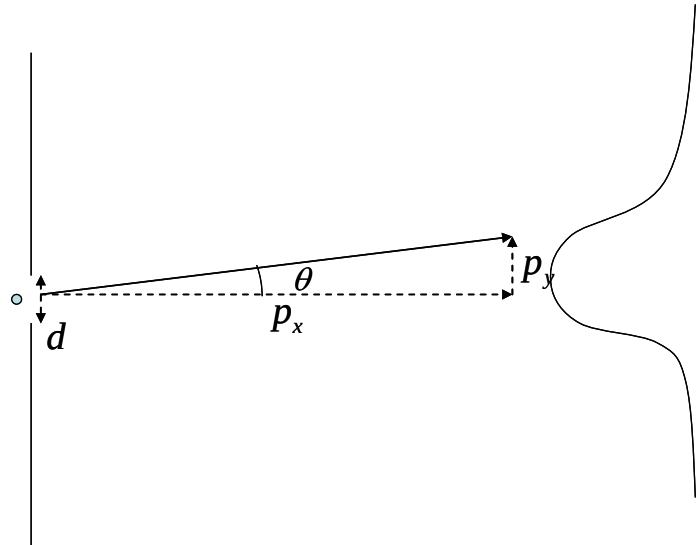


Introduction to Quantum Mechanics  
 2007 1<sup>st</sup> Semester– Prof. Byoung-ho Lee  
 Midterm Exam 1 Solution

다음의 풀이는 조교의 풀이 방법으로 다른 풀이 방법이 존재할 수 있으며, 맞는 방법이면 맞게 채점하였습니다.

1. (20p)



불확정성의 원리에 의해  $\Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}$

슬릿의 폭이  $d$ 이므로,  $\Delta y = d$

이를 대입하면 다음의 관계를 얻는다.

$$\Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2d}$$

따라서  $d$ 가 작아지면  $\Delta p_y$ 가 커지고 따라서 외절이 더 많이 일어난다.

한편, 파장이  $\lambda$ 인 입자가 갖는 운동량은  $\frac{h}{\lambda}$ 이고  $\Delta y \Delta p_y = \frac{\hbar}{2}$ 인 경우에 대해  $d = 10\lambda$ 를

대입하면  $\Delta p_y = \frac{\hbar}{2d} = \frac{\hbar}{20\lambda}$ 이고, 이를 이용에

$$\theta \approx \tan \theta = \frac{\Delta p_y / 2}{p_x} \approx \frac{\hbar}{40\lambda} \frac{\lambda}{h} = \frac{1}{80\pi}$$

따라서 최소  $\frac{1}{80\pi}$  rad 만큼의 외절이 일어난다. ( $\Delta y \Delta p_y \approx h$ 로 계산을 시작했으면,  $\theta \approx \frac{1}{20}$ )

rad.)

불확정성의 원리를 이용하여 외절을 설명하는 부분: 10점

설명을 아라고 명시되어 있으므로, 설명 하지 않고 넘어가면 감점하였음.

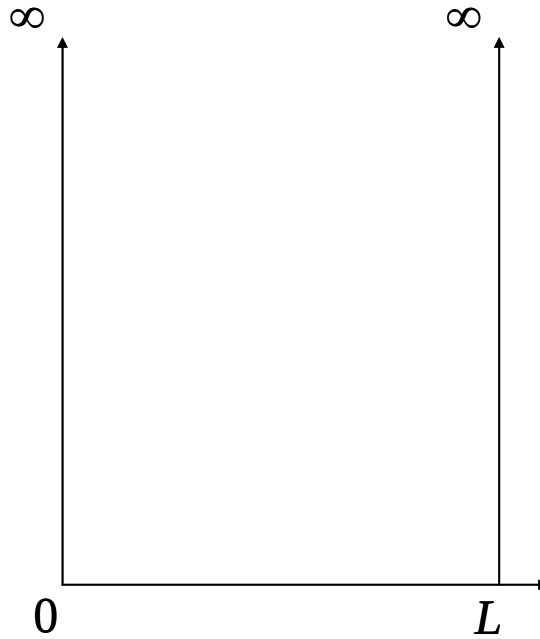
- 불확정성의 원리를 확실히 기술(5점).
- 전개된 수식을 이용하여 슬릿의 폭이 좁아지면 빛이 더 많이 퍼짐을 설명(5점).

$d=10 \times \lambda$  인 경우의 외절 각도 어림 계산: 10점

나름대로의 가정을 하고 올바르게 계산하였으면 10점.

- 꼭  $\Delta y \Delta p_y = \frac{\hbar}{2}$  나  $\Delta y \Delta p_y \approx \hbar$  로 하지 않아도 일리 있는 가정이면 감점하지 않음.
- 실수가 있을 시엔 5점 감점.
- 불확정성의 원리와 관계없이 외절 공식을 사용하였을 경우에는 점수 주지 않음.

2. (20p)



$$\lambda = \frac{h}{mv}, \text{ where } n\lambda = 2L$$

$$\therefore nh = 2mvL \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$0 < x < L$  구간에서의 전자의 에너지를  $\frac{1}{2}mv^2$  로 두고 위 식을 대입하면

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \frac{n^2 h^2}{4m^2 L^2} = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$$

De Broglie의 가정을 기술: 12점

- $\lambda = \frac{h}{mv}$  (6점).
- $n\lambda = 2L$  (6점). ( $n\lambda = 2\pi r$  까지만 쓰면 3점)

나머지 과정: 8점

- $E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \frac{n^2 h^2}{4m^2 L^2} = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$  (8점).
- 위의 가정이 틀리거나 하여 답이 틀려지면 5점 감점.
- 위의 에너지를 포함시켜서 계산하면 점수(8점) 없음.

3. (30p)

(a) (10p)

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t)$$

$$\Psi(x, t) = \psi(x)\Phi(t) = \psi(x) \exp\left(-i \frac{E}{\hbar} t\right)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} = E\psi(x)$$

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx \quad (k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar})$$

Apply to boundary condition,

$$\Psi(0, t) = 0 :$$

$$B = 0$$

$$\Psi(L, t) = 0 :$$

$$A \sin(kL) = 0$$

$$kL = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \times k_n^2 = \frac{\hbar^2}{2m} \times \frac{n^2 \pi^2}{L^2} = \frac{n^2 \hbar^2 \pi^2}{2mL^2} \quad (1)$$

Normalization

$$\int_0^L \Psi^*(x, t) \Psi(x, t) dx = 1$$

$$A = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

$$\therefore \Psi_n(x, t) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \exp\left(-i \frac{E_n}{\hbar} t\right), \quad \text{where } E_n \text{ is given by Eq. (1).}$$

$E_n$ 을 구하지 않은 경우 : -3점

$\exp\left(-i \frac{E_n}{\hbar} t\right)$ 의 시간 Term을 구하지 않은 경우 : -2점

작은 계산 실수 : -1점

(b) (15p)

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$$

$$\langle x_n \rangle$$

$$= \int_0^L x \Psi_n^*(x, t) \Psi_n(x, t) dx$$

$$= \frac{2}{L} \int_0^L x \sin^2\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

$$= \frac{2}{L} \left[ \frac{x^2}{4} - \frac{x \sin\left(\frac{2n\pi}{L} x\right)}{4x(n\pi/L)} - \frac{\cos(2n\pi x)}{8(n\pi/L)^2} \right]_0^L$$

$$= \frac{2}{L} \left( \frac{1}{4} L^2 \right)$$

$$= \frac{L}{2}$$

$$\langle x_n^2 \rangle$$

$$= \int_0^L x^2 \Psi_n^*(x, t) \Psi_n(x, t) dx$$

$$= \frac{2}{L} \int_0^L x^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

$$= \frac{2}{L} \left[ \frac{x^3}{6} - \left( \frac{x^2}{4x(n\pi/L)} - \frac{1}{8x(n\pi/L)^3} \right) \sin\left(\frac{2n\pi}{L} x\right) - \frac{x \cos\left(\frac{2n\pi}{L} x\right)}{4x(n\pi/L)^2} \right]_0^L$$

$$= \frac{2}{L} \left( \frac{L^3}{6} - \frac{L^3}{4\pi^2 n^2} \right)$$

$$= \frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{2\pi^2 n^2}$$

$$\langle \Delta p_n \rangle$$

$$= \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) (i\hbar) \left(\frac{n\pi}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

$$= 0$$

$$\langle \Delta p_n^2 \rangle$$

$$= \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) (\hbar^2) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

$$= \frac{2}{L} \hbar^2 \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx$$

$$= \frac{2\hbar^2 n^2 \pi^2}{L^3} \int_0^L \frac{1}{2} (1 - \cos\left(\frac{2n\pi}{L} x\right)) dx$$

$$= \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{L^3} \left[ x - \frac{L}{2n\pi} \sin\left(\frac{2n\pi}{L} x\right) \right]_0^L$$

$$= \frac{\hbar^2 n^2 \pi^2}{L^2}$$

$$\Delta x_1$$

$$= \sqrt{\langle x_1^2 \rangle - \langle x_1 \rangle^2}$$

$$= \left( \frac{L^2}{3} - \frac{L^2}{2\pi^2} - \frac{L^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= L \left( \frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Delta p_1$$

$$= \sqrt{\langle p_1^2 \rangle - \langle p_1 \rangle^2}$$

$$= \frac{\hbar \pi}{L}$$

$$\Delta x \Delta p$$

$$= L \left( \frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\hbar \pi}{L}$$

$$= \hbar \pi \left( \frac{1}{12} - \frac{1}{2\pi^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

계산이 복잡한 문제이기 때문에 점수를 세분화하였습니다.

$\langle x \rangle$ ,  $\langle x^2 \rangle$ ,  $\langle p \rangle$ ,  $\langle p^2 \rangle$  값을 정확히 구하지 못했을 경우 각각 -2점 (총 8점)

$\langle \Delta x \rangle$ ,  $\langle \Delta p \rangle$  을 구하는 것이 각각 3점 (총 6점)

위 두 값의 경우 앞에서 구한  $\langle x \rangle$ ,  $\langle x^2 \rangle$ ,  $\langle p \rangle$ ,  $\langle p^2 \rangle$  이 틀렸을 경우 자동적으로 틀린 값이 구해집니다. 따라서 앞의 계산이 틀려서  $\langle \Delta x \rangle$ ,  $\langle \Delta p \rangle$  가 틀렸을 경우에는 3점 중 1점만 감점하였습니다.

단,  $\langle \Delta x \rangle$  을 구하는데 필요한  $\langle x \rangle$ ,  $\langle x^2 \rangle$  가 모두 잘못된 경우  $\langle \Delta x \rangle$  가 틀렸을 경우에는 3점 모두 감점하였습니다. (즉,  $\langle x \rangle$ ,  $\langle x^2 \rangle$  중 하나만 잘못 구하여 계산 결과가 잘못된 경우에만 1점 감점하였습니다.)

$\Delta x \Delta p$  값을 정확히 구하지 못했을 경우 -1점 감점 (총 1점)

$\langle x \rangle$ ,  $\langle p \rangle$  값을 사용하는데 있어  $L/2, 0$ 을 아무 설명없이 사용한 경우 각각 -1점

(계산 틀리신 분이 많아 부분점수를 가능한 많이 드리려 점수를 세분화하였으니 잘 이해하시기 바랍니다. 위의 기준에 따라 본인 점수를 계산해보셨을 경우 문제가 있으신 분은 클레임에 주세요.)

(c) (5P)

$\langle x \rangle = \frac{L}{2}$ 의 의미는 전자의 확률적 평균 위치일 뿐  $x$ 가 항상  $\frac{L}{2}$ 에 위치함을 의미하지 않는다. 하지만, 이 경우 위치의 기대치가 시간에 따라 변하지 않는 것은 사실이다. 또한 전자는 앞에서 구한  $E_1$ 에 해당하는 운동에너지를 지니고 있으며, 0은 아니다. 즉, 확률 분포에 의해서만 입자의 분포를 확인할 수 있다.  $E_1$ 의 파동함수를 갖는 전자에 대해 운동량의 기대치는 0. 이는 양의 운동량과 음의 운동량이 똑같은 비율로 superposition 되었기 때문. 고전적으로 일정한 속력으로 움직이면 발견될 위치의 확률이 균일해야 할 것으로 보이지만, 실은 고전적 논의에서는 위치와 운동량이 동시에 정해질 수 없다는 것이 무시된 것이다.

서술영이다보니 개인별로 작성한 답안이 다양해서 다음 2가지 항목 기준으로 채점하였습니다. (총 5점)

$\langle x \rangle$ 가 확률적 평균 위치를 의미하는 것이지 항상  $L/2$ 에 위치함을 의미하지는 않는다. (3점): 중요단어 (확률적 분포 or 평균 or 불확정성 원리)

전자는  $E_1$ 에 해당하는 운동에너지를 지니고 있지 에너지가 0이 아니다. 즉, 확률적 분포에 의해서만 입자에 관해 알 수 있다. (2점): 중요단어 (운동에너지, 운동)

맞는 말과 틀린 말을 섞어 썼을 경우 약간의 감점이 있으며,  $\langle x \rangle$ 가 시간의 함수라고 푸신 경우나 에너지가 다른 두 파동함수간의 상호작용 등으로 설명하신 분이 있는데 오답입니다.  $\langle x \rangle = L/2$ 이고 ground state상태의 파동함수에 관한 문제입니다.

4. (10p)

광자 하나의 에너지는  $E = hf$ .

단위 제적당 광자 수를  $n$ , 빛의 속도를  $c$ 라 하면, 빛의 세기  $I$ 는 단위 제적당 단위시간당 통과하는 에너지를 뜻하므로,

$$I = n \times c \times hf = nchf$$

5. (20p)

$$\begin{aligned} a(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{1}{\sqrt{a}} e^{ik_0x} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{i(k_0-k)x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \frac{1}{i(k_0-k)} \left( e^{i(k_0-k)\frac{a}{2}} - e^{-i(k_0-k)\frac{a}{2}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \frac{1}{i(k_0-k)} 2i \sin\left(\frac{a}{2}(k_0-k)\right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi a}} \frac{1}{k_0-k} \sin\left(\frac{a}{2}(k_0-k)\right) \\ &= \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \text{sinc}\left(\frac{a}{2\pi}(k_0-k)\right), \quad \text{where } \text{sinc}(x) \equiv \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} a(k) e^{i(kx-\omega t)} dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \text{sinc}\left(\frac{a}{2\pi}(k_0-k)\right) e^{i(kx-\omega t)} dk \\ &= \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \text{sinc}\left(\frac{a}{2\pi}(k_0-k)\right) e^{i(kx-\frac{\hbar k^2}{2m}t)} dk \quad (\because \omega = \frac{E}{\hbar} = \frac{\hbar k^2}{2m}) \quad \text{여기까지 쓰면 만점} \\ &= \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \text{sinc}\left(\frac{a}{2\pi}(k_0-k)\right) e^{i\left\{-\frac{\hbar t}{2m}\left(k-\frac{mx}{\hbar t}\right)^2 + \frac{mx^2}{2\hbar t}\right\}} dk \\ &= \frac{\sqrt{a}}{2\pi} e^{i\frac{mx^2}{2\hbar t}} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \text{sinc}\left(\frac{a}{2\pi}(k_0-k)\right) e^{-i\frac{\hbar t}{2m}\left(k-\frac{mx}{\hbar t}\right)^2} dk \end{aligned}$$

$a(k)$ 와  $\Psi(x, t)$ 에 관한 기본식을 맞게 쓴 경우 4점

$a(k)$ 를 잘 구하였지만 사소한 계산 과정이 틀린 경우엔 10점

$a(k)$ 를 완벽하게 구하였으면 13점

$a(k)$ 와  $\Psi(x, t)$ 에 관한 식을 잘 풀었지만 사소한 계산 실수가 있는 경우 16점

그 밖에 계산 실수일 경우에는 -3점을 하였습니다.