1. (1) In equilibrium $\vec{J} \times \vec{B_z} = \nabla p$. [MHD eqn 사용]

$(\vec{J} \times \vec{B} = \nabla p) \times \vec{B}$

LHS $(\vec{J} \times \vec{B}) \times \vec{B} = -(\vec{B} \times \vec{J}) \times \vec{B}$

$= -\{ \vec{J} \times (\vec{B} \cdot \vec{B}) - \vec{B} \times (\vec{J} \cdot \vec{B}) \}$

O

우리는 B_z에 수직인 $\vec{J}$ 이므로 $\vec{J} \cdot \vec{B} = 0$

$\therefore LHS = -\vec{J} \cdot B^2$

$RHS = \nabla p \times \vec{B}$

$\therefore -\vec{J} B^2 = \nabla p \times \vec{B}$ $\quad \vec{J} B^2 = \vec{B} \times \nabla p$

$\therefore \vec{J} = \dfrac{\vec{B} \times \nabla p}{B^2}$

이는 Diamagnetic current 이며

기존에 주어진 $\vec{B_z}$를 감소시키는 방향으로 형성된다.

이때 $\vec{J} = nq\vec{V_D}$ 이므로 $\vec{V_D} = \dfrac{\vec{B} \times \nabla p}{q \cdot n \cdot B^2} = \dfrac{-\nabla p \times \vec{B}}{qn B^2}$ 이다.

1. (2) $nm \dfrac{d\vec{v}}{dt} = nq(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - \nabla p + R_{ei}$ 이다

문제의 상황에서는 $\dfrac{d\vec{v}}{dt} \to 0$ $R_{ei} \to 0$ 으로 보내면

$0 = nq(\vec{v} \times \vec{B}) - \nabla p$ 이다.

O

양변에 $\times \vec{B}$ 를 곱하면

$nq(\vec{v} \times \vec{B}) \times \vec{B} - \nabla p \times \vec{B} = 0$

$-nq(\vec{B} \times \vec{v}) \times \vec{B} - \nabla p \times \vec{B} = 0$

$-nq(\vec{v} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\vec{v} \cdot \vec{B})) - \nabla p \times \vec{B}$ 이다

우리는 $V_\perp$에 대해서 고려를 하여 $\vec{v} \cdot \vec{B} = 0$

$\therefore -nq\vec{V_\perp} B^2 - \nabla p \times \vec{B} = 0$ $\quad \therefore \vec{V_\perp} = -\dfrac{\nabla p \times B^2}{nq B^2}$

이를 ion과 electron에 대해 계산하다면 $\vec{J} = n_i e \vec{V}_{\perp i} - n_e e \vec{V}_{\perp e}$ 이다

$V_{\perp i} = -\dfrac{\nabla p \times B^2}{n_i e B^2}$, $V_{\perp e} = \dfrac{\nabla p \times B^2}{+n_e e B^2}$ 에서 $\vec{J} = -\dfrac{\nabla p \times \vec{B}}{B^2}$ 이 된다.

이는 Diamagnetic current에서 주어진 B_z를 감소시키는 방향으로 형성 된다.

1.(3) i) Breakdown = weakly ionised plasma without $\vec{B}$.

$\Gamma = \pm \mu E - D\nabla n$ 의 꼴 $\mu = \frac{e}{m\nu}$ $D = \frac{KT}{m\nu}$

이 때 ① $D = \frac{KT}{m\nu}$ 이므로 $D \propto \frac{1}{\nu}$ 이다.

② $D = \frac{KT}{m\nu}$ $\nu \propto T^{\frac{1}{2}}$ 이니 $D \propto T^{\frac{1}{2}}$

③ Δx: 충돌을 통해 diffusion이 방해된다. $\Delta x \propto \lambda$ (mean free path)

④ Δt: 충돌을 통해 diffusion 되니 collision frequency를 의미한다. $\Delta t \propto \frac{1}{\nu}$

③ 이 방해되는 정도는 단위 거리당 반응 확률인 λ로 계산한다. $D \propto \Delta x \propto \lambda$

④ $D \propto \Delta t \propto \frac{1}{\nu}$

ii) Apply magnetic field $\Gamma = \pm \mu_\perp E - D_\perp \nabla n + \frac{\omega_c^2/\nu^2}{1+\omega_c^2/\nu^2}(\vec{V_E} + \vec{V_P})$

이때는, 자기장의 존재로 인하여 충돌을 통해서 Diffusion이 일어난다.

① $D_\perp = \frac{KT/m\nu}{1+\omega_c^2/\nu^2} \approx \frac{KT}{m\nu}\frac{\nu^2}{\omega_c^2}$ 이다.

$\therefore D_\perp \propto \frac{KT}{m\nu}\cdot\frac{\nu^2}{\omega_c^2} \propto \nu$ 이다.

② temperature $\propto KT.\nu$ $\nu \propto T^{\frac{1}{2}}$ 이니 $D_\perp \propto T^{\frac{3}{2}}$ 이다.

③ Δx: Larmor radius를 의미한다. $r_L = \frac{mV}{B|q|}$ 로, 자이로 운동을 하다 충돌이 생기면 Larmor radius 만큼 diffusion 한다. $D \propto \Delta x$

④ Δt: Collision frequency를 의미한다. 충돌이 잦을수록 diffusion이 잘 된다. $D \propto \frac{1}{\Delta t} \propto \nu$

iii) fully ionised $D_\perp = \frac{n\eta KT}{B^2}$ 이다.

ii)와 마찬가지로 $\vec{B}$ 에 의해 자이로 모션을 하다가 충돌로 통해서 확산이 나타난다.

① $D_\perp = \frac{n\eta KT}{B^2}$ $\eta = \frac{m\nu_{ei}}{ne^2}$ ∴ $D_\perp \propto \nu_{ei}$

② temperature $\eta \propto \frac{n}{m^2 v^3}$ 의 특성을 가진다.

$D_\perp \propto \frac{KT}{v^3} \propto \frac{KT}{(KT)^{\frac{3}{2}}} \propto T^{-\frac{1}{2}}$ (온도가 높아서 반응하지 않도 지나감)

③ i)의 경우와 마찬가지로 Larmor radius 만큼 diffusion이 된다.

$D \propto \Delta x \propto r_L$

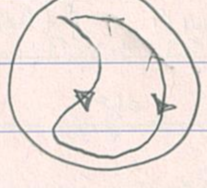
④ ii)의 경우와 마찬가지로 collision이 많이 일어나야 diffusion이 잘 된다.

$D \propto \frac{1}{\Delta t} \propto \nu$

(4) Cylindrical 형태에서 torus로 바뀌면 자기장의 변화가 가장 크게 나타난다.

→ 이 그림을 torus의 단면이라고 생각하면,

중심



(Ampere 법칙에 의해)

$B \propto \frac{1}{r}$ 로 주어진다. 따라서

$\vec{B}$ 가 벡터의 합으로 크기와 방향이 변하게 되어 자이로모션은 Banana shape를 따라가며 한다. Larmor radius로 자이로 모션을 하다가, Banana shape의 궤도를 돌게 되는 것인데, Diffusion을 충돌을 할 때 마다 Larmor radius 만큼 했다가, 장치의 scale 만큼 하는 (banana 만큼) 상황이므로 Diffusion이 매우 커진 상황이 된다. 이를 핵융합로를 만들때 고려해주어야 한다.

2. (1) $m(n_0+n_1)\left[\frac{\partial \vec{v_1}}{\partial t} + (\vec{v_1}\cdot\nabla)\vec{v_1}\right] = -e(n_0+n_1)\vec{E_1}$

$\frac{\partial(n_0+n_1)}{\partial t} + \nabla\cdot\left((n_0+n_1)\vec{v_1}\right) = 0$

$\varepsilon_0 \nabla\cdot\vec{E_1} = e(n_i - n_e)$ 라고 쓰자.

즉, $n_0, V_0=0, E_0=0$ 의 equilibrium 상황에 있다 n_1, V_1, E_1 이라는

pertubation이 $\exp i(\vec{k}\cdot\vec{r} - wt)$ 라고 생각하자.

pertubation 끼리의 곱은 매우 작아 무시한다면, 그리고 표기를 쉽게 하기 위해 벡터를 무시한다면

$mn_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -en_0E_1$

$\frac{\partial n_1}{\partial t} + \nabla\cdot(n_0v_1) = 0$

$\varepsilon\nabla\cdot E_1 = -en_1$ 이 된다. $\frac{\partial}{\partial t} = -iw$, $\nabla = ik$로 고쳐쓰면 (exp는 양쪽에 존재 하므로 생략)

$mn_0(-iw)V_1 = -en_0E_1$

$-iwn_1 + ikn_0V_1 = 0$

$\varepsilon_0 ikE_1 = -en_1$ ∴ $E_1 = \frac{-en_1}{\varepsilon_0 ik}$

$n_1 = \frac{kn_0V_1}{w}$ ∴ $E_1 = \frac{-e}{\varepsilon_0 ik}\cdot\frac{kn_0V_1}{w} = \frac{-en_0V_1}{\varepsilon_0 wi}$

∴ $mn_0(-iw)\boxed{V_1} = -e\cdot n_0\cdot\frac{-en_0}{\varepsilon_0 wi}\boxed{V_1}$

∴ $-mn_0iw = \frac{e^2n_0^2}{\varepsilon_0 w}(-i)$ ∴ $w^2 = \frac{e^2n_0^2}{-i\,mn_0\varepsilon_0}(-i) = \frac{n_0e^2}{m\varepsilon_0}$

∴ $w_p^2 = \frac{n_0e^2}{m\varepsilon_0}$

2.(2) 위의 $w_p^2 = \frac{n_0e^2}{m\varepsilon_0}$ 는 단순한 진동이고, 파동의 전파가 아니다.

파동의 전파는 w와 k의 관계인 dispersion relation으로 기술할 수 있다. 위의 상황은 매질의 없이

플라즈마의 전자가 진동하고 있는 상황이다.

예를 들어, 전자와 이온이 우연히 전기장 $\vec{E}$을 만들어서 질량이 가벼운 전자가 overshot 되어 진동하는 상황이 있다.

2. (3) 만약 $T_e \neq 0$ 이라면, 그리고 ∇n이 존재한다면

$$m n_e \left[\frac{\partial \vec{V_e}}{\partial t} + (\vec{V_e} \cdot \nabla) \vec{V_e} \right] = -e n_e \vec{E} - \nabla P$$ 로 수정이 되어야 한다,

$$P = C \cdot \rho^{\gamma} = C \cdot (nm)^{\gamma} \quad \therefore \nabla P = C \cdot \gamma \cdot m^{\gamma} \cdot n^{\gamma - 1}$$ 이 되고

$$\therefore \frac{\nabla P}{P} = \gamma \cdot \frac{\nabla n}{n}$$ 이 되고 $P = nKT$ 이므로 $\nabla P = \gamma KT \nabla n$ 이 된다.

이를 수정하면

$$m n_0 \frac{\partial V_1}{\partial t} = -e \cdot n_0 E_1 - \gamma \cdot k_b T \nabla n_1$$ 이 된다.

k_b = boltzmann 상수

$$\therefore m n_0 (-i\omega) V_1 = -e n_0 E_1 - \gamma k_b T \cdot (ik) n_1$$

나머지 식은 $E_1 = \frac{-e n_1}{\varepsilon_0 ik}$ $n_1 = \frac{k n_0 V_1}{\omega}$ 로 같다.

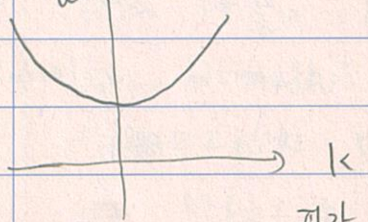
$$\therefore (-i\omega) m \cancel{n_0} \cancel{\boxed{V_1}} = -e \cancel{n_0} \cdot \left(\frac{-e}{\varepsilon_0 i \cancel{k}} \right) \left(\frac{\cancel{k} n_0 \cancel{\boxed{V_1}}}{\omega} \right) - \gamma k_b T (ik) \left(\frac{k \cancel{n_0} \cancel{\boxed{V_1}}}{\omega} \right)$$

$$(\cancel{-i}\omega) \cdot m = \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 \omega} \times (\cancel{-i}) + \gamma k_b T (\cancel{-i}) k \frac{k}{\omega}$$

$$\omega m = \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 \omega} + \frac{\gamma k_b T}{\omega} k^2 \quad \therefore \omega^2 = \frac{n_0 e^2}{m \varepsilon_0} + \frac{\gamma k_b T}{m} k^2$$

$$\therefore \omega^2 = \omega_p^2 + \frac{\gamma k_b T}{m} k^2 . \qquad 2\omega d\omega = \frac{\gamma \frac{1}{2} \cancel{m} V_{th}^2}{\cancel{m}} 2k \cdot dk$$

$$\therefore \frac{d\omega}{dk} = \frac{\gamma \cdot V_{th}^2}{2} \cdot \frac{k}{\omega} \qquad V_g = \frac{\gamma V_{th}^2}{2} \frac{1}{V_\phi} .$$



의 형태로 파가 전파된다.

아까의 경우는 thermal motion이 없어서 파가 전파되지 못했고 $\frac{\gamma k_b T}{m}$ 는 전자의 sound speed 이다.

3. ω가 실수가 아닌 복소수의 경우가 존재한다.

이로 $\omega = \omega_r + i\gamma$ 로 둔다면 $\exp i(kx - \omega t)$

$= \exp i(kx - \omega_r t) \cdot \exp(\gamma t)$ 가 된다.

따라서 γ가 양수라면 unstable한 상황이 생긴다.

MHD eqn과 continuity eq.을 perturbation을 이용하여

계산한다면 $(ku_0)^2 + 4g\frac{n'}{n} < 0$ 이면 instability가 생긴다.

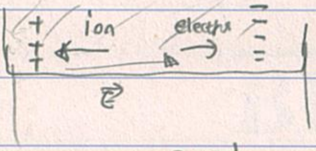
$\omega = \frac{ku_0 \pm \sqrt{(ku_0)^2 + 4g\, n'/n}}{2}$ 이기 때문이다. 이 상황을

살펴보자.

중력 $M\vec{g}$ 의 존재로 인하여 gravitational drift가 생긴다.

$V_g = \frac{M\vec{g} \times \vec{B}}{q B^2}$ 이다. 따라서 ion은 왼쪽으로,

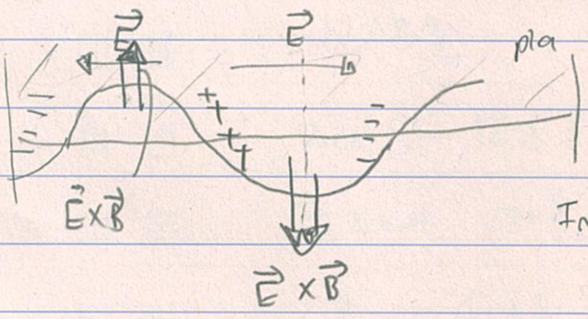
electron은 오른쪽으로 이동한다.



그렇다면 +y 방향으로 전기장이 형성된다.

$\vec{E} \times \vec{B}$ drift가 형성되는 것이다.

$V_E = \frac{\vec{E} \times \vec{B}}{B^2}$ 이다. 이때, perturbation이 주어졌다 생각하면



다음 그림과 같이 된다.

외부 perturbation에 $\vec{E} \times \vec{B}$ drift로

Instability를 보인다.