Introduction to Quantum Mechanics

2007 1st Semester-Prof. Byoungho Lee

Final Exam Solution

다음의 풀이는 조교의 풀이 방법으로 다른 풀이 방법이 존재할 수 있으며, 합당한 답안에 대해서는 맞게 채점하였습니다.

1. (20점) 수업시간에 배운 방법에 의하여 photon에 대한 Bose-Einstein distribution을 유도하시오.

에너지 준위 E_i(i = 1, 2, … , n)의 degeneracy가 g_i라고 하고 이 에너지 준위의 입자수가 N_i라고 하면

이 에너지 준위에 대한 경우의 수는

$$\frac{(N_i + g_i - 1)}{N_i!\,(g_i - 1)!}$$

(∵입자수와 방의 수의 합은 $N_i + g_i - 1$개이고 입자끼리는 구별이 안되므로 $N_i!$로 나눔. 칸막이들도 서로 교환가능하므로 $(g_i - 1)!$로 나눔)

따라서 전체 경우의 수 Q는

$$Q(N_1, N_2, \dots, N_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{(N_i + g_i - 1)}{N_i!\,(g_i - 1)!}$$

Photon은 입자 수는 보존되지 않는다. 따라서 제한 조건은

$$U = E_1N_1 + E_2N_2 + E_3N_3 + \cdots + E_nN_n = \text{일정}$$

이 U를 $h(N_1, N_2, \dots, N_n)$이라고 표현한다면 Lagrange의 multiplier를 쓰면

$$\frac{\partial \ln Q}{\partial N_i} + \beta \frac{\partial h}{\partial N_i} = 0 \quad \text{for all i}$$

Stirling's approximation을 이용하면

$$\ln(n!) \approx n \ln n - n \quad \text{for } n \gg 1$$

따라서

$$\frac{\partial \ln(N_i + g_i - 1)}{\partial N_i} - \frac{\partial \ln N_i!}{\partial N_i} + \beta E_i = 0 \quad \text{for all i}$$

$$\ln(N_i + g_i - 1) - \ln N_i + \beta E_i = 0$$

$$\ln\left(1 + \frac{g_i}{N_i} - \frac{1}{N_{i_i}}\right) = -\beta E_i$$

$$\ln\left(1 + \frac{g_i}{N_i}\right) \approx -\beta E_i$$

$$\frac{g_i}{N_i} = e^{-\beta E_i} - 1$$

$$f_{BE}(E_i) = \frac{N_i}{g_i} = \frac{1}{e^{-\beta E_i} - 1}, \beta = -\frac{1}{k_B T}$$

$$\therefore f_{BE}(E_i) = \frac{1}{e^{E/k_BT} - 1},$$

전체 경우의 수 : 8점(제대로 쓰지 않은 경우나 실수한 경우 4점)
완벽히 맞은 경우 : 20점
전체적인 설명이 부족한 경우 : 15점

사소한 계산 실수 : -2점

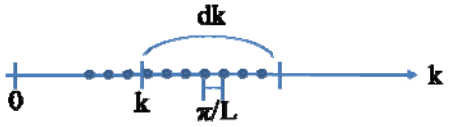
2. (25점) 수업시간에는 3차원 구조의 금속 또는 반도체에서 density of states를 계산하였다. 이제 좀 다른 문제를 고려하자. 1차원 구조의 길이 L인 금속에서 전자(electrons)의 density of states의 식을 유도하시오. 이 금속에서 움직여 다닐 수 있는 전자의 수가 N개라고 하자. 온도가 절대온도 0K에서의 Fermi level(Fermi energy)을 구하시오. 온도가 증가하면 Fermi level은 변하는가? 변한다면 커지는가 작아지는가? 그 이유는 무엇인가?

- 1차원

전자의 파동함수가 양 끝에서 (x=0, x=L) 0이려면

$$\psi(x) = \sin kx, \quad k = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

아래와 같은 k 공간에서



k~k+dk 사이의 단위 체적당 mode의 수는

$$g(k)dk = \frac{\frac{dk}{\pi/L} * 2}{L} = \frac{2}{\pi}dk$$

(*2는 전자 spin 두 가지, L은 길이에 대한 Normalize)

$$\therefore g(k) = \frac{2}{\pi}$$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \qquad dE = \frac{\hbar^2 k}{m}dk \qquad \frac{dk}{dE} = \frac{m}{\hbar^2 k} = \frac{1}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{2E}}$$

$$g(k)dk = g(E)dE$$

$$g(E) = g(k)\frac{dk}{dE} = \frac{2}{\pi} * \frac{1}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{2E}} = \frac{1}{\pi\hbar}\sqrt{\frac{2m}{E}} = \frac{2}{h}\sqrt{\frac{2m}{E}}$$

T=0K에서

$$\int_0^{E_F} g(E)dE = \frac{2}{h}\int_0^{E_F}\sqrt{\frac{2m}{E}}dE = \frac{2\sqrt{2m}}{\hbar} * 2\sqrt{E}\Big|_0^{E_F} = \frac{4\sqrt{2m}}{\hbar}\sqrt{E_F} = \frac{N}{L}$$

$$E_F = \frac{\hbar^2 N^2}{32mL^2}$$

T=0K에서 증가할수록 E_F는 증가한다.

1) g(E) 계산 (10점)

- **올바른 계산 + 답 : 10점**
- **간단한 계산 실수, 상수 값 실수 : 7점**
- **전반적 과정에 대한 이해 : 4점**

2) Ef 계산(10점)

- **올바른 계산 + 답 : 10점**
- **간단한 계산 실수, 앞의 g(E)의 간단한 실수로 인한 차이(7점)**

- 전반적 과정에 대한 이해 : 4점

3) Ef 변화

- 상승한다 + 적절한 이유 : 5점
- 이유가 미흡시 : 3점
- 상승한다. (2점)
- 변화한다. (1점)

3. (20점) 어떤 동경대 학생이 다음과 같이 주장한다. 평형상태의 pn-접합 다이오드에서 p-type 쪽과 n-type 쪽의 반도체에서 Fermi level이 똑같이 정렬되는데 양쪽의 conduction band 내의 같은 에너지 값을 갖는 전자들에 대해 전자가 존재할 확률은 같지만, density of states가 n-type 반도체의 경우가 더 크므로, 같은 에너지의 상태에 대해 n-type 쪽에 전자가 더 많아 n-type 쪽으로부터 p-type 쪽으로 전자들이 확산된다. 따라서, 평형상태에서 전류는 p-type 쪽에서 n-type 쪽으로 흐른다. 당신은 이에 동의하는가? 아니라면 어떤 부분이 잘못되었는지 지적하고 수식을 갖고 당신의 논리를 전개하시오.

동경대 학생의 주장은 틀렸다. (평형상태에서는 전류가 흐르지 않는다.)

동경대 학생의 주장이 틀린 부분:
틀린 부분: 같은 에너지의 상태에 대해 n-type쪽에 전자가 더 많아 n-type 쪽으로부터 p-type 쪽으로 전자들이 확산된다.

올바른 전개:

n-type쪽과 p-type쪽이 접합되면서 E_F가 일치하게 된다.
이 때, 확률은 $f_{FD}(E)$로 동일하다.

차이가 있는 것은 Density of states인데 $g(E)$ 는 $\sqrt{E-E_C}$ 와 비례하므로 상대적으로 E_C가 작은 n-type의 경우가 Density of states가 크다. ($g_n(E)>g_p(E)$) 따라서 같은 에너지 상에서의 전자의 개수 $n_n(E) = g_n(E)f_{FD}(E)$ 가 n-type의 경우에 더 크다.

하지만, n-type쪽에서의 전자가 p-type쪽으로 넘어갔을 때에 위치할 수 있는 허용된 에너지 자리의 개수 $v_p(E)=g_p(E)(1-f_{FD}(E))$ 는 오히려 p-type 쪽이 더 많다. 반대로, p-type 쪽의 전자는 개수는 적지만 n-type으로 넘어가서 위치할 수 있는 허용된 에너지 자리의 개수는 오히려 더 많다. 결국, 양 측의 E_F가 일치하는 때에는 다음 두 수치가 서로 일치하게 되어 전류는 흐르지 않는다.
- n-type에서 p-type으로의 전자의 이동율
$n_n(E)v_p(E)=g_n(E)f_n(E)g_p(E)(1-f_p(E))$
- p-type에서 n-type으로의 전자의 이동율
$n_p(E)v_n(E)=g_p(E)f_p(E)g_n(E)(1-f_n(E))$

위 둘은 $f_n=f_p$ 일 때에 모두 $g_ng_pf(1-f)$로 일치하게 되어 전체 전류는 0이 된다.

*위의 풀이가 교수님이 원하시는 풀이입니다. 하지만 이대로 풀지 않은 사람이 많아 이를 참작하여 채점하였습니다.

4. (5점) 다음 중 노벨 물리학상을 받은 사람은 누구인가? 그리고 그 이름을 쓰시오 (Last name만).

(다) Kilby

5. (30점) 다음 표의 빈칸들 (가)-(차)를 채우시오.

가) Bose-Einstein
나) Fermi-Dirac
다) Fermions
라) Symmetric (even)
마) Anti-symmetric (odd)
바) $f_{MB} = Ae^{-E/k_BT}$
사) $f_{BE} = \frac{1}{e^{E/k_BT}-1}$
아) $f_{FD} = \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_BT}+1}$
자) f_{MB}
차) f_{MB}