1. $G = (V, E)$에 $|D| \leqslant k$인 dominating set D가 존재하는가라는 결정문제를 보자. G에 호를 첨가하여 완전호 그래프로 만들자. 원래 호에는 1, 새로 첨가된 호에는 2의 비용을 준다. 그리고 이 그래프에서 정의된 메트릭 k-센터 문제에 $(2-\epsilon)$-근사해법을 적용한다.
답이 "예"인 문제는 목적함수가 최대 $(2-\epsilon)$ 인 해를 근사해법이 구할 것이고, "아니오"인 문제는 목적함수가 최소 2 인 해를 구할 것이다. □

2. (1) 단계 1.
Using Approximate binary search with $\epsilon = O(1)$
can find $L \leqslant OPT \leqslant U$ s.t $U \setminus L = O(1)$ in $O(\log(U_0 \setminus L_0) \times poly(n, < d_{\max} >))$ time.
단계 2.
Once $U \setminus L = O(1)$ then ϵ-approximation in $poly(n, < d_{\max} >, \frac{1}{\epsilon})$ time :
Delete x_j with $c_j > U$, scale $\hat{c_j} = \lfloor \frac{c_j}{\epsilon L \setminus n} \rfloor$, or $\check{c_j} = \lceil \frac{c_j}{\epsilon L \setminus n} \rceil$, and apply the $poly(n, c_{\max}, d_{\max})$ algorithm.
Then, $poly(n, \frac{c_j}{\epsilon L \setminus n, d_{\max}})$ "=" $poly(n, d_{\max}, \frac{1}{\epsilon})$

For converse, suffices to set $\epsilon = \frac{1}{O(nc_{\max})}$.

(2) Consider gknap(max, $\leqslant$), $\max\{c^T x : x \in Q, d^T x \leqslant B, x \in \{0,1\}^n.\}$, equivalent to find maximum $\gamma \leqslant nc_{\max}$ s.t. $B \geqslant \min\{d^T x : x \in Q, c^T x \geqslant \gamma, x \in \{0,1\}^n.\}$ which is solvable in $poly(n, < d_{\max} >, c_{\max}, \gamma)$ "=" $poly(n, c_{\max}, < d_{\max} >)$. so gknap, fully polynomially approximable.

The converse proved similarly.

3. (1) 해에서 절 c의 가중치 값을 W_c라고 하면, c의 리터럴의 개수를 k라고 하면 $E[W_c] = (1 - \frac{1}{2^k})w_c$가 됨을 쉽게 알수 있다. $(1 - \frac{1}{2^k}) \geqslant \frac{1}{2}$이므로 전체 가중치의 기대값은

$$E[W] = \sum_{c \in \mathcal{C}} E[W_c] \geqslant \frac{1}{2} \sum_{c \in \mathcal{C}} w_c \geqslant \frac{1}{2}\text{OPT}.$$

모든 절에서 $k \geqslant 2$이면 $E[W] \geqslant \frac{3}{4}\text{OPT}$가 됨을 알 수 있다. □

(2)

$$\begin{aligned} &E[W|x_1 = a_1, \ldots, x_i = a_i] \\ &= E[W|x_1 = a_1, \ldots, x_i = a_i, x_{i+1} = \text{True}] \cdot \tfrac{1}{2} \\ &+ E[W|x_1 = a_1, \ldots, x_i = a_i, x_{i+1} = \text{False}] \cdot \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

따라서, $E[W|x_1 = a_1, \ldots, x_i = a_i, x_{i+1} = \text{True}]$, 또는 $E[W|x_1 = a_1, \ldots, x_i = a_i, x_{i+1} = \text{False}]$는 $E[W|x_1 = a_1, \ldots, x_i = a_i]$보다 커야한다. 따라서 이러한 관계를 x_i들의 임의로 정한 순서에 따라 (첨자 순서라고 가정하자) 적용하면 모든 x_i들이 진리값을 갖게 되는 순간, $E[W]$와 같거나 큰 목적함수를 가진 해가 반드시 따라서 결정적으로 구해지게 된다.
모든 i에 대해 기대값 $E[W|x_1 = a_1, \ldots, x_i = a_i]$를 다항시간에 계산할 수 있다면, 이는 다항시간 알고리듬이 된다. 진리값이 독립적으로 주어지는 경우 이는 다항시간에 계산할 수 있다. □

4. (1) 임의의 $e \in U$를 생각하자. e를 포함하는 집합은 많아야 f개, 따라서 최소 한개의 집합 S는 fractional cover의 해에서 $x_S \geqslant \frac{1}{f}$가 되야한다. 따라서, 위의 알고리듬이 선택한 집합 S의 집합 $\mathcal{C}$는 가능해가 되어야 한다.
그리고 $x_S \geqslant \frac{1}{f}$인 경우에만 1이 되므로, fractional solution들은 f배를 초과하여 증가하지 않는다. 따라서, 출력된 정수해의 목적함수 값은 fractional cover의 목적함수 값 OPT_p의 f배를 넘지 않는다. □

(2) 알고리듬이 끝나면 커버되지 않았거나 중복커버된 원소가 없다. 그러므로 원, 쌍대 문제의 해는 모두 가능해이다. $\alpha = 1$과 $\beta = f$일때의 완화된 상보여유조건을 만족하기 때문에 다음에 의해 근사 계수는 f이다.

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j `\alpha \cdot \beta \cdot \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \quad \square$$