

1. (40 pts) 다음을 자세히 기술하시오. ↵

(1) SIMPLE 알고리즘의 전체적인 절차를 설명하시오. ↵

(2) PISO 알고리즘의 전체적인 절차를 설명하시오. ↵

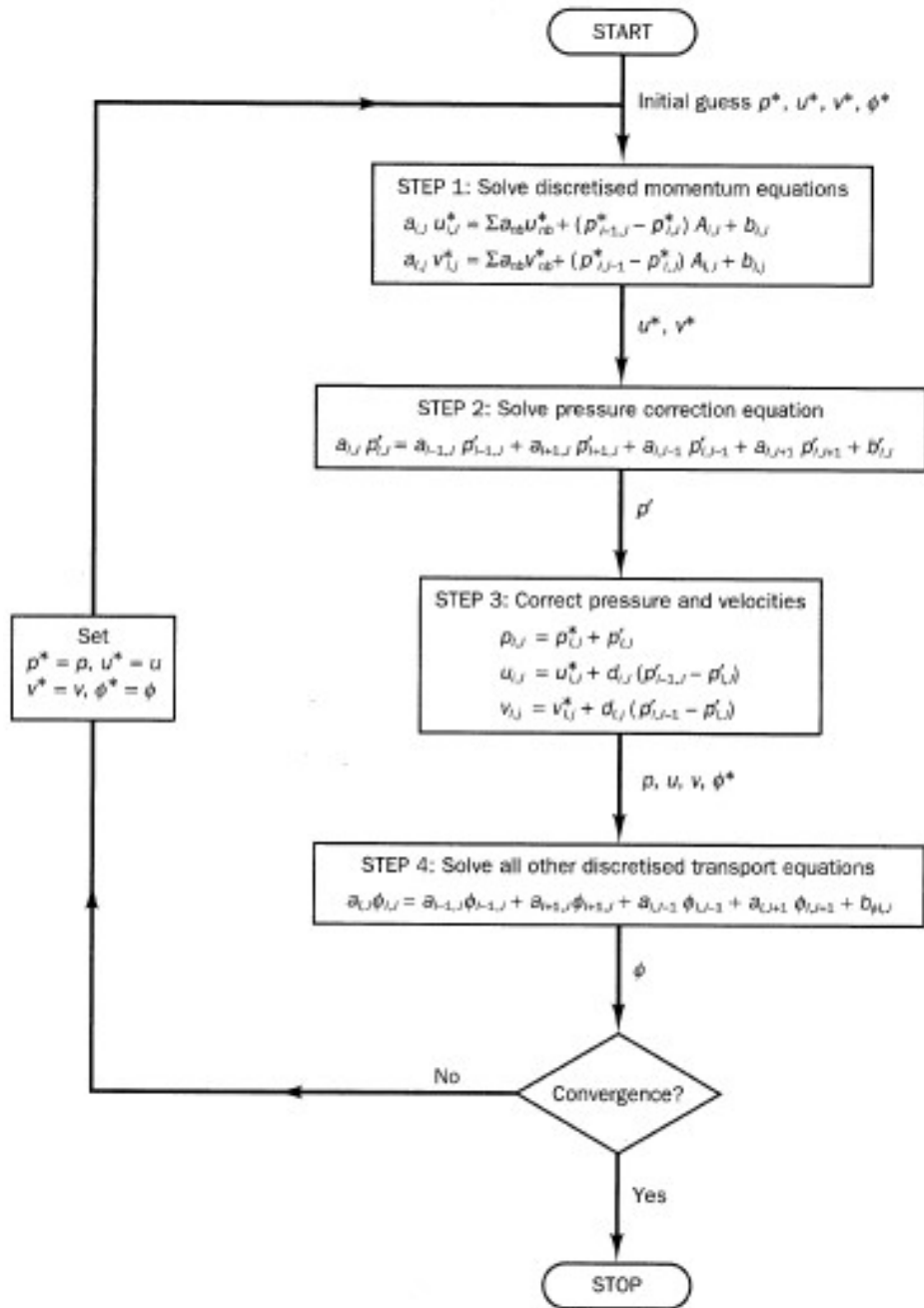
(3) 두 알고리즘의 유사점과 차이점을 설명하시오. ↵

(4) 각각의 장단점을 분석하시오. ↵

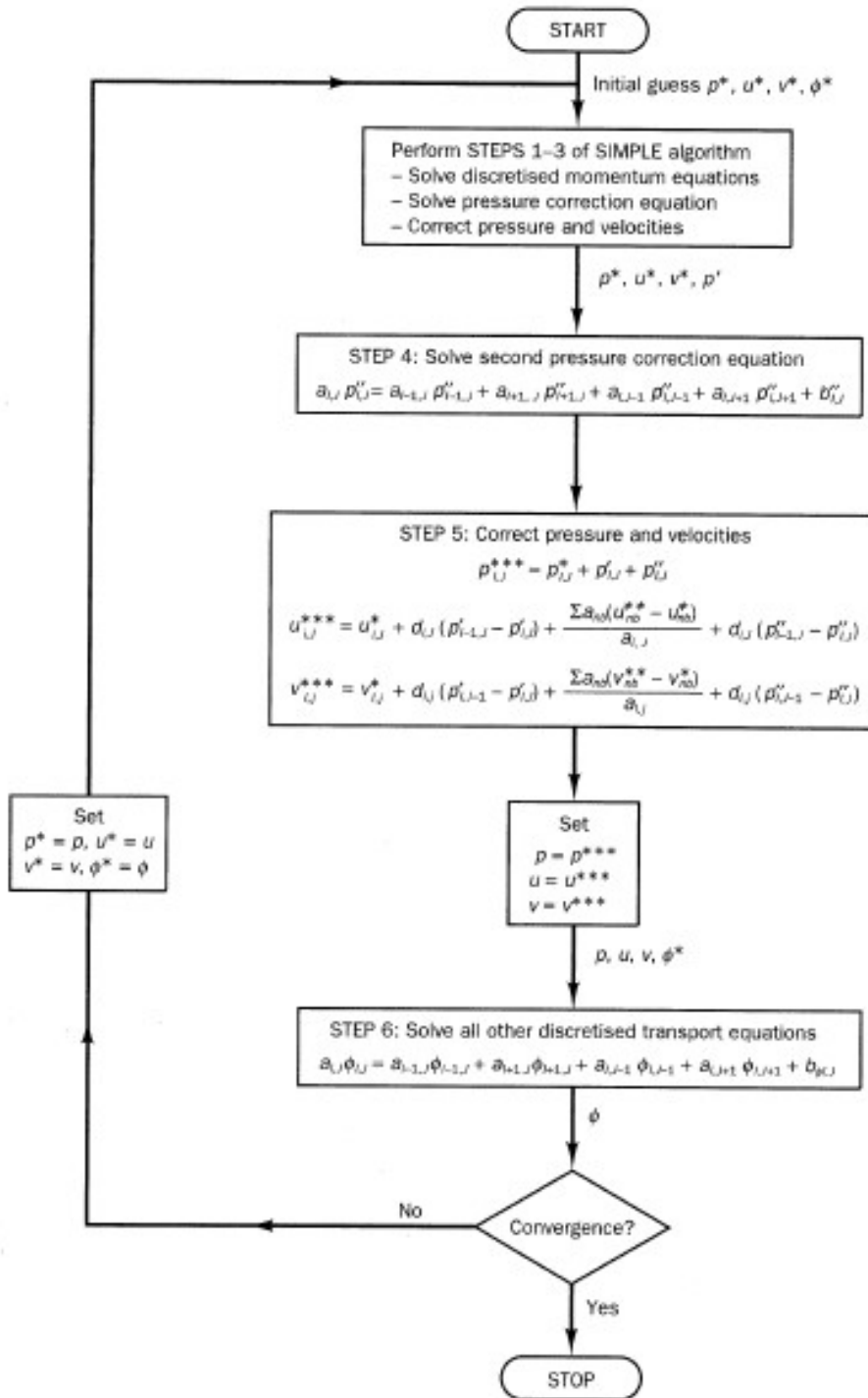
(5) 두 방법에서 under-relaxation이 적용되는 방법을 설명하고 그 장단점을 논하시오. ↵

기준	배점
SIMPLE 알고리즘의 전체적인 절차를 설명하시오.	10
PISO 알고리즘의 전체적인 절차를 설명하시오.	10
두 알고리즘의 유사점과 차이점을 설명하시오. 유사점(3점), 차이점(3점)	6
각각의 장단점을 분석하시오. 장점(3점), 단점(3점)	6
두 방법에서 under-relaxation이 적용되는 방법을 설명하고 그 장단점을 논하시오. 적용되는 방법(4점), 장점(2점), 단점(2점)	8

(1) SIMPLE 알고리즘의 전체적인 절차를 설명하시오.



(2) PISO 알고리즘의 전체적인 절차를 설명하시오.



(3) 두 알고리즘의 유사점과 차이점을 설명하시오.

추정된 또는 중간 단계의 압력장  $p^*$ 를 가지고 SIMPLE 알고리즘과 동일한 방법을 사용하여 이산화 운동량 방정식 (6.12)와 (6.13)을 풀면, 속도 성분  $u^*$ 와  $v^*$ 를 구하게 된다.

압력장  $p^*$ 가 정확하지 않으면,  $u^*$ 와  $v^*$ 는 연속성을 만족시키지 않는다. 이산화 연속 방정식을 만족시키는 속도장 ( $u^{**}$ ,  $v^{**}$ )를 제공하기 위해 SIMPLE의 첫 번째 수정 단계를 도입한다. 그 결과 식은 SIMPLE의 속도 수정방정식 (6.21)~(6.22)와 동일하지만, PISO 알고리즘에는 추가 수정 단계가 있으므로 약간 다른 표기를 사용한다.

SIMPLE 알고리즘에서와 같이 식 (6.50)~(6.51)을 이산화 연속방정식 (6.29)에 대입하면, 압력 수정방정식 (6.32)와 계수 및 소스 항을 유도할 수 있다. PISO 방법의 맥락에서 식 (6.32)를 첫 번째 압력 수정방정식이라 부른다. 이 방정식을 풀어 첫 번째 압력 수정장  $p'$ 를 얻는다. 일단 압력 수정을 알게 되면, 식 (6.50)~(6.51)을 이용하여 속도 성분  $u^{**}$ 와  $v^{**}$ 를 구할 수 있다.

SIMPLE 알고리즘을 향상시키기 위해 PISO는 두 번째 수정 단계를 수행한다.  $u^{**}$ 와  $v^{**}$ 에 대한 이산화 운동량 방정식은 다음과 같다.

(4) 각각의 장단점을 분석하시오.

- SIMPLE 알고리즘 장단점

SIMPLE 알고리즘은 상대적으로 단순 명료하고, 많은 CFD 방법에서 성공적으로 사용되어 왔다. SIMPLE의 유사 알고리즘은 향상된 수렴성으로 인해 계산 노력을 줄일 수 있다. SIMPLE에서 압력 수정  $p'$ 는 속도 수정에는 만족스럽지만, 압력을 수정하는 데는 그다지 좋지 않다. 따라서 개선된 SIMPLER 방법은 압력 수정을 오

- PISO 알고리즘 장단점

Jang *et al.*(1986)은 다양한 정상 유동 문제에 대해 PISO, SIMPLER 및 SIMPLEC을 종합적으로 비교하였다. 그 결과, 운동량 방정식이 스칼라 변수에 연계되지 않는 문제의 경우 PISO는 강진한 수렴 거동을 보여주었고 SIMPLER 및 SIMPLEC보다 연산 노력이 적게 필요하였다. 하지만, 스칼라 변수들이 속도와 밀접하게 연계될 때에는 PISO가 다른 방법에 비해 큰 장점을 갖지 못하였다. 강하게 결합된

(5) 두 방법에서 under-relaxation이 적용되는 방법을 설명하고 그 장단점을 논하시오.

반복계산 과정에서 하향이완(under-relaxation)을 사용하지 않으면, 압력 수정방정식이 발산하기 쉽다. 따라서 새롭게 개선된 압력  $p^{new}$ 를 다음과 같이 구한다.

$$p^{new} = p^* + \alpha_p p' \quad (6.33)$$

여기서,  $\alpha_p$ 는 압력에 대한 하향이완 계수이다. 만일  $\alpha_p = 1$ 을 선택하면, 추정된 압력장  $p^*$ 는  $p'$ 만큼 수정된다. 하지만, 추정된  $p^*$ 가 최종 해와 크게 다르면, 압력 수정  $p'$ 이 자주 매우 큰 값을 갖게 되고 안정된 연산이 어려워진다. 만약  $\alpha_p = 0$ 이면 전혀 수정을 하지 않게 되며, 이 또한 바람직하지 않다. 만약 0에서 1 사이의 값을  $\alpha_p$ 로 취하면, 추정 압력  $p^*$ 에 수정 압력  $p'$ 의 일부를 더하여 수정하게 된다. 이때  $\alpha_p$  값은 반복 과정에서 해가 개선될 수 있도록 충분히 커야 하지만, 또한 안정된 연산을 보장하기 위해 충분히 작아야 한다.

속도 역시 하향이완 시키며 반복계산을 통해 개선된 속도 성분  $u^{new}$ 와  $v^{new}$ 를 다음 식으로 구할 수 있다.

$$u^{new} = \alpha_u u + (1 - \alpha_u) u^{(n-1)} \quad (6.34)$$

$$v^{new} = \alpha_v v + (1 - \alpha_v) v^{(n-1)} \quad (6.35)$$

여기서,  $\alpha_u$ 와  $\alpha_v$ 는 속도  $u$ 와  $v$ 의 하향이완 계수,  $u$ 와  $v$ 는 이완 없이 수정된 속도 성분,  $u^{(n-1)}$ 과  $v^{(n-1)}$ 은 이전 반복 단계에서 얻어진 속도값을 나타낸다. 약간의

비용 측면에서 효과적으로 해석하기 위해 적절한 하향이완 계수  $\alpha$ 를 선정하는 것이 매우 중요하다.  $\alpha$ 가 너무 크면 반복해가 진동하거나 심지어 발산하는 반면, 너무 작으면 해가 매우 천천히 수렴하게 된다. 불행하게도 하향이완 계수의 최적 값은 유동에 따라 다르며, 각 사례별(case-by-case)로 최적 값을 찾아야 한다. 7장과 8장에서 하향이완 계수의 사용에 대해 추가적으로 논의할 예정이다.

2. (30 pts) 점반복법을 활용하여 다음의 연립방정식을 푸시오.↵

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 7 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

(1) Jacobi 반복법↵

(2) Gauss-Seidel 반복법↵

기준	배점
Jacobi 반복법 Jacobi 반복법의 개념을 이해하고 사용 유무(15점)	15
Gauss-Seidel 반복법 Gauss-Seidel 반복법 개념을 이해하고 사용 유무(15점)	15

반복법에서는 첫 번째 식에서  $x_1$ 이 좌변에 있도록, 두 번째 식에서  $x_2$ 가 좌변에 있도록, 세 번째 식에서는  $x_3$ 이 좌변에 있도록 식을 다시 정리한다. 정리된 식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} x_1 &= (7 - x_2 - x_3)/2 & (7.15) \\ x_2 &= (2 + x_1 + x_3)/3 \\ x_3 &= (5 - x_1 + x_2)/2 \end{aligned}$$

(1) Jacobi 반복법

Jacobi 반복법의  $k$ 번째 반복계산에서 좌변의  $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}$  등의 값은 이전 반복계산 ( $k-1$ )에서 구한 최근 값  $x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}$  등을 우변에 대입하여 계산한다—여기서, 반복횟수  $k$ 는 괄호로 묶은 위 첨자로 표시하였다. 위의 예제에서는 초기값으로  $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = 0$ 을 사용한다고 하자. 이 값들을 식 (7.15)에 대입하면 다음과 같은 값을 얻는다.

$$x_1^{(1)} = 3.500 \quad x_2^{(1)} = 0.667 \quad x_3^{(1)} = 2.500$$

두 번째 반복계산에서는 위의 값들을 식 (7.15)의 우변에 대입한다. 이러한 과정을 반복하면 표 7.10에 있는 결과를 얻게 된다.

표 7.10 Jacobi 반복법으로 구한 연립방정식 (7.14)의 해

Iteration number	0	1	2	3	4	5	...	17
$x_1$	0	3.5000	1.9167	1.6250	1.2292	1.1563	...	1.0000
$x_2$	0	0.6667	2.6667	1.6667	2.1667	1.9167	...	2.0000
$x_3$	0	2.5000	1.0833	2.8750	2.5208	2.9688	...	3.0000

17번의 반복계산 후에  $x_1 = 1.0000$ ,  $x_2 = 2.000$ ,  $x_3 = 3.0000$ 과 같은 값을 얻게 되고 반복계산 횟수의 증가에 따라 해의 변화가 없다는 것을 확인할 수 있다. 이 값들을 원래 시스템 (7.14)에 대입하면, 그 결과가 답에서 주어진 소수점 4자리 까지 정확하다는 것을 보여줄 수 있다.

이러한 과정을 일반화하기 위해서  $n$ 개의 방정식과  $n$ 개의 미지수를 가지는  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ 와 같은 행렬 형태, 또는 행렬  $\mathbf{A}$ 의 계수들이 명시적(explicitly)으로 나타나는 다음과 같은 식을 고려한다.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (7.16)$$

임의의 반복 단계에서 시스템의  $i$ 번째 식의  $x_i$ 를 포함하는 항은 좌변에, 나머지 항들은 모두 우변에 위치하도록 식을 다음과 같이 정리한다.

$$a_{ii}x_i = b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (7.17)$$

양변을  $a_{ii}$ 로 나누면 반복계산 단계 ( $k$ )에서 이전 반복계산 ( $k-1$ )에서 구한  $x_j$  값들을 사용하여 우변을 계산하고 그로부터 좌변을 얻을 수 있다는 것을 알 수 있다.

$$x_i^{(k)} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left( \frac{-a_{ij}}{a_{ii}} \right) x_j^{(k-1)} + \frac{b_i}{a_{ii}} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (7.18)$$

식 (7.18)은 Jacobi법의 반복계산식(iterative equation for the Jacobi method)으로서, 실제 계산에 사용되는 형태로 나타낸 것이다. 행렬식 형태로 이 식은 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c} \quad (7.19a)$$

여기서,  $\mathbf{T}$  = 반복행렬

그리고  $\mathbf{c}$  = 상수 벡터

반복행렬(iteration matrix)에서 계수  $T_{ij}$ 는 다음과 같다.

$$T_{ij} = \begin{cases} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} & \text{if } i \neq j \\ 0 & \text{if } i = j \end{cases} \quad (7.19b)$$

상수 벡터의 요소들은

$$c_i = \frac{b_i}{a_{ii}} \quad (7.19c)$$

## (2) Gauss-Seidel 반복법

식 (7.15)를 다시 검토해 보면서 Gauss-Seidel법에 대해 살펴본다. Jacobi법에서는 우변이 이전 반복계산 단계의 결과 또는 초기치를 사용하여 계산하였다. 만약 모든 우변들이 동시에 계산된다면 더 이상 고려해야 할 것이 없지만 대부분의 컴퓨터에서는 연산은 순차적으로 이루어진다. 따라서 첫 번째 반복계산 단계에서는 초기치  $x_2^{(0)} = 0$ 과  $x_3^{(0)} = 0$ 을 사용하여 일련의 계산을 시작하여 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$x_1^{(1)} = (7 - x_2^{(0)} - x_3^{(0)})/2 = (7 - 0 - 0)/2 = 3.5$$

다음, 두 번째 식  $x_2 = (2 + x_1 + x_3)/3$ 을 계산하게 된다. 이 식의 우변에  $x_1$ 과  $x_3$

이 있는 것을 알 수 있다. Jacobi법에서는 초기치로부터  $x_1^{(0)} = 0$ 과  $x_3^{(0)} = 0$ 을 사용하지만 순차적인 연산의 결과로 갱신된  $x_1$ 의 값  $x_1^{(1)} = 3.5$ 을 이미 얻었다는 것을 주목하자. Gauss-Seidel법은 이렇게 최근에 계산된 값을 바로 사용하면서 계산을 진행한다. 따라서 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$x_2^{(1)} = (2 + x_1^{(1)} + x_3^{(0)})/3 = (2 + 3.5 + 0)/3 = 1.8333$$

세 번째 식  $x_3 = (5 - x_1 + x_2)/2$ 를 계산하기 위해서 Gauss-Seidel법에서는 우변을 가장 최근에 얻은 값(즉,  $x_1^{(1)} = 3.5$ 와  $x_2^{(1)} = 1.8333$ )을 사용하여 계산을 진행하며 그 결과는 아래와 같다.

$$x_3^{(1)} = (5 - x_1^{(1)} + x_2^{(1)})/2 = (5 - 3.5 + 1.8333)/2 = 1.6667$$

두 번째 그리고 이어지는 반복계산 단계에서 동일한 과정을 따른다. 그 결과는 표 7.11에 나타나 있다.

표 7.11 Gauss-Seidel 법을 사용한 연립방정식 (7.14)의 해

Iteration number	0	1	2	3	4	5	...	13
$x_1$	0	3.5000	1.7500	1.3333	1.1181	1.0475	...	1.0000
$x_2$	0	1.8333	1.8056	1.9537	1.9761	1.9922	...	2.0000
$x_3$	0	1.6667	2.5278	2.8102	2.9290	2.9724	...	3.0000



최종 결과는 13번의 반복계산 후에 얻어진다. Ralston and Rabinowitz(1978)는 Gauss-Seidel법이 더 빨리 수렴하기 때문에 Jacobi법보다 더 좋다고 언급하고 있다.

위에서 소개한 예는 쉽게 일반화할 수 있으며, Gauss-Seidel 법에 대한 반복계산 식(iteration equation for the Gauss-Seidel method)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^{i-1} \left( \frac{-a_{ij}}{a_{ii}} \right) x_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^n \left( \frac{-a_{ij}}{a_{ii}} \right) x_j^{(k-1)} + \frac{b_i}{a_{ii}} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(7.20)

행렬 형태로는 다음과 같다.

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{T}_1 \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{T}_2 \mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{c}$$

(7.21a)

행렬  $\mathbf{T}_1$ 과  $\mathbf{T}_2$ 의 계수들은 아래와 같으며

$$T_{1ij} = \begin{cases} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} & \text{if } i > j \\ 0 & \text{if } i \leq j \end{cases}$$

(7.21b)

$$T_{2ij} = \begin{cases} 0 & \text{if } i \geq j \\ -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} & \text{if } i < j \end{cases}$$

(7.21c)

상수 벡터의 성분들은 이전과 동일하다.

$$c_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$$

(7.21d)

3. (30 pts) CFD 해석의 오차와 불확실성에 관한 다음의 물음에 답하십시오.↵
- (1) Verification과 validation을 정의하고 각각 어떤 것들로 구성되는지 기술하십시오.↵
- (2) 격자수렴지표(GCI)를 어떻게 구하는지 기술하십시오.↵
- (3) 세 개 이상의 연속적으로 세밀화된 격자에서 오차 감소의 차수를 구하는 방법을 기술하십시오.↵

기준	배점
Verification과 validation을 정의하고 각각 어떤 것들로 구성되는지 기술하십시오. Verification 정의 및 구성 (7점), Validation 정의 및 구성(7점)	14
격자수렴지표(GCI)를 어떻게 구하는지 기술하십시오.	8
세 개 이상의 연속적으로 세밀화된 격자에서 오차 감소의 차수를 구하는 방법을 기술하십시오.	8

- (1) Verification과 validation을 정의하고 각각 어떤 것들로 구성되는지 기술하십시오.

**검증 (verification)**

검증 과정은 오차의 정량화를 포함한다. 컴퓨터 코딩 오차와 사용자 오차를 무시한 상태에서, 반올림 오차, 반복 수렴 오차와 차분 오차를 측정한다.

- 반올림 오차(roundoff error)는 언어지 CFD 결과를 다른 기계 정밀도 수준(예를 들어, 단일 정밀도(포트란에서 7개의 유효숫자) 또는 배 정밀도(포트란에서 16개의 유효숫자))을 사용하여 비교함으로써 평가될 수 있다.
- 반복 수렴 오차(iterative convergence error)는 관심 있는 목표 변수(예를 들어, 계산된 압력 강하 또는 내부 유동에서 질량 유속, 외부 유동에서 물체에 작용하는 힘, 하나 또는 그이상의 관심 위치에서 속도)의 잔차의 변화 영향을 체계적으로 살펴봄으로써 정량화할 수 있다. 계산 종료를 위한 잔차 기준을 달리 하였을 때 얻어지는 목표량의 차이는 언어지 해가 완전히 수렴된 해에 얼마나 가까운가를 나타내 주는 척도가 된다.
- 차분 오차(discretisation error)는 공간과 시간 격자의 체계적인 조밀화로부터 정량화한다. 높은 수준의 CFD 작업에서는 관심이 있는 양과 전체적인 유동장에 대한 차분 오차가 두 번 또는 세 번의 연속적인 격자 조밀화 단계에서 단조 감소를 보여주는 것을 목표로 해야 한다.

### 타당성 확인 (validation)

타당성 확인 과정은 입력의 불확실성과 물리적 모델의 불확실성에 대한 정량화를 포함한다.

- 입력 불확실성(input uncertainty)은 민감도 해석이나 불확실성 해석에 의해서 예측될 수 있다. 이것은 평균값이나 예상되는 변동에 근거한 확률 분포로부터 추출된 입력값을 사용하여 CFD 모델에 대한 해석을 여러 번 수행하는 것을 포함한다. 어떤 목표량에 대해 관찰된 변동은 그 값의 예상 범위에 대한 상한치와 하한치를 만들기 위해 사용할 수 있기 때문에 입력 불확실성에 대한 유용한 지표가 될 수 있다. 민감도 해석에서 입력 아이템 각각의 변동 효과는 개별적으로 분석한다. 한편, 불확실성 분석에 있어서는 다른 종류의 입력 자료가 동시에 변할 때 생길 수 있는 상호작용을 고려하여 Monte Carlo 기법을 적용한 CFD 실행 계획을 수립한다.
- Oberkampf and Trucano(2002)는 물리적 모델링의 불확실성(physical modeling uncertainty)에 대한 정량적인 평가를 위해서는 CFD 결과와 수준 높은 실험결과와의 비교를 필요로 한다고 주장하였다. 또한 그들은 타당성 확인이 의미 있으려면, (i) 모든 수치 오차, (ii) 입력 불확실성 및 (iii) 비교에 사용되는 실험결과와 불확실성 등에 대한 올바른 정량적인 추정치가 있어야만 한다고 언급하였다.

### (2) 격자수렴지표(GCI)를 어떻게 구하는지 기술하시오.

Roache(1997)는 식 (10.7a-b)의 추정치는 근사적이며, 또한 차분 오차의 한계를 계산해 주지는 않는다고 하였다. 그는 CFD 해의 수치 오차 정량화를 위한 격자수렴지표(grid convergence indicator, GCI)를 제안했다.

$$GCI_U = F_S E_U \quad (10.8)$$

여기서,  $F_S$ 는 안전계수이다.

안전계수의 보수적인 값으로  $F_S = 3$ 가 추천된다.

### (3) 세 개 이상의 연속적으로 세밀화된 격자에서 오차 감소의 차수를 구하는 방법을 기술하시오.

또한, Roache(1997)는 수치 해의 실제 절단 오차가 적용된 기본 수치기법의 형식적인 차수  $p$ 에 정확하게 일치하며 감소할 것이라고 당연하게 여기면 안 된다는 것을 지적하였다. 그는 수치해석 기법에서 사소하게 보이는 문제로 인해 그렇지 않다는 것을 보여주는 몇 가지 예를 제시하였고, 세 개의 연속적으로 세밀화된 격자에 대해서 관찰된 오차의 감소 차수를 사용하여 이를 주장하였다. 그는 일정한 조밀화 비  $r = h_2/h_1 = h_3/h_2$ 에 대해서 관찰된 절단 오차 감소의 차수  $\bar{p}$ 가 다음과 같음을 발견하였다.

$$\tilde{p} = \ln\left(\frac{U_3 - U_2}{U_2 - U_1}\right) / \ln(r) \quad (10.9)$$

여기서,  $U_2 - U_1$ 은 중간 격자와 성긴 격자의 해 사이의 차이이고,  $U_3 - U_2$ 는 조밀한 격자와 중간 격자의 해 사이의 차이이다.