2009년 창의적 선박설계 기말고사 Part 3

일시: Part I. 2009년 6월 18일 목요일 오전 9시 ~ 오후 1시 (4H)
Part II. 2009년 6월 18일 목요일 오후 2시 ~ 오후 5시30분 (3H30M)
Part III. 2009년 6월 18일 목요일 오후 6시30분 ~ 오후 9시30분(3H)

아래 주어진 설계선의 주요 요목과 요구사항을 바탕으로 Part3의 설계를 진행하시오.

주요요목	기준선 (3700TEU)	설계호선
Main Dimensions		
LOA	257.4 m	261.2 m
LBP	245.24 m	246.2 m
B mld	32.2 m	32.25 m
D mld	19.3 m	19.3 m
d(design)	10.1 m	Abt. 11 m
d(scant.)	12.5 m	Abt. 12.5 m
Deadweight		51,000mt
(design/scant.)	34,300/50,200 MT	at scant. draught
Capacity		
Container on deck/in hold	2,174 TEU / 1,565 TEU	Abt. 4,100TEU
Ballast water	13,800 m3	11,500 m^3
Heavy fuel oil	6,200 m3	6,700 m^3
Marine diesel oil	400 m3	
Fresh water	360 m3	
Main Engine & Speed		
M/E type	Sulzer 7RTA84C	
MCR (BHP * rpm)	38,570 * 102	
NCR (BHP * rpm)	34,710 * 98.5	
Service speed at NCR	22.5 knots (11.5m)	23.0 knots
(design draught, 15% SM)	30,185 BHP	(design draught, 15% SM)
Daily FOC at NCR	103.2 MT	
Cruising range	20,000 N.M	Abt. 20,000 N.M
Others		
Complement	30 P.	30 P.
Crane 유무	Crane 있음	Crane 없음

시험 시 추가로 주어지는 자료

-각 Part 종료와 동시에 시험지와 자료 수거

Part 3.

1) 3700TEU 기준선 자료 중 관련 부분

a) Midship Section

2) DNV Rule 자료 중 관련 부분 (구조 설계)

a) SWBM & VWBM 추정식

b) 설계선의 stress factor (f_{2b}, f_{2d})

c) Plate & Longitudinal stiffener 치수 결정에 필요한 모든 수식

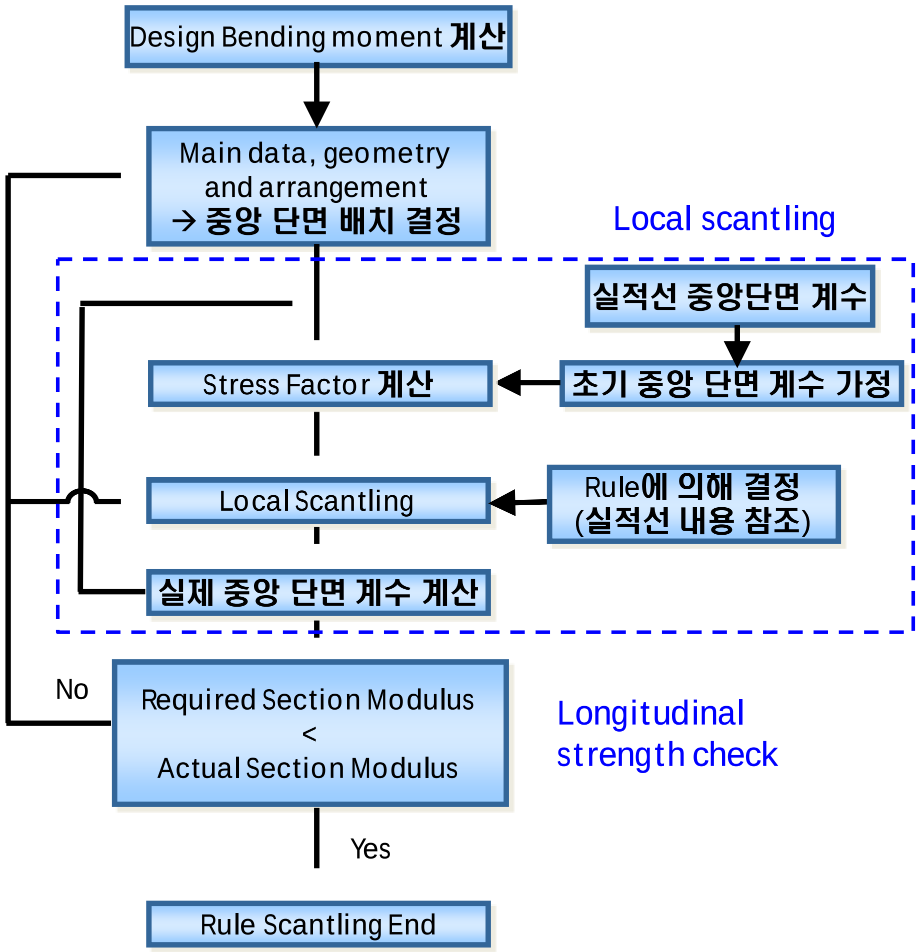
3) 형강재 단면 계수 및 단면 특성 Table

 # 이외의 자료 및 문제에 기재되지 않은 식에 대해서는 각자 알고 있어야 함.
혹시 위의 자료 중 배포되지 않은 자료가 있으면 시험감독에게 알릴 것.

준비물:

자, 계산기, 필기구

9. Rule Scantling



Local scantling을 통하여 부재들의 치수가 결정되고 따라서 중앙단면 계수가 결정된다. 하지만 Local scantling을 하기 위해서는 Stress factor를 알아야 하는데, Stress factor를 알려면 중앙단면 계수를 알아야 한다. 따라서 처음에는 기준선의 중앙단면 계수로 가정하여 Stress factor를 구한 뒤 iteration을 한다.

Given : 기준선 Midship Section 도면, DNV Rule 구조설계 부분

▶

[문제 9.1] 중앙단면에 작용하는 Total Bending Moment를 구하시오.

Total Bending Moment = SWBM + VWBM

이때, SWBM: Rule의 Minimum SWBM값 고려

VWBM: Rule의 추정식으로 구한 VWBM

※원래는 선박의 Loading condition 별로 계산한 SWBM값과 Rule의 값 중에서 큰 값을 이용해야 하나, 시간 관계상 Rule의 minimum 값을 이용하여 하는 것으로 한다.

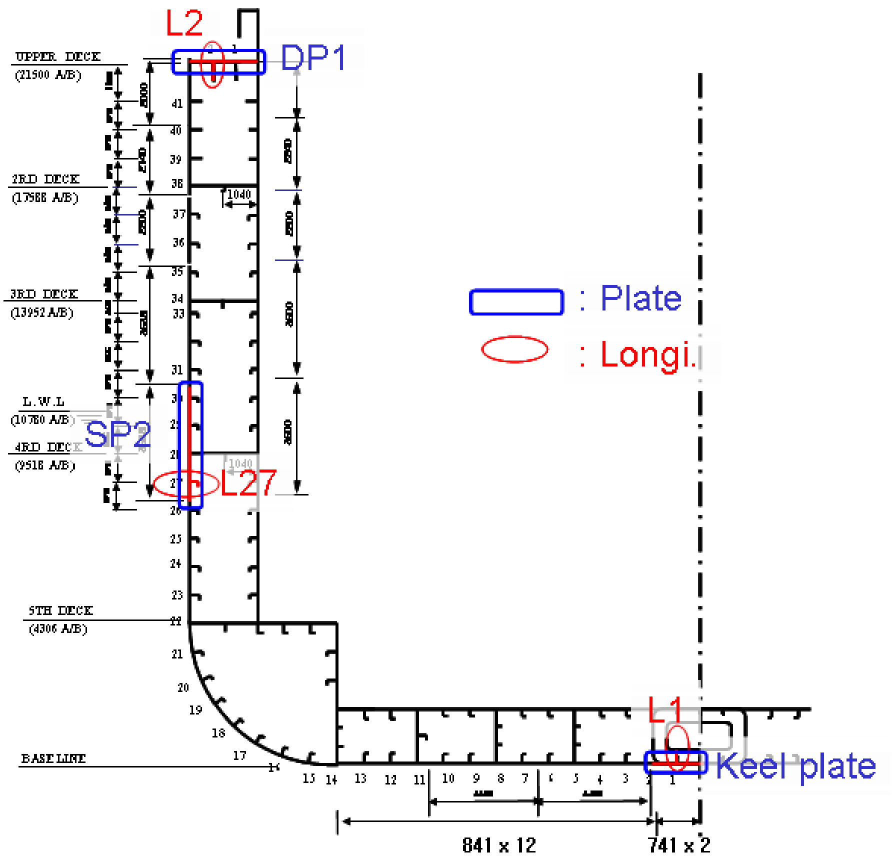
[문제 9.2] Local Scantling

제공되는 DNV Rule을 이용하여, Bottom, Side, Deck에 대해 각각 한 개의 Plate와 Longitudinal Stiffener에 대하여 Local Scantling을 수행하시오.

단 Stress factor를 기준선과 같다고 가정 하여 계산 할 것. (시간 관계상 iteration 생략)

기준선의 Stress factor : f_{2b}=1.030, f_{2d}=1.140

- Web Frame 간격 : 4 frame * 0.79 = 3.16 m
- Stiffener의 span결정 시, Bracket에 의한 span 감소효과를 200mm 고려할 것



[문제 9.3] $\sigma_{act.} < \sigma_l$ (σ_l :allowable stress)을 만족 하도록 부재의 치수를 결정 하시오.

2)번 문제에서 구한 부재를 추가하여, 전체 Midship Section에 대한 면적, 1차 모멘트, Neutral Axis, 2차 모멘트를 계산하고, 모든 부재에 대하여 $\sigma_{act.} < \sigma_l$ 를 만족하도록 부재의 치수를 결정하시오.

	면적 (cm^2)	1 차Moment[cm^3]	2 차 Moment[cm^4]
Total (단, 2번 문제의 부재들은 제외)	19,331	18,976,694	32,534,474,040

[9.Midship Section Rule Scantling 해답]

풀이1) 중앙단면에 작용하는 Total Bending Moment를 구하시오.

가) SWBM: Specification상의 설계선의 SWBM & Rule의 Minimum SWBM값 고려

Specification's Allowable SWBM : Hogging +310,000 T·M = 3,041,100 $kN{\cdot}m$

Sagging -25,000 T·M = -245,250 $kN{\cdot}m$

Rule's Minimum SWBM:

$$M_{SO} = C_{WU} L^2 B(0.1225 - 0.015 C_B)\ kNm \quad in \quad Hogging$$
$$= -0.065 C_{WU} L^2 B(C_B + 0.7)\ kNm \quad in \quad Sagging$$

($C_{WU} = C_W$ $for\ unrestricted\ \ service$)

L	C_W
$L \le 100$	$0.0792 \cdot L$
$100 < L < 300$	$10.75 - [(300 - L)/100]^{3/2}$
$300 \le L \le 350$	10.75
$L > 350$	$10.75 - [(L - 350)/150]^{3/2}$

여기서 Wave Coefficient, C_W 는 선박의 길이에 따라 정해지는 parameter이다.

구조 설계 시, 선박의 길이 L은 Rule Length로써, 0.97*LWL이다. 설계선의 경우, L=246.07 m 이다.

따라서, Wave Coefficient, C_W 는 $100 < L < 300$의 범위이며,

$$C_W = 10.75 - [(300 - L)/100]^{3/2}$$
$$= 10.75 - [(300 - 246.07)/100]^{3/2}$$
$$= 10.35$$

$$M_{SO\_hog} = C_{WU} L^2 B(0.1225 - 0.015 C_B)$$
$$= 10.35 \cdot 246.07^2 \cdot 32.2 \cdot (0.1225 - 0.015 \cdot 0.6645)$$
$$= 2{,}271{,}755\ \ kN \cdot m \quad in \quad Hogging$$
$$M_{SO\_sag} = -0.065 C_{WU} L^2 B(C_B + 0.7)$$
$$= -0.065 \cdot 10.35 \cdot 246.07^2 \cdot 32.2 \cdot (0.6645 + 0.7)$$
$$= -1{,}790{,}573\ \ kNm \quad in \quad Sagging$$

따라서, 구조 설계 시, Design SWBM: Hogging 2,271,755 $kN{\cdot}m$

Sagging -1,790,573 $kN{\cdot}m$

나) VWBM

$$M_{WO} = 0.19 \alpha C_W L^2 B C_B \quad kN \cdot m \quad in \quad Hogging$$
$$= -0.11 \alpha C_W L^2 B(C_B + 0.7) \quad kN \cdot m \quad in \quad Sagging$$

$$M_{WO\_hog} = 0.19\alpha C_W L^2 B C_B$$
$$= 0.19 \cdot 1.0 \cdot 10.35 \cdot 246.07^2 \cdot 32.22 \cdot 0.6645$$
$$= 2,548,999 \ \ kN \cdot m \ \ \ in \ \ Hogging$$

$$M_{WO\_sag} = -0.11\alpha C_W L^2 B (C_B + 0.7)$$
$$= -0.11 \cdot 1.0 \cdot 10.35 \cdot 246.07^2 \cdot 32.22 \cdot (0.6645 + 0.7)$$
$$= -3,030,201 \ \ kN \cdot m \ \ \ in \ \ Sagging$$

따라서, 구조설계 시, Design VWBM: Hogging 2,548,999 ***kN·m***
Sagging -3,030,201 ***kN·m***

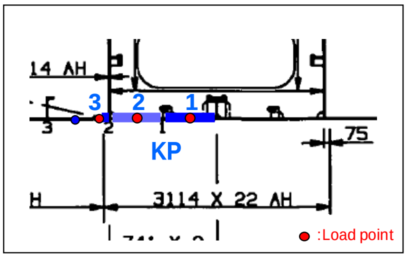
다) Total Moment

Total Moment = SWBM + VWBM= 2,271,755+ 2,548,999 = 4,820,775 ***kN·m*** in Hogging
=-1,790,573-3,030,201 = 4,820,775 ***kN·m*** in Sagging

따라서, Design Total moment = 4,820,775 ***kN·m*** 이다.

풀이2) Local Scantling

가) Keel Plate (KP)



✓ Keel plate는 3개의 Unit strip으로 구성

✓ Unit strip의 Load point:
1,2, : Midpoint
3: Midpoint와 가장 가까운 지점

✓ 3개의 Unit strip에 대해 각각 Plate 두께를 계산하고, 가장 큰 값을 Keel plate 의 두께로 사용한다.

✓KP의 Material은 기준선과 동일한 NV-32를 사용한다.(f_1=1.28)

✓ Design Load

DnV Rules, Jan. 2004,Pt.3 Ch.1 Sec.6 Table B1

Structure	Load Type	$p\ (kN/m^2)$
Outer bottom	Sea pressure	$p_1 = 10T + p_{dp}$

: Keel plate의 경우 Sea pressure만이 Design Load로 작용함

① Keel Plate의 Unit strip 1에 대한 Design Load, P

p1	pdp	pl	ks		2	0.2L~0.7L form A.P. ks=2
			Cw		10.343	100 < L < 300, 10.75 - [(300-L)/100]^(3/2)
			kf	f	6.7	f=waterline에서 선박 측면 상단의 수직거리 (최대 0.8*Cw)
					6.7	
					28.33795639	$p_l = (k_s C_W + k_f)(0.8 + 0.15V/\sqrt{L})$
		y			8.05	중심선으로부터 하중지점까지의 수평거리, 최소 B/4(m)=8.05
		z			0	선저(Baseline)으로부터 하중지점까지의 수직거리, 최대 T(m)
					23.355	$p_{dp} = p_l + 135\frac{y}{B+75} - 1.2(T-z)\ (kN/m^2)$
					149.355	$p_1 = 10T + p_{dp}$

Unit strip2, Unit strip3 도 동일한 Flow로 구함

Unit strip2 : p1 = 149.355(kN/m$^{2)}$

Unit strip3 : p1 = 149.355(kN/m$^{2)}$

②

✓ Required Thickness

$$t_1 = \frac{15.8 k_a s \sqrt{p}}{\sqrt{\sigma}} + t_k\ (mm)$$

✓ Allowable stress for Bottom Plate

$$\sigma = 120 f_1$$

Keel Plate의 Unit strip 1에 대한 Required Thickness

t1	p	147.48	Maximum Design Load
	ka	1.0	$k_a = (1.1 - 0.25 s/l)^2$, s/l= 0.4 이하 ka는 최대 1.0
	s	0.741	stiffener spacing in m
	f1	1.28	Material factor = 1.28 for NV-32
	σ	153.6	$\sigma = 120 f_1$
	tk	1.0	Corrosion addition
		12.49	$t_1 = \frac{15.8 k_a s \sqrt{p}}{\sqrt{\sigma}} + t_k\ (mm)$

Unit strip2, Unit strip3 도 동일한 Flow로 구함

Unit strip2 : t_1 = 12.49 (mm)

Unit strip3 : t_1 = 12.99(mm)

③

✓ Minimum Thickness

$$t_2 = 7.0 + \frac{0.05 L_1}{\sqrt{f_1}} + t_k\ (mm)$$

t_2	L1	246.22	Min (L, 300) (m)
	f1	1.28	Material factor = 1.28 for NV-32
	tk	1.0	Corrosion addition
		18.88	$t_2 = 7.0 + \frac{0.05 L_1}{\sqrt{f_1}} + t_k\ (mm)$

Unit strip 1,2,3에 모두 적용됨

cf) Minimum Breadth

$$b = 800 + 5L(mm)$$

b	Rule	2025.566	
	Arr.	3154	배치 상의 Keel plate 폭

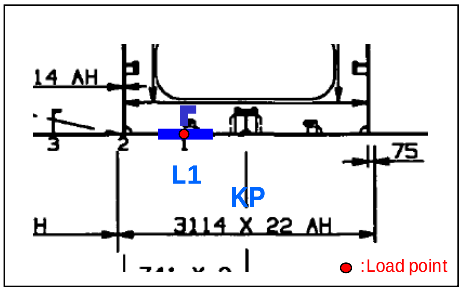
→ Rule을 만족함

④	$t = \max(t_1, t_2)\ [mm]$
Unit strip 1	18.88
Unit strip 2	18.88
Unit Strip 3	18.88

⑤ Unit strip의 두께 중 가장 큰 값을 Keel plate의 두께로 정함

$$t = 18.88 \approx 19.0\ [mm]$$

나) Longitudinals at Keel plate



✓Load point: Midpoint

✓L_1의 Material은 기준선과 동일한 NV-32를 사용한다.(f_1=1.28)

✓ Design Load

DnV Rules, Jan. 2004,Pt.3 Ch.1 Sec.6 Table B1

Structure	Load Type	$p\ (kN/m^2)$
Outer bottom	Sea pressure	$p_1 = 10T + p_{dp}$

: Keel plate의 경우 Sea pressure만이 Design Load로 작용함

①

L1 에 대한 Design Load P

p1	pdp	pl	ks		2	0.2L~0.7L form A.P. ks=2
			Cw		10.343	100 < L < 300, 10.75 - [(300-L)/100]^(3/2)
			kf	f	6.7	f=waterline에서 선박 측면 상단의 수직거리 (최대 0.8*Cw)
					6.7	
					28.33795639	$p_l = (k_s C_W + k_f)(0.8 + 0.15V/\sqrt{L})$
		y			8.05	중심선으로부터 하중지점까지의 수평거리, 최소 B/4(m)=8.05
		z			0	선저(Baseline)으로부터 하중지점까지의 수직거리, 최대 T(m)
					23.355	$p_{dp} = p_l + 135\frac{y}{B+75} - 1.2(T-z)\ (kN/m^2)$
					149.355	$p_1 = 10T + p_{dp}$

②

✓ Required Section Modulus

$$Z = \frac{83l^2 spw_k}{\sigma}\ (cm^3)$$

✓ Allowable stress

$$\sigma = 225 f_1 - 130 f_{2b} - 0.7\sigma_{db}$$

Z	le		2.96	Web frame 간격(3.16m) - 0.2 m(braket)
	s		0.741	stiffener spacing in m
	p		149.355	Maximum Design Load
	wk	tkw	1.0	Corrosion addition
		tkf	1.0	Corrosion addition
			1.15	$1 + 0.05(t_{kw} + t_{kf})$ for flanged section
	σ	f1	1.28	Material factor = 1.28 for NV-32
		f2b	1.04	3700TEU의 section Modulus로 구한 값임
		σdb	25.6	20f₁ in general
			134.88	$\sigma = 225 f_1 - 130 f_{2b} - 0.7\sigma_{db}$
	744.91			$Z = \frac{83l^2 spw_k}{\sigma}\ (cm^3)$

③

✓ Minimum Thickness of Web and Flange

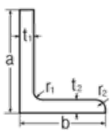
$$t_1 = 5.0 + \frac{k}{\sqrt{f_1}} + t_k\ (mm),\quad t_2 = \frac{h}{g} + t_k\ (mm)$$

t1	k	4.9022	0.02 L₁
	f1	1.28	Material factor = 1.28 for NV-32
	tk	1.0	Corrosion addition
	10.83		$t_1 = 5.0 + \frac{k}{\sqrt{f_1}} + t_k\ (mm)$
t2	h	400	Profile height in m
	g	70	70 for flanged profile webs
	tk	1.0	Corrosion addition
	7.21		$t_2 = \frac{h}{g} + t_k\ (mm)$

$$t = \max(t_1, t_2) = t_1$$

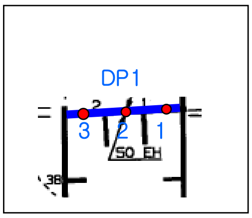
④ Required section modulus를 만족하는 Longi.를 Table 에서 찾아 Longi.의 치수 선정

"조선설계편람", 제 4판 (일본어), 일본관서조선협회, 1996



a	b	t₁	t₂	r₁	r₂	A	I	Z
mm						cm^2	cm^4	cm^3
400	100	11.5	16	24	12	61.09	34,200	1,120

다) Deck plate



● :Load point

DnV Rules, Jan. 2004,Pt.3 Ch.1 Sec.7 Table B1

Structure	Load Type	$p\ (kN/m^2)$
Weather deck	Sea pressure	$p_1 = a(p_{dp} - (4+0.2k_s)h_0)$

: DP1의 경우 Sea pressure만이 Design Load로 작용함

✓ DP1은 3개의 strip으로 구성

✓ Unit strip의 Load point:
1,2,3 : Midpoint

✓ 3개의 Unit strip에 대해 각각 Plate 두께를 계산하고, 가장 큰 값을 DP1의 두께로 사용한다.

✓DP1의 Material은 기준선과 동일한 NV-32를 사용한다.(f_1=1.28)

①

DP1의 Unit strip$_3$에 대한 Design Load P

p1	pdp	pl	ks		2	0.2L~0.7L form A.P. ks=2
			Cw		10.343	100 < L < 300, 10.75 - [(300-L)/100]^(3/2)
			kf	f	6.2	f = waterline에서 선박 측면 상단의 수직거리 (최대 0.8*Cw)
					12.5	
			28.33795639			$p_l = (k_s C_W + k_f)(0.8 + 0.15V/\sqrt{L})$
		y	15.825			중심선으로부터 하중지점까지의 수평거리, 최소 B/4(m) = 8.05
		z	12.6			선저(Baseline)으로부터 하중지점까지의 수직거리, 최대 T(m)
		48.267				$p_{dp} = p_l + 135\frac{y}{B+75} - 1.2(T-z)\ (kN/m^2)$
	a	0.8				FP, deckhouse front 앞쪽으로 0.15L: 1.0, 그 외 : 0.8
	h0	6.7				Waterline at T에서 deck까지의 수직 거리
	16.853					$p_1 = a(p_{dp} - (4+0.2k_s)h_0)$

②

✓ Required Thickness

$$t = \frac{15.8 k_a s \sqrt{p}}{\sqrt{\sigma}} + t_k\ (mm)$$

✓ Allowable stress for Side shell Plate

$$\sigma = 140 f_1$$ at N.A.

σshall be reduced linearly.

DP1의 Unit strip 3에 대한 Required Thickness

t1	p	16.853	Maximum Design Load
	ka	1.0	$k_a = (1.1 - 0.25s/l)^2$, s/l= 0.4 이하 ka는 최대 1.0
	s	0.765	= (0.69 + 0.84)/2, stiffener spacing in m
	f1	1.28	Material factor = 1.28 for NV-32
	sigma	153.6	120f1
	tk	3	Corrosion addition
	6.611		$t_1 = \frac{15.8 k_a s \sqrt{p}}{\sqrt{\sigma}} + t_k\ (mm)$

Unit strip1, 2도 동일한 Flow로 구함

Unit strip1 : t_1 = 6.45 (mm)

Unit strip2 : t_1 = 6.535 (mm)

③ ✓ Minimum Thickness

$$t = t_0 + \frac{kL_1}{\sqrt{f_1}} + t_k\ (mm)$$

t_2	t0	5.5	5.5 for unsheathed weather and cargo deck
	k	0.02	0.02 in vessels with single continuous deck
	L1	245.11	Min (L, 300) (m)
	f1	1.28	Material factor = 1.28 for NV-32
	tk	3	Corrosion addition
	12.883		$t = t_0 + \frac{kL_1}{\sqrt{f_1}} + t_k\ (mm)$

Unit strip 1,2에 모두 적용됨

cf) Minimum Breadth

$$b = 800 + 5L(mm)$$

b	Rule	2025.566	
	Arr.	3154	배치 상의 Keel plate 폭

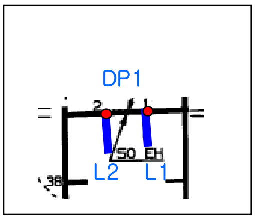
→ Rule을 만족함

④	$t_2 = \max(t_{2\_1}, t_{2\_2})\ \ [mm]$
Unit strip 1	12.883
Unit strip 2	12.883

⑤ Unit strip의 두께 중 가장 큰 값을 DP1의 두께로 정함

$$t_2 = 12.883 \approx 13.0$$

라) Longitudinals at Deck Stiffeners



● :Load point

✓Load point: Midpoint

✓L_1, L_2의 Material은 기준선과 동일한 NV-32를 사용한다.(f_1=1.28)

DnV Rules, Jan. 2004,Pt.3 Ch.1 Sec.7 Table B1

Structure	Load Type	$p\ (kN/m^2)$
Weather deck	Sea pressure	$p_1 = a(p_{dp} - (4+0.2k_s)h_0)$

: L_1, L_2의 경우 Sea pressure만이 Design Load로 작용함

① SP5의 L_2에 대한 Design Load P

p1	pdp	pl	ks	2	0.2L~0.7L form A.P. ks=2
			Cw	10.343	100 < L < 300, 10.75 - [(300-L)/100]^(3/2)
			kf (f)	6.7	f = waterline에서 선박 측면 상단의 수직거리 (최대 0.8*Cw)
			kf	6.7	
				28.33795639	$p_l = (k_s C_W + k_f)(0.8 + 0.15V/\sqrt{L})$
		y		15.55	중심선으로부터 하중지점까지의 수평거리, 최소 B/4(m) = 8.05
		z		12.6	선저(Baseline)으로부터 하중지점까지의 수직거리, 최대 T(m)
				47.921	$p_{dp} = p_l + 135\frac{y}{B+75} - 1.2(T-z)\ (kN/m^2)$
	a			0.8	FP, deckhouse front 앞쪽으로 0.15L: 1.0, 그 외 : 0.8
	h0			6.7	Waterline at T에서 deck까지의 수직 거리
				16.576	$p_1 = a(p_{dp} - (4+0.2k_s)h_0)$

② ✓ Required Section Modulus

$$Z = \frac{83 l^2 s p w_k}{\sigma}\ (cm^3)$$

✓ Allowable stress

$$\sigma = 225 f_1 - 130 f_{2d}\frac{z_n - z_a}{z_n}$$

Z	le		2.96	Web frame 간격(3.16m) - 0.2 m(braket)
	s		0.695	= (0.550 + 0.840) / 2, stiffener spacing in m
	p		16.576	Maximum Design Load
	wk	tkw	3	Corrosion addition
		tkf	3	Corrosion addition
			1.3	
	σ	f1	1.28	Material factor = 1.28 for NV-32
		f2d	1.19	3700TEU의 section Modulus로 구한 값임
		zn	10.272	=19.3 - 9.028, neutral axis부터 deck까지의 거리
		za	0	deck부터 load point까지의 거리
			150.383	
			72.422	$1 + 0.05(t_{kw} + t_{kf})$ for flanged section

③ ✓ Minimum Thickness of Web and Flange

$$t_1 = 5.0 + \frac{k}{\sqrt{f_1}} + t_k\ (mm),\quad t_2 = \frac{h}{g} + t_k\ (mm)$$

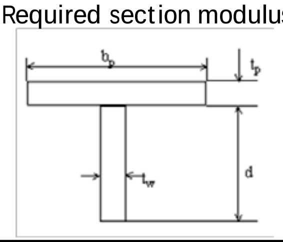
t1	k	4.9022	0.02 L_1
	f1	1.28	Material factor = 1.28 for NV-32
	tk	3	Corrosion addition
		12.33	$t_1 = 5.0 + \frac{k}{\sqrt{f_1}} + t_k\ (mm)$
t2_2	h	150	Profile height in m
	g	20	20 for plat bar profile
	tk	3	Corrosion addition
		10.5	$t_2 = \frac{h}{g} + t_k\ (mm)$

$$t = \max(t_1,\ t_2) = t_1$$

④ Required section modulus를 만족하는 Longi.를 Table 에서 찾아 Longi.의 치수 선정

"조선설계편람", 제 4판 (일본어), 일본관서조선협회, 1996

판을 포함한 소형 평강재의 단면계수[1)]



d \ tw		6	9	11	12.7	14
150	A	9	13.5	16.5	19.1	21
	Z	44.7	65.2	78.3	89.1	97.2
	I	614	856	1000	1120	1200

풀이3) σact.< σl (σl :allowable stress)을 만족 하도록 부재의 치수를 결정 하시오.

	면적 (cm^2)	1 차Moment[cm^3]	2 차 Moment[cm^3]
Total (단, 2번 문제의 부재들은 제외)	19,331	18,976,694	32,534,474,040

Localscantling 결과 구한 최소 부채 치수 및 1차, 2차 모멘트는 다음과 같다.

부재	면적[cm^2]	z좌표[cm]	1차 Moment[cm^3]	2차 Moment[cm^3]
Keel Plate	296	0	0	0
Longi. At KP	62	0	0	0
Deck Plate	270	1,930	521,872	1,007,212,960
Longi. At Deck	19	1,905	36,386	69,314,378
Side Plate	630	975	614,250	598,893,750
Longi. At SP	40	864	34,560	29,859,840

이로부터 중앙단면 전체의 면적, 1차, 2차 모멘트는 다음과 같다.

	면적 (cm^2)	1 차Moment[cm^3]	2 차 Moment[cm^3]
Total	20,648	20,183,762	34,239,754,968

N/A = 1차 모멘트 / 면적

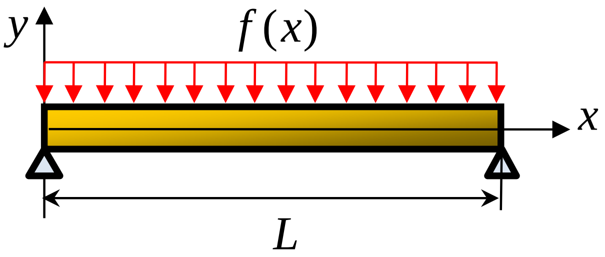
= 20,831,889/21,555 = 966.47 (cm^2)

이로부터 부재에 작용하는 actual stress를 구하면 다음과 같다.

부재	σ_actual	σ_allowable	만족 여부
Keel Plate	137.6	224	X
Longi. At KP	134.8	224	O
Deck Plate	134.1	224	X
Longi. At Deck	130.6	224	X
Side Plate	0.4	175	O
Longi. At SP	16.0	175	O

10. Beam Theory & Elasticity

[문제 10.1] 다음 그림과 같은 좌표계 에서, 보에 하중이 작용하고 있다. 보의 처짐 방정식은 $EIy'''' = -f(x)$ 로 주어질 때, 다음 질문에 답하여라.



질문(1) Boundary condition을 쓰시오.

질문(2) 보의 처짐 방정식과 Boundary condition을 이용하여, Deflection, Shear force, Bending moment를 구하고, 그래프로 나타내시오.

질문(3) $x = \frac{1}{4}L$ 인 지점에서 자유물체도를 표현하고, Shear force와 Bending moment를 구하시오.

질문(4) $x = \frac{1}{2}L$ 인 지점에서 자유물체도를 표현하고, Shear force와 Bending moment를 구하시오.

질문(5). 질문(3)과 (4)의 결과를 (2)의 값과 비교하시오. 이때, 각각 크기와 방향에 대해 의미를 서술하시오.

질문(6). Bending moment가 최대가 되는 지점을 찾고 왜 최대가 되는지 기하학적 의미를 설명 하시오.

[풀이 10.1]

풀이(1) Boundary condition을 쓰시오

① No displacement at x=0, $y(0)=0$

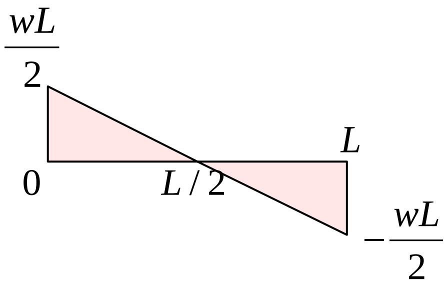
② No displacement at x=L, $y(L)=0$

③ No bending moment on x=0, $EIy''(0)=0$

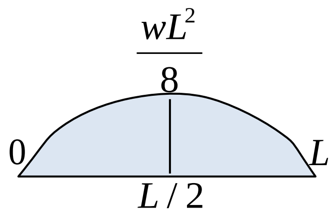
④ No bending moment on x=L, $EIy''(L)=0$

풀이(2) 보의 처짐 방정식과 Boundary condition을 이용하여, Deflection, Shear force, Bending moment를 구하고, 그래프로 나타내시오.

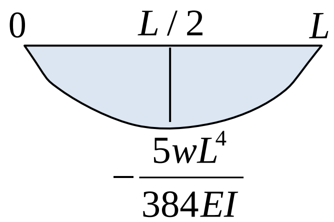
[풀이]



Shear Force, $V(x)=\frac{wL}{2}-wx$,



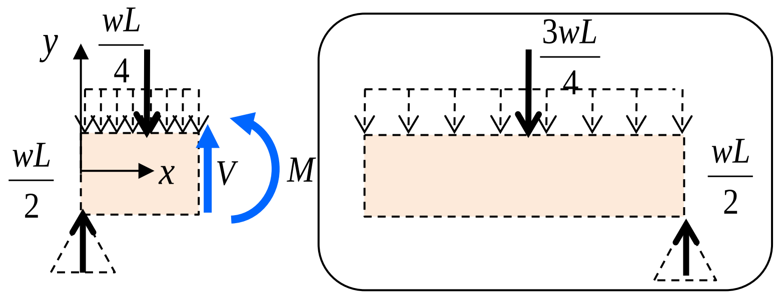
Bending Moment, $M(x)=\frac{wLx}{2}-\frac{wx^2}{2}$



Deflection, $y(x)=-\frac{wx}{24EI}(L^3-2Lx^2+x^3)$

풀이(3) $x=\frac{1}{4}L$ 인 지점에서 자유물체도를 표현하고, Shear force와 Bending moment를 구하시오.

at $x=\frac{L}{4}$



$$\sum F_y = V + \frac{wL}{2} - \frac{wL}{4} = 0$$

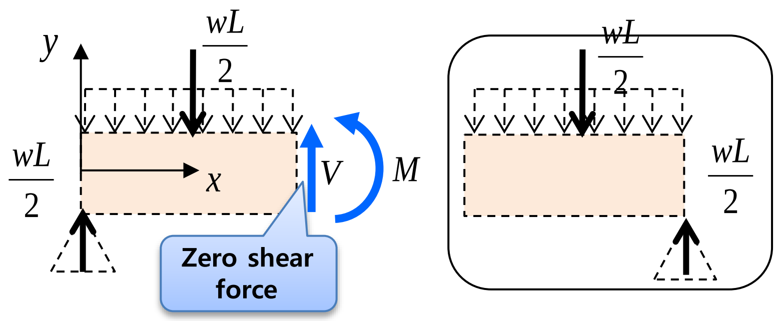
$$\therefore V = -\frac{wL}{4}$$

$$\sum M_{x=0} = M - \frac{L}{8}\times\frac{wL}{4} + \frac{L}{4}\times\frac{-wL}{4} = 0$$

$$\therefore M = \frac{3wL^2}{32}$$

풀이(4) $x=\frac{1}{2}L$ 인 지점에서 자유물체도를 표현하고, Shear force와 Bending moment를 구하시오.

at $x=\frac{L}{2}$



$$\sum F_y = V + \frac{wL}{2} - \frac{wL}{2} = 0$$

$$\therefore V = 0$$

$$\sum M_{x=0} = M - \frac{L}{4}\times\frac{wL}{2} = 0$$

$$\therefore M = \frac{wL^2}{8}$$

풀이(5). 질문(3)과 (4)의 결과를 (2)의 값과 비교하시오. 이때, 각각 크기와 방향에 대해 의미를 서술하시오.

$x = \frac{L}{4}$ 에서

	V(shear foece)	M(Bending Moment)
질문 2	$V(x) = \frac{wL}{2} - wx$ $\therefore V(\frac{L}{4}) = \frac{wL}{2} - w\frac{L}{4} = \frac{wL}{4}$	$M(x) = \frac{wLx}{2} - \frac{wx^2}{2}$ $\therefore M(\frac{L}{4}) = \frac{wL}{2} \times \frac{L}{4} - \frac{w}{2} \times \left(\frac{L}{4}\right)^2$
질문 3	$V = -\frac{wL}{4}$	$M = \frac{3wL^2}{32}$

$x = \frac{L}{2}$ 에서

	V(shear foece)	M(Bending Moment)
질문 2	$V(x) = \frac{wL}{2} - wx$ $\therefore V(\frac{L}{2}) = \frac{wL}{2} - w\frac{L}{2} = 0$	$M(x) = \frac{wLx}{2} - \frac{wx^2}{2}$ $\therefore M(\frac{L}{2}) = \frac{wL}{2} \times \frac{L}{2} - \frac{w}{2} \times \left(\frac{L}{2}\right)^2$
질문 4	$V = 0$	$M = \frac{wL^2}{8}$

값은 2 번의 풀이와 3,4 번의 풀이가 동일하다. 하지만 Shear Force 의 부호가 반대이다. 2 번의 풀이과정중에서 분포하중 w 를 아래 방향을 양(+)으로 설정하였기 때문에, 이런 결과가 유도된 것이며, 물리적 의미는 동일하다.

풀이(6). Bending moment가 최대가 되는 지점을 찾고 왜 최대가 되는지 기하학적 의미를 설명 하시오.

Bending Moment Curve 에서 보면 알 수 있듯이, $x = \frac{L}{2}$ 에서 Bending Moment 가 최대가 된다.

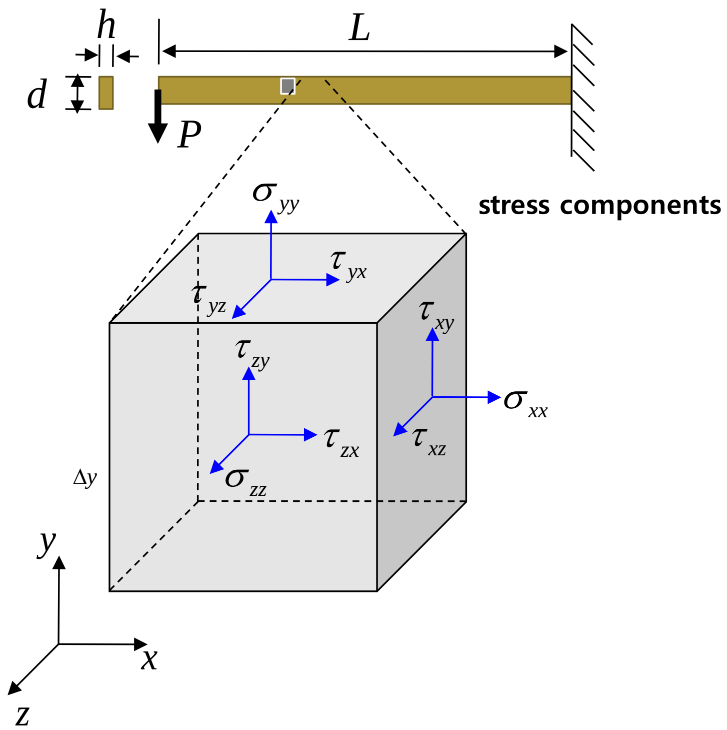
이는 보의 처짐에 관한 미분방정식의 유도과정을 살펴보면

$$\frac{M}{EI} = -\frac{1}{\rho}, (\kappa = \frac{1}{\rho} : \text{curvature})$$

Moment 는 곡률(curvature)에 비례함을 알 수 있으며, $x = \frac{L}{2}$ 에서 곡률이 최대가 되기 때문에,

Bending Moment 가 최대가 된다.

[문제 10.2] 다음과 같은 elastic body에 주어진 경계조건 하에서 하중이 작용할 때, Stress나 displacement를 구하고자 한다. 다음의 질문에 답하여라.



Displacement, strain, Stress 사이에는 다음과 같은 관계가 있다.

"Displacement"

u, v, w

"Strain"

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$

"Force (Stress)"

$\sigma_x, \tau_{yx}, \tau_{zx}, \tau_{xy}, \sigma_y, \tau_{zy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z$

1

6 Relations between
Strain and Displacement

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$
$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$
$$\gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

2

- **Generalized Hooke's Law**

6 Relations between
Strain and Stress

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)]$$
$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)]$$
$$\gamma_{xy} = \frac{2(\nu+1)}{E}\tau_{xy}$$
$$\gamma_{yz} = \frac{2(\nu+1)}{E}\tau_{yz}$$
$$\gamma_{zx} = \frac{2(\nu+1)}{E}\tau_{zx}$$

3

- **Newton-Euler Equations**

6 Equations of force and moment equilibrium

$$\sum F_x = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0$$
$$\sum F_y = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0$$
$$\sum F_z = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0$$
$$\sum M_x = \tau_{yz} - \tau_{zy} = 0$$
$$\sum M_y = \tau_{xz} - \tau_{zx} = 0$$
$$\sum M_z = \tau_{xy} - \tau_{yx} = 0$$

$$\frac{2(\nu+1)}{E} = \frac{1}{G}$$

ν : Poisson's Ratio
G : Shear Modulus
E : Young's Modulus

질문(1) 위의 18개 방정식(Force Equilibrium, Strain-Displacement 관계식, Strain-Stress 관계식)을 이용하여, 다음의 Displacement 관계식을 유도 하는 과정을 설명 하시오. (직접 유도 하는 것이 아니라 과정을 간략히 설명)

Given : Body force X, Y, Z
Find : Displacement u, v, w

$$(\lambda+G)\frac{\partial e}{\partial x}+G\nabla^2 u+X=0$$
$$(\lambda+G)\frac{\partial e}{\partial y}+G\nabla^2 v+Y=0$$
$$(\lambda+G)\frac{\partial e}{\partial z}+G\nabla^2 w+Z=0$$

3 Variables
3 Equations

X, Y, Z : bodyforce in x,y, and z direction repectively

$e=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$ | G : Shear Moldulus

[풀이]

$$(\lambda+G)\frac{\partial e}{\partial x}+G\nabla^2 u+X=0$$
$$(\lambda+G)\frac{\partial e}{\partial y}+G\nabla^2 v+Y=0$$
$$(\lambda+G)\frac{\partial e}{\partial z}+G\nabla^2 w+Z=0$$

3 Variables
3 Equations

18 Equations

6 Equations of force equilibrium

$$\sum F_x=\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+X=0 \qquad \sum M_x=\tau_{yz}-\tau_{zy}=0$$
$$\sum F_y=\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}+Y=0 \qquad \sum M_y=\tau_{xz}-\tau_{zx}=0$$
$$\sum F_z=\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+Z=0 \qquad \sum M_z=\tau_{xy}-\tau_{yx}=0$$

6 Relations btw. Strain and Displacement

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z},$$
$$\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x},\quad \gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y},\quad \gamma_{zx}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}$$

6 Relations btw. 6 Strain and 6 Stress

$$\sigma_x=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}e+\frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_x \qquad ,\tau_{xy}=\frac{E}{2(\nu+1)}\gamma_{xy}$$
$$\sigma_y=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}e+\frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_y \qquad ,\tau_{yz}=\frac{E}{2(\nu+1)}\gamma_{yz}$$
$$\sigma_z=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}e+\frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_z \qquad ,\tau_{zx}=\frac{E}{2(\nu+1)}\gamma_{zx}$$
$$,e=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$$

① 주어진 displacement u, v, w를 Strain-Displacement 관계식에 대입하여, Strain $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})$ 을 알 수 있으며,

② 위의 ①에서 얻은 Strain을 Strain-Stress식에 대입하여, Stress $(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$를 구할 수 있다

③ 위의 ②에서 구한 Stress를 Stress-Force 관계식에 대입하여 최종식을 유도할 수 있다.

질문(2) 2차원 문제로 가정하면, 위의 18개 방정식을 다음과 같이 바꾸어 쓸 수 있다. 2차원에서 Stress의 관계식을 유도 하기 위해서 Compatibility equation을 도입해야 하는 이유를 설명하고, Strain 관계식을 이용하여 compatibility equation을 유도 하시오.

<3-D problem>

6 Equations of force equilibrium

$$\sum F_x = \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \qquad \sum M_x = \tau_{yz} - \tau_{zy} = 0$$

$$\sum F_y = \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \qquad \sum M_y = \tau_{xz} - \tau_{zx} = 0$$

$$\sum F_z = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \qquad \sum M_z = \tau_{xy} - \tau_{yx} = 0$$

6 Relations btw. Strain and Displacement

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

6 Relations btw. 6 Strain and 6 Stress

$$\sigma_x = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e + \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_x \qquad , \tau_{xy} = \frac{E}{2(\nu+1)} \gamma_{xy}$$

$$\sigma_y = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e + \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_y \qquad , \tau_{yz} = \frac{E}{2(\nu+1)} \gamma_{yz}$$

$$\sigma_z = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} e + \frac{E}{(1+\nu)} \varepsilon_z \qquad , \tau_{zx} = \frac{E}{2(\nu+1)} \gamma_{zx}$$

<2-D problem>

(without gravitational force)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

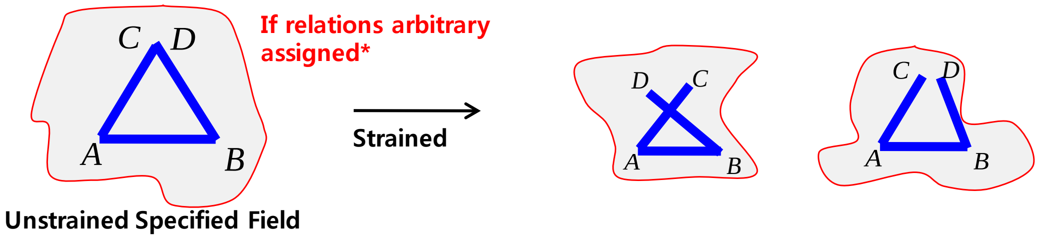
$$\varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

[풀이]

2차원 문제에서 우리가 찾고자 하는 변수는 u, v 2개인데, 주어진 식은 3개가 주어져 있다.
따라서 미지수의 개수보다, 방정식의 개수가 많은 불능방정식이며, 이는 정확한 해를 구할 수 없음을 의미한다.
따라서, 하나의 추가적인 Strain-displacement조건(방정식)이 반드시 필요하게 된다.
(For 6 relations between 3 strain and 2 displacement :
These equations maybe regarded as a system of P.D.E of u, v when strain components are given functions of x, y
There must be some conditions to be imposed on the strain components in order that these 3 equations will give a set of ‘single-valued continuous’ solutions for the 2 displacement components)



Strain-displacement관계식은 다음과 같다.

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

양변을 x,y에 대하여 편미분 하면($\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$)

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

u, v, w가 single-value continuous인 관계를 이용하면 ($\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$)

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial v}{\partial y}$$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x, \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y$ 이므로

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}$$

질문(3) 위의 질문(2)에서 유도한 Compatibility equation과 stress-strain 관계식, 그리고 다음을 만족하는 Stress function을 도입하여, Bihamonic function을 유도 하시오.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 y}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 x}, \quad \tau_{yx} = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}$$

$$\boxed{\nabla^4 \psi = 0}$$

Biharmonic Equation

$\nabla^4 = (\nabla^2)^2$

[풀이]

Compatibility Equation은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}, \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

Compatibility Equation중에서, 2차원 문제이므로 $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ 이다.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \qquad 2\cancel{\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}}\right)$$

$$\cancel{\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2}} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \qquad 2\cancel{\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \cancel{\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}}\right) \qquad \because \frac{\partial}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \cancel{\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2}} = \cancel{\frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}} \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \cancel{\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}}\right)$$

2차원 문제이므로 $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ 이다.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} &\quad& 2\cancel{\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z}}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\cancel{\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}}+\cancel{\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}}+\cancel{\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}}\right) \\
&\cancel{\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2}}+\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2}=\cancel{\frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z}} && 2\cancel{\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z\partial x}}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\cancel{\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}}-\cancel{\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}}+\cancel{\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}}\right)\ \because \gamma_{xz}=\gamma_{yz}=0 \\
&\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2}+\cancel{\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2}}=\cancel{\frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial z\partial x}} && 2\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\cancel{\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}}+\cancel{\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}}-\cancel{\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}}\right)
\end{aligned}
$$

2차원 문제이므로 $\varepsilon_z = 0$ 이다.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y} &\quad& 2\cancel{\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z}}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\cancel{\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}}+\cancel{\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}}+\cancel{\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}}\right) \\
&\cancel{\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2}}+\cancel{\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2}}=\cancel{\frac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z}} && 2\cancel{\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z\partial x}}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\cancel{\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}}-\cancel{\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}}+\cancel{\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}}\right)\qquad \because \varepsilon_z=0 \\
&\cancel{\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2}}+\cancel{\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2}}=\cancel{\frac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial z\partial x}} && 2\cancel{\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\partial y}}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\cancel{\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}}+\cancel{\frac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}}-\cancel{\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}}\right)
\end{aligned}
$$

최종적으로 Compatibility Equation은 아래 식만 남게 된다.

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}$$

2차원 문제에서 Strain-Stress 관계식은 다음과 같다.

$$\varepsilon_x=\frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_x-\nu\sigma_y]$$

$$\varepsilon_y=\frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_y-\nu\sigma_x]$$

$$\gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G}$$

위 식을 Compatibility Equation에 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_x-\nu\sigma_y]+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{1+\nu}{E}[(1-\nu)\sigma_y-\nu\sigma_x]=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\tau_{xy}}{G}\right)$$

$$\frac{1+\nu}{E}\left\{\frac{\partial^2}{\partial y^2}[(1-\nu)\sigma_x-\nu\sigma_y]+\frac{\partial^2}{\partial x^2}[(1-\nu)\sigma_y-\nu\sigma_x]\right\}=\frac{2(1+\nu)}{E}\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}[(1-\nu)\sigma_x-\nu\sigma_y]+\frac{\partial^2}{\partial x^2}[(1-\nu)\sigma_y-\nu\sigma_x]=2\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}$$

$$(1-\nu)\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}-\nu\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}+(1-\nu)\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2}-\nu\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}=2\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}$$

$$(1-\nu)\left(\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2}\right)-\nu\left(\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}\right)=2\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}$$

Stress function $\psi(x,y)$을 도입하여 정리하면 ($\sigma_x=\frac{\partial^2\psi}{\partial^2 y}$, $\sigma_y=\frac{\partial^2\psi}{\partial^2 x}$, $\tau_{yx}=-\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}$)

$$(1-\nu)\left(\frac{\partial^4\psi}{\partial y^4}+\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4}\right)-\nu\left(\frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\psi}{\partial y^2\partial x^2}\right)=-2\frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\partial y^2}$$

$$(1-\nu)\left(\frac{\partial^4\psi}{\partial y^4}+\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4}\right)-\nu\left(2\frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\partial y^2}\right)+\left(2\frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\partial y^2}\right)=0$$

$$(1-\nu)\left(\frac{\partial^4\psi}{\partial y^4}+\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4}\right)+(1-\nu)\left(2\frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\partial y^2}\right)=0$$

$$(1-\nu)\left(\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\psi}{\partial y^4}\right)=0$$

ν는 Poisson's ratio이므로, 양변에 나누어 주면

$$\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\psi}{\partial y^4}=0$$

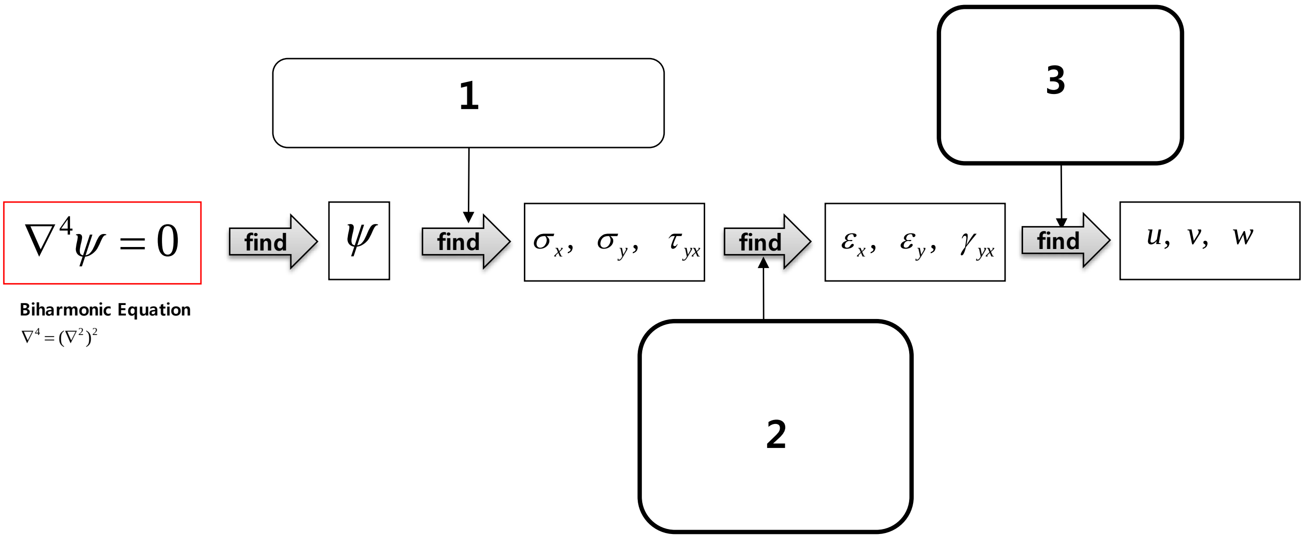
Harmonic Operator (or Laplace)를 통해 나타내면 ($\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2=(\nabla^2)^2$)

$$\boxed{\nabla^4\psi=0}$$

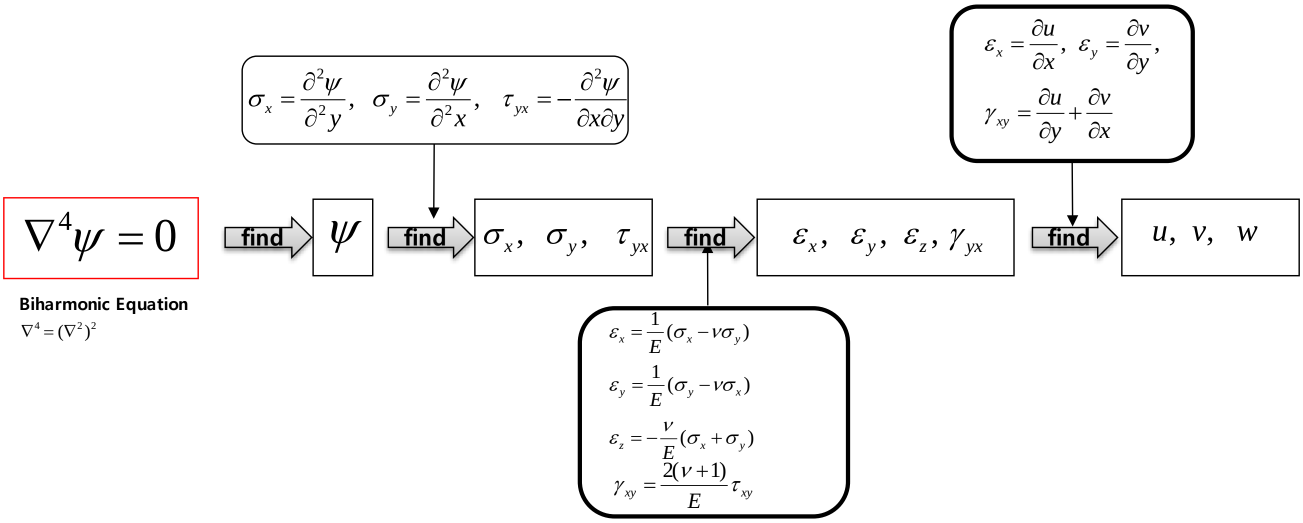
Biharmonic Equation

$\nabla^4=(\nabla^2)^2$

질문(4) Bihamonic functio을 풀어서 ψ를 구하면, 위에서 구했던 관계식들을 이용하여 다음과 같이 변위를 구할 수 있다. 다음의 1,2,3에 들어갈 관계식을 쓰시오.

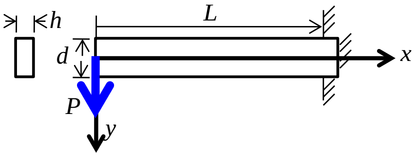


[풀이]



[문제 10.3] 문제 10.2 에서 설명한 방법을 다음 문제에 적용하면 x 방향 displacement u 와 y 방향 displacement v 를 구할 수 있다. 같은 문제에 대하여 보이론을 적용하여 문제를 풀고, 다음의 결과와 비교하시오. 만약 결과가 다르다면 그 이유를 설명 하시오.

Bending of a Narrow Cantilever of Rectangular Cross Section under an End Load



A cantilever beam of narrow rectangular cross section under an end load P .
With its width h **small compared with the depth** d **, the loaded beam may be regarded with as an <u>example in plane stress</u>**

Boundary condition : shearing force at $x=0$ **is equal to** P

If P **is large compared with** ρg**, the gravitational force can be neglected**

$$\sigma_x = -\frac{Pxy}{I}, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{xy} = \frac{I}{2}P\left(y^2 - \frac{1}{4}d^2\right)$$

$$\varepsilon_x = -\frac{Pxy}{EI}, \quad \varepsilon_y = \frac{\nu Pxy}{EI}, \quad \gamma_{xy} = \frac{P(1+\nu)}{EI}\left(y^2 - \frac{d^2}{4}\right)$$

$$u = -\frac{P}{2EI}x^2 y + \frac{P}{3EI}\left(1+\frac{\nu}{2}\right)y^3 + \frac{P}{2EI}\left[L^3 - (1+\nu)\frac{d^2}{2}\right]y$$

$$v = \frac{\nu P}{2EI}xy^2 + \frac{P}{6EI}x^3 - \frac{PL^2}{2EI}x + \frac{PL^3}{3EI}$$

Boundary Condition	
No bending moment at x=0	$\rightarrow EI\nu''(0) = 0$
Shear force P at x=0	$\rightarrow EI\nu'''(0) = P$
No displacement at x=0	$\rightarrow \nu(L) = 0$
No slope at x=0	$\rightarrow \nu'(L) = 0,$

[풀이]

보이론을 이용한 풀이

Differential equations of deflection curves는 다음과 같다.

$$EI\frac{d^4v(x)}{dx^4}=0$$

4번 적분하여 정리하면 다음과 같다.

$$v'''(x)=\frac{1}{EI}c_1$$

$$v''(x)=c_2+\frac{1}{EI}c_1x$$

$$v'(x)=c_3+c_2x+\frac{1}{2EI}c_1x^2$$

$$v(x)=c_4+c_3x+\frac{1}{2}c_2x^2+\frac{1}{6EI}c_1x^3$$

1,2,3,4번 Boundary condition을 적용하면

① $y''(0)=c_2$

$0=c_2$

$\therefore c_2=0$

② $EIy'''(0)=c_1$

$P=c_1$

$\therefore c_1=P$

④ $y'(L)=\frac{PL^2}{2EI}+c_3$

$0=\frac{PL^2}{2EI}+c_3$

$\therefore c_3=-\frac{PL^2}{2EI}$

③ $c_4-\frac{PL^3}{2EI}+\frac{PL^3}{6}=0$

$\therefore c_4=\frac{PL^3}{3}$

위에서 구한 계수를 대입하여 정리하면 다음과 같다.

$$\therefore y(x)=\frac{1}{6EI}Px^3-\frac{1}{2EI}PL^2x-\frac{1}{3EI}PL^3$$

Elasticity을 통해 구한 해와 비교

Elasticity을 통해 구한 해는 다음과 같다.

$$v = \frac{\nu P}{2EI} xy^2 + \frac{P}{6EI} x^3 - \frac{PL^2}{2EI} x + \frac{PL^3}{3EI}$$

이 식에 y=0을 대입하면 동일한 식이 유도됨을 알 수 있다.

이는 x방향에 따른 처짐량 뿐 아니라 y방향의 위치에 따른 처짐량도 계산할 수 있음을 알수있다.

또한 아래 식을 Elasticity을 통해 구한 것을 알 수 있는데,

$$u = -\frac{P}{2EI} x^2 y + \frac{P}{3EI} (1 + \frac{\nu}{2}) y^3 + \frac{P}{2EI} [L^3 - (1+\nu) \frac{d^2}{2}]$$

이는 y방향으로의 변위와 더불어, x방향으로의 변위 또한 계산할 수 있음을 알 수 있다.

11. Integral Equation

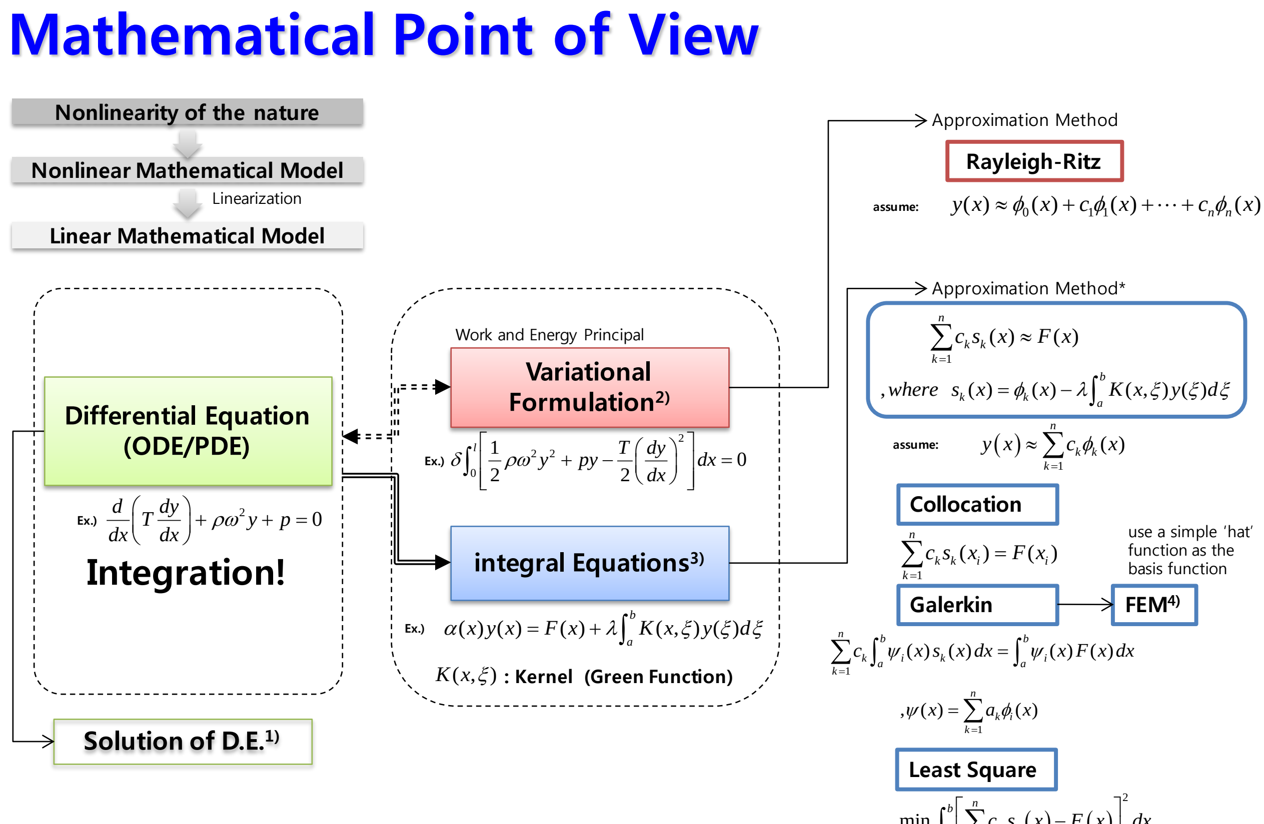
[문제11. 1] 다음의 미분방정식의 Exact solution을 구하시오.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2y = 0$$

$$y(0) = 0,\ y(1) = 1$$

[문제 11.2] 다음의 설명을 참고하여 문제 11.1의 미분방정식을 적분방정식 형태로 변환 하시오.

-------------------------------문제11.2 설명 시작--------------------------------



1)-Kreyszig E., Advanced Engineering Mathematics, 9th edition, Willey, 2006,
-Zill, D.G., Cullen, M.R., Advanced Engineering Mathematics, 3rd Edition, Jones and Bartlett, 2006
2)-Hildebrand,F.B., "Methods of Applied Mathematics", 2nd edition, Dover, 1965, Chapter Two
-Lanczos, C., The Variational Principles of Mechanics, 4th Edition, 1970, Dover Chapter II.
3) -Hildebrand,F.B., "Methods of Applied Mathematics", 2nd edition, Dover, 1965, Chapter Three
4) - Becker, E.B., Finite Elements An Introduction, Volume I, Prentice-Hall, 1981, Chapter 1

* some books refer as 'Method of Weighted Residue' from the Finite Element Equation point of view and they have different type depending on how to choose the weight functions. See also Fletcher,C.A.J., "Computational Galerkin Methods", Springer, 1984

An integral equation is an equation in which a function to be determined appears under an *integral sign*

Differential Equation ⇨ **integral Equations**

'Fredholm equation' $\alpha(x)y(x) = F(x) + \lambda\int_a^b K(x,\xi)y(\xi)d\xi$

'Volterra equation' $\alpha(x)y(x) = F(x) + \lambda\int_a^x K(x,\xi)y(\xi)d\xi,$

How can you transform a D.E. into an integral equation?

함수 $I_n(x)$는 다음과 같이 정의된다.

$$I_n(x) = \int_a^x (x-\xi)^{n-1} f(\xi)d\xi$$

아래와 같은 미분 관계식이 있다면,

$$\frac{d}{dx}\int_{A(x)}^{B(x)} F(x,\xi)d\xi = \int_{A(x)}^{B(x)} \frac{\partial F(x,\xi)}{\partial x}d\xi + F[x,B(x)]\frac{dB}{dx} - F[x,A(x)]\frac{dA}{dx} \quad ...(1)$$

위와 같은 공식(1)을 이용하면, 함수 $I_n(x)$의 n번 미분은 다음과 같은 공식으로 정의할 수 있다.

$$\boxed{\int_a^x\int_a^{x_n}\cdots\int_a^{x_3}\int_a^{x_2}\boxed{f(x_1)}dx_1dx_2\cdots dx_{n-1}dx_n} = \boxed{\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-\xi)^{n-1} f(\xi)d\xi}$$

1) if you have a function f

2) and integrate it n times

3) you have this

아래와 같은 예를 생각해 보자.

Example : Boundary Value Problem

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{d^2y}{dx^2}+\lambda y=0,\\ y(0)=0,\ y(l)=0\end{array}\right\}\cdots(18)$$

We obtain after a first integration over $(0,x)$ the relation

$$\frac{dy}{dx}=-\lambda\int_0^x y(x_1)dx_1+C$$

A second integration over $(0,x)$ then leads to the relation

$$y(x)=-\lambda\int_0^x (x-\xi)y(\xi)d\xi+Cx$$

By using boundary condition $y(l)=0$

$$\lambda\int_0^l (l-\xi)y(\xi)d\xi=Cl \qquad \therefore C=\frac{\lambda}{l}\int_0^l (l-\xi)y(\xi)d\xi$$

$$y(x)=-\lambda\int_0^x (x-\xi)y(\xi)d\xi+\frac{\lambda x}{l}\int_0^x (l-\xi)y(\xi)d\xi$$

or $$y(x)=\lambda\int_0^x \frac{\xi}{l}(l-x)y(\xi)d\xi+\lambda\int_x^l \frac{x}{l}(l-\xi)y(\xi)d\xi \ \cdots(22)$$

With abbreviation

$$K(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{\xi}{l}(l-x) & when\ \ \xi<x\\ \dfrac{x}{l}(l-\xi) & when\ \ \xi>x\end{cases}\cdots(23)$$

Equation becomes

$$y(x)=\lambda\int_0^l K(x,\xi)y(\xi)d\xi \ \ldots(24)$$ *'Fredholm equation of the second kind'*

$$\frac{d}{dx}\int_{A(x)}^{B(x)}F(x,\xi)d\xi=\int_{A(x)}^{B(x)}\frac{\partial F(x,\xi)}{\partial x}d\xi+F[x,B(x)]\frac{dB}{dx}-F[x,A(x)]\frac{dA}{dx}\quad\cdots(5)$$

To recover (18) from (24), we differentiate the equal members of (22), making use of (5), as follows:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}&=\frac{\lambda}{l}\left[-\int_0^x \xi y(\xi)\,d\xi+x(l-x)y(x)+\int_x^l (l-\xi)y(\xi)d\xi-x(l-x)y(x)\right]\\ &=\frac{\lambda}{l}\left[-\int_0^x \xi y(\xi)d\xi+\int_x^l (l-\xi)y(\xi)d\xi\right]\end{aligned}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\lambda}{l}\left[-x\,y(x)-(l-x)\,y(x)\right]=-\lambda\,y(x)$$

---------------------------------문제 2 설명 끝----------------------------------

다음에 나오는 설명을 잘 읽고 문제2에서 구한 적분 방정식의 해를 구하여, 문제1의 결과와 비교 하시오.

[문제11.3] Collocation 방법을 사용하여 적분 방정식의 해를 구하시오.

[문제11.4] Galerkin 방법을 사용하여 적분 방정식의 해를 구하시오.

(approximated solution은 3개의 항까지 고려하고, basis function으로 $1, x, x^2$ 를 이용하시오.)

------------------------------문제 11.3, 11.4 설명 시작---------------------------

Approximation Methods of Undetermined Coefficients

Numerical methods for obtaining approximate solutions of integral equations also generally consist of reducing the problem to the consideration of a finite set of algebraic equations.

$$y(x) = F(x) + \lambda \int_a^b K(x,\xi)\, y(\xi)\, d\xi$$

The solution of the equation may be approximated by linear combination of *n* suitably chosen functions $\phi_1(x), \phi_2(x), \cdots, \phi_n(x)$ **of the form**

$$y(x) \approx \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k(x)$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k(x) \approx F(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} \int_a^b K(x,\xi) c_k \phi_k(x)\, d\xi$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k(x) \approx F(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k \int_a^b K(x,\xi) \phi_k(x)\, d\xi$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k(x) \approx F(x) + \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k \Phi_k(x) \quad , \text{where } \Phi_k(x) = \int_a^b K(x,\xi)\, \phi_k(\xi)\, d\xi$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \left[\phi_k(x) - \lambda \Phi_k(x)\right] \approx F(x)$$

Assume : $\phi_k(x)$

Given : $\lambda,\ K, F(x)$

Find : $c_k \Rightarrow y(x) \approx \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k(x)$ (approximated solution)

Approximation Methods of Undetermined Coefficients

Numerical methods for obtaining approximate solutions of integral equations also generally consist of reducing the problem to the consideration of a finite set of algebraic equations.

$$y(x) = F(x) + \lambda \int_a^b K(x,\xi)\, y(\xi)\, d\xi$$

$$y(x) \approx \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \left[\phi_k(x) - \lambda \Phi_k(x)\right] \approx F(x) \quad ,where\ \ \Phi_k(x) = \int_a^b K(x,\xi)\, \phi_k(\xi)\, d\xi$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} c_k s_k(x) \approx F(x)} \quad ,where\ \ s_k(x) = \phi_k(x) - \lambda \Phi_k(x)$$

Assume : $\phi_k(x)$

Given : $\lambda,\ K, F(x)$

approximated solution

Find : c_k $\Rightarrow$ $y(x) \approx \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k(x)$

How to find c_k **?**

문제 11.3 의 수식

Collocation Method

$$\sum_{k=1}^{n} c_k s_k(x_i) = F(x_i) \ ,(i = 1, 2, \cdots, n)$$

requiring an equality at n distinct points

문제 11.4의 수식

Galerkin Method (weighting function method)

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \int_a^b \psi_i(x)\, s_k(x)\, dx = \int_a^b \psi_i(x)\, F(x)\, dx \ ,(i = 1, 2, \cdots, n)$$

requiring that the integrals of the weighted members be equal

it is often convenient to identify the weighting functions $\psi_i(x)$ **with the approximating functions** $\phi_i(x)$

$i.e)\ \ \psi_i(x) = \alpha_i\, \phi_i(x)$

Least Square method

$$\min \int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} c_k\, s_k(x) - F(x)\right]^2 dx$$

requiring that the integral of the square of the difference between the two members be as small as possible

Finite Element Method

Galerkin Method with $\psi(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_i(x)$

------------------------------문제 3,4 설명 끝-----------------------------------

[문제 11.1 해답]

$y = e^{\lambda x}$ 로 가정하면,

$\lambda^2 + 2 = 0$

$\lambda = \sqrt{2}i, \lambda = -\sqrt{2}i$

$y = c_1 \cos\sqrt{2}x + c_2 \sin\sqrt{2}x$

Boundary condition을 대입하면,

$$y(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0)$$
$$= c_1 = 0$$
$$y(1) = c_2 \sin\sqrt{2}$$
$$\frac{1}{\sin\sqrt{2}} = c_2$$
$$\therefore c_1 = 0, c_2 = \frac{1}{\sin\sqrt{2}}$$

$$\therefore y = \frac{\sin x}{\sin\sqrt{2}}$$

-----------------------------문제11.1 해답 끝 -------------------------------------

[문제 11.2 해답]

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2y = 0$$

We obtain after a first Integration over the interval $(0,x)$ the relation

$$\frac{dy}{dx} = -2\int_0^x y(x_1)dx_1 + C$$

A second integration over $(0,x)$ then leads to the relation

$$y(x) = -2\int_0^x (x-\xi)y(\xi)d\xi + Cx$$

By using boundary condition $y(1) = 1,$

$$1 = -2\int_0^1 (1-\xi)y(\xi)d\xi + C \cdot 1$$

$$\therefore C = 1 + 2\int_0^1 (1-\xi)y(\xi)d\xi$$

$$y(x) = -2\int_0^x (x-\xi)y(\xi)d\xi + x + 2x\int_0^1 (1-\xi)y(\xi)d\xi$$

$$y(x) = -2\int_0^x (x-\xi)y(\xi)d\xi + x + 2x\int_0^x (1-\xi)y(\xi)d\xi + 2x\int_x^1 (1-\xi)y(\xi)d\xi$$

$$y(x) = x + 2\int_0^x \xi(1-x)y(\xi)d\xi + 2\int_x^1 x(1-\xi)y(\xi)d\xi$$

With abbreviation

$$K(x,\xi) = \begin{cases} \xi(1-x) & \text{when } \xi < x \\ x(1-\xi) & \text{when } \xi > x \end{cases}$$

Equation becomes

$$y(x) = x + 2\int_0^l K(x,\xi)y(\xi)d\xi \quad \text{'Fredholm equation of the second kind'}$$

--------------------------------문제11.2 해답 끝 -----------------------------------

[문제 11.3 해답]

$$y(x) = x + \int_0^l K(x,\xi)y(\xi)d\xi \quad \text{'Fredholm equation of the second kind'}$$

Where

$$K(x,\xi) = \begin{cases} \xi(1-x) & \text{when } \xi < x \\ x(1-\xi) & \text{when } \xi > x \end{cases}$$

$y \approx \sum_{k=1}^{3} c_k\phi_k$ 이라 가정하여, $,(\phi_1 = 1, \phi_2 = x, \phi_3 = x^2)$ 적분 방정식에 대입하면,

$$\sum_{k=1}^{3} c_k\phi_k = x + 2\sum_{k=1}^{3} \int_0^l K(x,\xi)\ c_k\phi_k\ d\xi$$

$$\sum_{k=1}^{3} c_k\phi_k = x + 2\sum_{k=1}^{3} c_k \int_0^l K(x,\xi)\ \phi_k\ d\xi$$

$$\sum_{k=1}^{3} c_k\phi_k = x + 2\sum_{k=1}^{3} c_k\Phi_k(x) \quad ,(\Phi_k = \int_0^l K(x,\xi)\ \phi_k\ d\xi)$$

$$\therefore x = \sum_{k=1}^{3} c_k\ (\phi_k - 2\Phi_k(x))$$

$$x = \sum_{k=1}^{3} c_k\ s_k \qquad ,(0 \le x \le 1) \qquad ,(s_k = \phi_k - 2\Phi_k(x)\ )$$

$$s_k = \phi_k - 2\int_0^1 K(x,\xi)\,\phi_k\, d\xi,$$

1) $k = 1$인 경우, $\phi_1 = 1$

$$\begin{aligned}
s_1 &= \phi_1 - 2\int_0^1 K(x,\xi)\,\phi_1 d\xi \\
&= 1 - 2\int_0^x \xi(1-x)\,d\xi - 2\int_x^1 x(1-\xi)\,d\xi \\
&= 1 - 2\frac{x^2}{2}(1-x) - 2x((1-\frac{1}{2}) - (x - \frac{x^2}{2})) \\
&= 1 - x^2(1-x) - 2x(\frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2}) \\
&= 1 - x^2 + x^3 - x + 2x^2 - x^3 \\
&= 1 - x + x^2
\end{aligned}$$

1) $k = 2$ 인 경우, $\phi_2 = x$

$$\begin{aligned}
s_2 &= x - 2\int_0^1 K(x,\xi)\,\xi\, d\xi, \\
&= x - 2\int_0^x \xi^2(1-x)\,d\xi - 2\int_x^1 x(1-\xi)\,\xi\, d\xi \\
&= x - 2\left[\frac{\xi^3}{3}(1-x)\right]_0^x - 2\left[x(\frac{\xi^2}{2} - \frac{\xi^3}{3})\right]_x^1 d\xi \\
&= x - 2\frac{x^3}{3}(1-x) - 2x((\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) - (\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3})) \\
&= x - \frac{2}{3}x^3(1-x) - 2x(\frac{1}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}) \\
&= x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{3}x + x^3 - \frac{2}{3}x^4 \\
&= \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^3
\end{aligned}$$

$$s_3 = x^2 - \int_0^1 K(x,\xi)\,\xi^2 d\xi$$
$$= x^2 - 2\int_0^x \xi^3(1-x)\,d\xi - 2\int_x^1 x(1-\xi)\xi^2\,d\xi$$
$$= x^2 - 2\left[\frac{\xi^4}{4}(1-x)\right]_0^x - 2x\left[(\frac{\xi^3}{3}-\frac{\xi^4}{4})\right]_x^1$$
$$= x^2 - 2\frac{x^4}{4}(1-x) - 2x(\frac{1}{12}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4})$$
$$= x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{2} - \frac{1}{6}x + \frac{2}{3}x^4 - \frac{x^5}{2}$$
$$= -\frac{1}{6}x + x^2 - \frac{1}{6}x^4$$

$$\sum_{k=1}^{3} c_k s_k(x_i) = F(x_i)\ ,(i=1,2,3)$$

$$c_1\left(1-x_i+x_i^2\right)+c_2\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x^3\right)+c_3\left(-\frac{1}{6}x+x^2-\frac{1}{6}x^4\right)=x_i,\ (i=1,2,3)$$

$x_1=0,\ x_2=\frac{1}{2},\ x_3=1$을 대입하면,

$$c_1 = 0$$
$$\frac{3}{4}c_1+\frac{3}{8}c_2+\frac{17}{96}c_3=\frac{1}{2}$$
$$c_1+c_2+c_3=1$$

$c_1=0,\ c_2=1.63157,\ c_3=-0.63157$.

$\therefore y = 1.63157x - 0.63157x^2$

--------------------------------문제11.3 해답 끝 ----------------------------------

[문제 11.4 해답]

Galerkin 방법은 양변에 basis function과 같은 weight function을 곱하여 적분구간에 대해 적분한 값이 같다는 방법으로 계수를 구한다.

따라서,

$$\sum_{k=1}^{3} c_k \int_0^1 \psi_i \, s_k \, dx = \int_0^1 \psi_i \, x \, dx \qquad ,(i=1,2,3)$$

$$\psi_1 = 1,\ \psi_2 = x,\ \psi_3 = x^2$$

$$c_1\int_0^1 \{1-x+x^2\}dx + c_2\int_0^1 \left\{\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x^3\right\}dx + c_3\int_0^1\left\{-\frac{1}{6}x+x^2-\frac{1}{6}x^4\right\}dx = \int_0^1 xdx$$

$$c_1\int_0^1 \{x-x^2+x^3\}xdx + c_2\int_0^1 \left\{\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x^3\right\}xdx + c_3\int_0^1\left\{-\frac{1}{6}x+x^2-\frac{1}{6}x^4\right\}xdx = \int_0^1 x^2dx$$

$$c_1\int_0^1 \{x-x^2+x^3\}x^2dx + c_2\int_0^1 \left\{\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x^3\right\}x^2dx + c_3\int_0^1\left\{-\frac{1}{6}x+x^2-\frac{1}{6}x^4\right\}x^2dx = \int_0^1 x^3dx$$

$$c_1\int_0^1 \{1-x+x^2\}dx + c_2\int_0^1 \left\{\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}x^3\right\}dx + c_3\int_0^1\left\{-\frac{1}{6}x+x^2-\frac{1}{6}x^4\right\}dx = \int_0^1 xdx$$

$$c_1\int_0^1 \{x^2-x^3+x^4\}xdx + c_2\int_0^1 \left\{\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x^4\right\}dx + c_3\int_0^1\left\{-\frac{1}{6}x^2+x^3-\frac{1}{6}x^5\right\}dx = \int_0^1 x^2dx$$

$$c_1\int_0^1 \{x^3-x^4+x^5\}dx + c_2\int_0^1 \left\{\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{3}x^5\right\}dx + c_3\int_0^1\left\{-\frac{1}{6}x^3+x^4-\frac{1}{6}x^6\right\}dx = \int_0^1 x^3dx$$

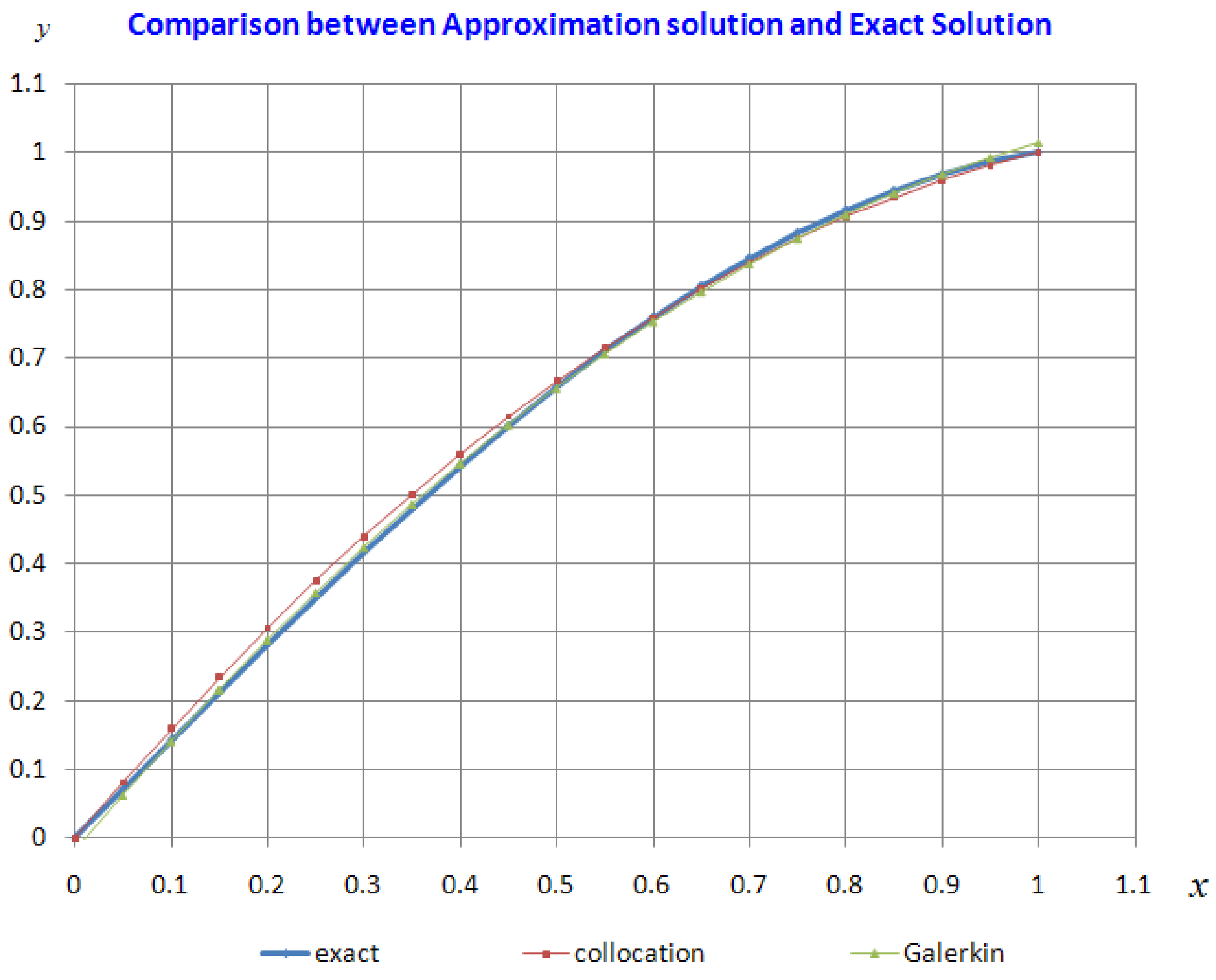
$$\frac{5}{6}c_1 + \frac{5}{12}c_2 + \frac{17}{60}c_3 = \frac{1}{2}$$
$$\frac{5}{12}c_1 + \frac{13}{45}c_2 + \frac{2}{9}c_3 = \frac{1}{3}$$
$$\frac{17}{60}c_1 + \frac{2}{9}c_2 + \frac{51}{280}c_3 = \frac{1}{4}$$

$$c_1 = -0.01875,\ \ c_2 = 1.6689,\ \ c_3 = -0.63444$$

$$\therefore y = -0.01875 + 1.6689x - 0.63444x^2$$

문제 11.3서 구한 계수와 비교 했을 때, 거의 비슷한 값을 가진다.

Exact solution과 3번, 4번의 해를 비교하여 그래프를 그려보면 다음과 같다.



거의 비슷한 경향을 보이지만, Galerkin 방법이 좀더 해에 근사한 것을 확인할 수 있다.

--------------------------------문제11.4 해답 끝 ---------------------------------