v_2[n-1] + \frac{1}{4}v_3[n-1] + x[n] \\ v_1[n-1] \\ v_2[n-1] \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

(5.8)과 (5.12)의 정리를 통해 다음의 state-vector difference equation을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathbf{v}[n] &= \mathbf{A}\mathbf{v}[n-1] + \mathbf{B}x[n] \\ y[n] &= \mathbf{C}\mathbf{v}[n] \end{aligned} \quad (5.13)$$

이 때, \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} 는 각각 다음과 같다.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{9}{4} & -\frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} \end{bmatrix} \quad (5.14)$$