

Introduction to Quantum Mechanics
2007 1st Semester-Prof. ByoungHo Lee
Midterm Exam 2 Solution

다음의 풀이는 조교의 풀이 방법으로 다른 풀이 방법이 존재할 수 있으며, 합당한 답안에 대해서는 맞게 채점하였습니다.

1. (25점) 조화진동자(harmonic oscillator)에서 어떤 state가 annihilation operator \hat{a} 의 eigenstate라고 하며 이 때 eigenvalue는 복소수 α 라고 한다. 이 state를 number state $|n\rangle$ 의 superposition으로 표현하시오. (힌트: $\hat{a}|n\rangle=?$ 이를 어떻게 이용할지 잘 생각)

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$$

(annihilation operator의 성질 기술: 5점)

$$|a\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle$$

$\hat{a}|a\rangle = \alpha|a\rangle$ 를 전개하면

$$\text{좌변: } \hat{a}|a\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \hat{a}|n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sqrt{n}|n-1\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_{n+1} \sqrt{n+1}|n\rangle$$

$$\text{우변: } \alpha|a\rangle = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha C_n |n\rangle$$

(number stater의 선형 결합으로 나타내고 좌우변 정리: 5점)

$$\therefore \alpha C_n = C_{n+1} \sqrt{n+1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{C_1}{C_0} = \frac{\alpha}{\sqrt{1}} \\ \frac{C_2}{C_1} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \\ \vdots \\ \frac{C_{n+1}}{C_n} = \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{C_n}{C_0} = \frac{\alpha}{\sqrt{1}} \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \cdots \frac{\alpha}{\sqrt{n}} = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}$$

$$\therefore C_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} C_0$$

(점화식 유도를 통해 계수를 C_0 로 전개: 5점)

$\langle a | a \rangle = 1$ 에서

$$|C_0|^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{|\alpha|^2}{1!} + \frac{|\alpha|^4}{2!} + \dots + \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} \right) = 1$$

(normalization 조건 기술: 5점)

$$\therefore C_0 = \frac{1}{\left(1 + \frac{|\alpha|^2}{1!} + \frac{|\alpha|^4}{2!} + \frac{|\alpha|^6}{3!} + \dots \right)} = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}$$

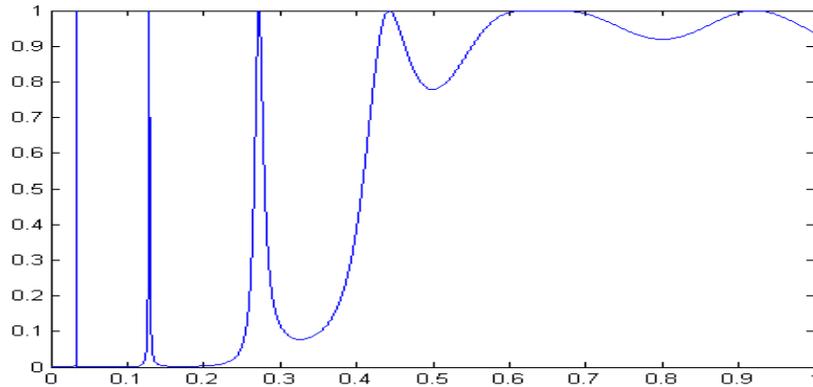
$$\therefore |a\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n |n\rangle, \quad C_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}$$

(각 계수 전개 식의 지수 형태로의 변환 등의 마무리: 5점)

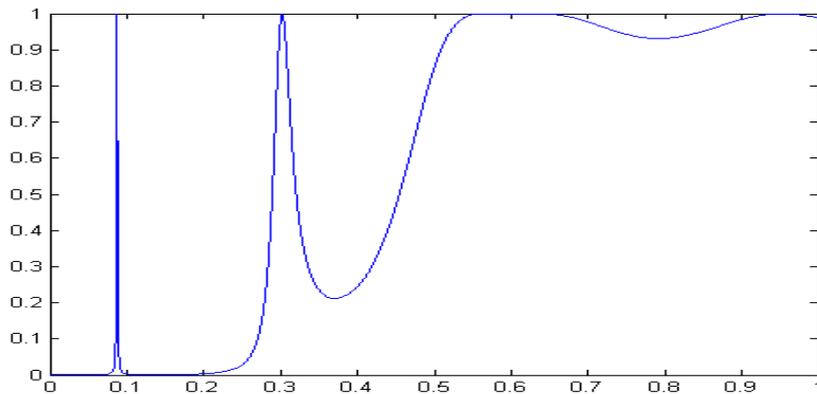
2. (25점) Resonant tunneling diode에서 입사하는 전자의 에너지에 따른 투과계수의 그래프의 대략적 모양을 그리시오(전자의 에너지가 potential barrier보다 낮은 경우와 높은 경우 모두 포함). 그 그래프에서, 장벽 사이의 간격(potential 우물의 폭)이 좁아지면 그래프에 어떤 변화가 생기겠는가? 그 이유는? 장벽의 두께가 얇아지면 어떤 변화가 생기겠는가? 그 이유는?

1) 전자의 에너지가 포텐셜 장벽에 비해 작은 경우와 큰 경우의 투과 계수 대략적인 투과 계수 그래프

(포텐셜 장벽이 0.3 eV로 가정하고 그린 그림)

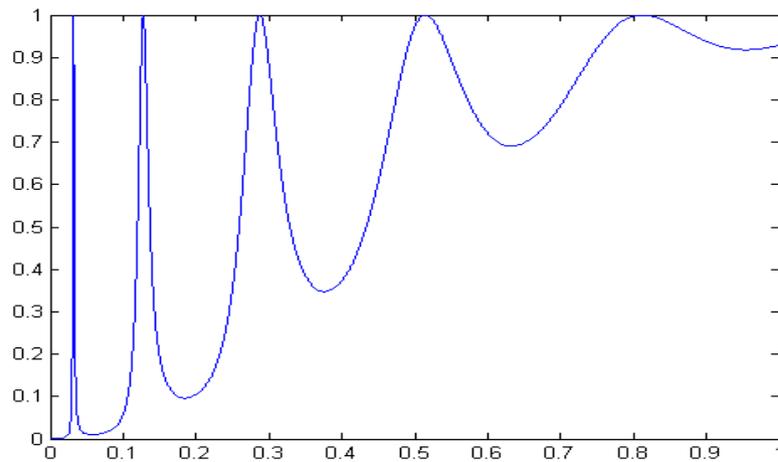


2) 장벽 사이의 간격이 좁아질 경우의 그래프 변화



⇒ 장벽 사이의 간격이 줄어들면 포텐셜 우물 내의 가능한 에너지 레벨의 에너지 값이 증가하게 되고 이에 따라 resonant tunneling을 일으키기 위해선 전자의 에너지도 더 높아져야 한다. 또한 가능 에너지간의 간격도 증가하여 투과계수의 peak 간격도 벌어지게 된다.

3) 장벽의 두께가 얇아질 경우의 변화



⇒ 장벽의 두께가 얇아지면 전자의 터널링 확률이 증가하게 되고 이에 따라 기존에 비해 적은 에너지로도 resonant tunneling이 가능해진다. 그래프에서 보면 peak를 이루는 전자의 에너지가 감소한 것을 확인할 수 있다. (교수님 comment : 비슷한 에너지의 resonance peak의 폭은 넓어진다.)

1) 투과율 그래프

$E < U$: 5점, $E > U$: 4점

2) 장벽사이 간격이 줄어들 때

그래프

(가능답안) Peak 수가 적어진다/Peak가 오른쪽으로 이동한다/Peak 간격이 넓어진다 : 4점
원인

(가능답안) 양자 우물 내 allowed 에너지값 증가/반사파와의 관계로 설명/수식 추출 : 4점

3) 장벽 두께가 줄어들 때

그래프

(가능답안) Peak가 넓어진다/투과계수가 전반적으로 상승한다 : 4점

원인

(가능답안) 장벽이 얇아질수록 터널링 확률 증가 : 4점

3. (20점) Hydrogen-like atom (원자번호 Z)에서 모든 파동함수의 꼴을 여러분이 외우지는 못하겠지만, 숙제를 위해 고민을 했기 때문에 기본적인 것은 기억하리라 믿는다. $\psi_{210}(r, \theta, \phi), \psi_{21-1}(r, \theta, \phi), \psi_{211}(r, \theta, \phi), [\psi_{2p}]_x, [\psi_{2p}]_y$ 들을 구하시오. (계수들을 정확히 구할 필요는 없지만, 원점에서의 거리와 각도 등에 대해 어떻게 변하는지를 수식으로 표현해야 함.)

The stationary states for any central force are

$$\psi(r, \theta, \phi, t) = R(r)Y_l^m(\theta, \phi)e^{-i\omega t}$$

Therefore,

$$\psi_{210}(r, \theta, \phi) = R_{21}(r)Y_1^0 = \pi^{-1/2} \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2} \left(\frac{Zr}{2a_0}\right) e^{-\frac{Zr}{2a_0}} \times \cos\theta$$

$$\psi_{211}(r, \theta, \phi) = R_{21}(r)Y_1^1 = \pi^{-1/2} \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2} \left(\frac{Zr}{8a_0}\right) e^{-\frac{Zr}{2a_0}} \times \sin\theta \times e^{i\phi}$$

$$\psi_{21-1}(r, \theta, \phi) = R_{21}(r)Y_1^{-1} = \pi^{-1/2} \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2} \left(\frac{Zr}{8a_0}\right) e^{-\frac{Zr}{2a_0}} \times \sin\theta \times e^{-i\phi}$$

$$\begin{aligned} [\psi_{2p}]_x &= \frac{1}{\sqrt{2}}\{\psi_{211} + \psi_{21-1}\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}R_{21}(r)\{Y_1^1 + Y_1^{-1}\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2} \left(\frac{Zr}{4a_0}\right) e^{-\frac{Zr}{2a_0}} \times \sin\theta \times \left\{\frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2}\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2} \left(\frac{Zr}{4a_0}\right) e^{-\frac{Zr}{2a_0}} \times \sin\theta \times \cos\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\psi_{2p}]_y &= \frac{1}{\sqrt{2}}\{\psi_{211} - \psi_{21-1}\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}R_{21}(r)\{Y_1^1 - Y_1^{-1}\} \\ &= \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2} \left(\frac{Zr}{4a_0}\right) e^{-\frac{Zr}{2a_0}} \times \sin\theta \times \left\{\frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i}\right\} \\ &= \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{3/2} \left(\frac{Zr}{4a_0}\right) e^{-\frac{Zr}{2a_0}} \times \sin\theta \times \sin\phi \end{aligned}$$

각 문항당 4점씩 계산

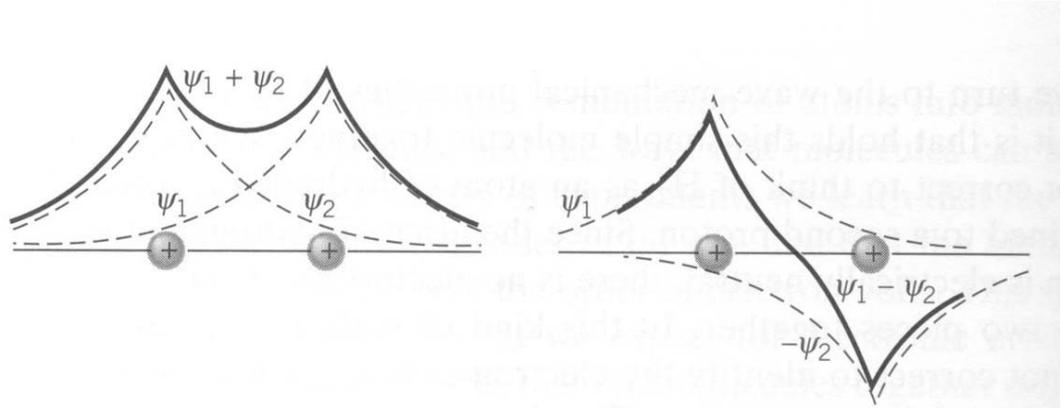
$\psi_{210}(r, \theta, \phi), \psi_{211}(r, \theta, \phi), \psi_{21-1}(r, \theta, \phi)$ 의 경우 계수가 틀리지만 전반적인 수식이 맞다면 맞게 하였음.

$[\psi_{2p}]_x$ 의 경우와 $[\psi_{2p}]_y$ 의 경우에 $\frac{1}{\sqrt{2}}\{\psi_{211} + \psi_{21-1}\}, \frac{1}{\sqrt{2}}\{\psi_{211} - \psi_{21-1}\}$ 에 대한 점수가 각각 2점씩임. 마지막 부분에 원점에서의 거리와 각도 계산이 전부 들어간 경우에만 각각 4점을 주어서 8점으로 처리함.

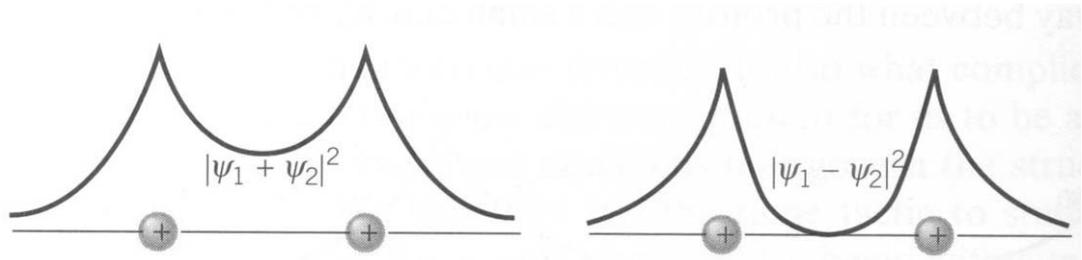
과정에서 사소한 계산 실수는 1점씩 감점하였음. (정확한 계수가 아니라 과정에서 나오는 실수일 경우에만 감점 처리)

4. (15점) H_2^+ 에서 두 양성자 간의 거리에 따른 H_2^+ 의 에너지의 대략적 그래프를 그리고 그렇게 되는 이유를 설명하시오.

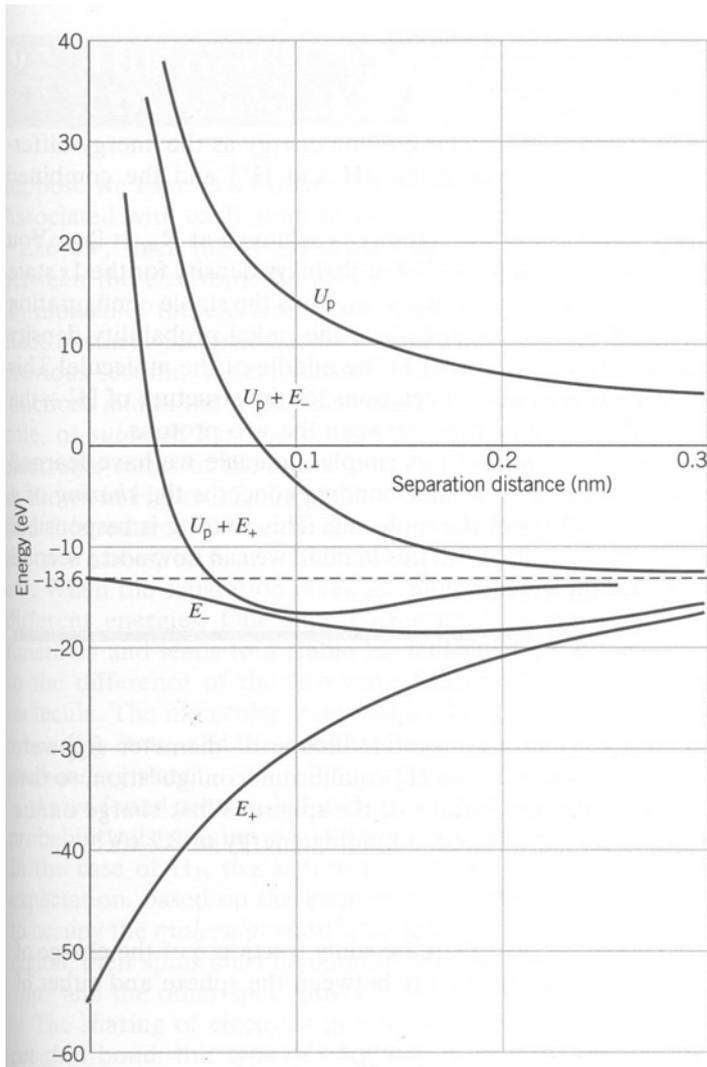
양성자 둘, 전자 하나로 이루어진 구조를 생각할 때 양성자 둘이 서로 거리를 두고 떨어져 있을 때 전자가 가질 수 있는 파동 함수의 형태는 아래와 같이 두 가지 경우가 있다. (대칭적인 형태와 비대칭적인 형태)



이 경우, 전자의 발견 확률은 두 경우에 따라 아래와 같이 달라진다.



이 때, 대칭적인 형태를 띠는 경우(왼편), 두 양성자 사이에 전자가 존재할 확률이 어느 정도 있기 때문에 양성자간의 거리가 0일 때 보다 조금 떨어져 있을 때에 양성자 간의 반발력을 없애주는 작용을 한다. 이를 양성자간의 거리에 대한 그래프로 그려보면 다음 페이지와 같다.



E_+ 는 대칭적인 구조에 대한 전자의 에너지이고 E_- 는 비대칭적인 구조에 대한 전자의 에너지이다. 이것이 양성자 둘이 갖는 위치 에너지 U_p 에 더하여진 결과가 각각 $U_p + E_+$, $U_p + E_-$ 이다. 즉, 대칭적인 구조에서는 전자의 에너지가 위치 에너지를 상쇄시켜서 어느 정도의 양성자간의 거리가 어느 정도 떨어져 있을 때 극소점이 나타나 이 거리에서 결합을 유지하는 반면, 비대칭적인 구조에서는 이러한 극소점이 존재하지 않아서 기울기에 해당하는 만큼의 반발력이 생겨 계속 멀어지게 된다.

* 자세한 설명은 다를 수 있기 때문에 아래와 같은 기준으로 채점하였습니다.

- $U_p + E_+$ 곡선의 그림: 5점
- $U_p + E_-$ 곡선의 그림: 5점
- 곡선의 모양에 대한 설명: 5점

감점 사유:

1. E_+ 와 E_- 의 구분이 없으면 1점 감점
2. 오른쪽 수렴점이 틀린 경우: 1점 감점
3. $U_p + E_+$ 곡선의 설명이 틀린 경우: 2점 감점
4. $U_p + E_-$ 곡선의 설명이 틀린 경우: 2점 감점

5. (15점) 파동함수의 exchange symmetry와 관련하여 boson과 fermion이 어떻게 다르며 그 특성이 어떠한지를 반페이지 이내로 설명하시오.

Boson이나 Fermion같은 입자들은 두 입자간의 구분이 불가능하다. (Indistinguishable) 따라서 다음과 같은 식을 만족해야 한다.

$$|\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)|^2 = |\psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)|^2$$

(Probability density for finding one electron at \vec{r}_a)

이를 Exchange symmetry라 한다.

그러므로 이에 대한 Solution은 두 가지가 존재할 수 있는데,

$$\begin{aligned}\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= \psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1) \\ \psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= -\psi(\vec{r}_2, \vec{r}_1)\end{aligned}$$

전자의 경우가 Boson에 해당하며(예를 들어 Photon), 후자의 경우가 Fermion에 해당된다 (Electron).

맞게 썼을 경우 5점

설명 없고 식만 썼을 경우에 2점

구분이 불가능하다는 말을 쓰지 않을 경우 감점 1점

특성

Boson의 경우,

$$\psi_{ab}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi_a(\vec{r}_1)\psi_b(\vec{r}_2) + \psi_a(\vec{r}_2)\psi_b(\vec{r}_1) \quad (2점)$$

이며 $a=b$ 라면 $\psi_{aa}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi_a(\vec{r}_1)\psi_a(\vec{r}_2) + \psi_a(\vec{r}_2)\psi_a(\vec{r}_1) = 2\psi_a(\vec{r}_1)\psi_a(\vec{r}_2) \neq 0$ 이 되어 같은 상태의 photon이 존재할 수 있다는 것을 알 수 있다. **(여기까지 쓰면 3점)**

(교수님 comment : $\psi_a(\vec{r}_1)\psi_a(\vec{r}_2)$ 보다 큰 것을 볼 수 있다. 참고 - Bose-Einstein condensation)

완벽히 쓴 경우 5점 (Bose-Einstein condensation까지 설명한 경우에만 5점)

Fermion의 경우

$$\psi_{ab}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi_a(\vec{r}_1)\psi_b(\vec{r}_2) - \psi_a(\vec{r}_2)\psi_b(\vec{r}_1) \quad (2점)$$

$$\psi_{ab}(\vec{r}_2, \vec{r}_1) = \psi_a(\vec{r}_2)\psi_b(\vec{r}_1) - \psi_a(\vec{r}_1)\psi_b(\vec{r}_2) = -\psi_{ab}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

여기서 $a=b$ 라면 $\psi_{aa}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi_a(\vec{r}_1)\psi_a(\vec{r}_2) - \psi_a(\vec{r}_2)\psi_a(\vec{r}_1) = 0$ 이 되어 $|\psi_{aa}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)|^2 = 0$ 이 되는데 이는 파울리의 배타원리(exclusion principle)와 맞는 결과임을 알 수 있다. 즉, 같은 상태의 두 전자가 존재할 확률은 '0'이라는 말이 되기 때문이다. **(5점)**

파울리의 배타원리에 대한 언급이 없을 경우 2점 감점