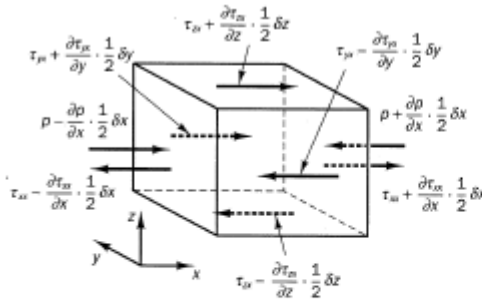


1. (20 pts) 임의의 미소 체적에 대해 뉴턴 유체 유동에 대한 Navier-Stokes 방정식을 유도하시오. x 방향 성분을 우선 유도하고 나머지 y와 z 방향 성분 방정식도 기술하시오.

기준	배점
임의의 미소 체적을 이용한 N-S 방정식 유도	15
x, y, z 성분 기술	5

뉴턴의 제2법칙은 유체입자의 운동량 변화는 입자에 가하는 힘들의 합과 같음을 표현한 것이다.

$$\boxed{\text{유체입자의 운동량 증가율}} = \boxed{\text{유체입자에 가해지는 전체 힘}}$$



한 쌍의 면 (E, W)에 작용하는 힘들의 전체 합은

$$\begin{aligned} & \left[\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) - \left(\tau_{xx} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta y \delta z + \left[- \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right. \\ & \left. + \left(\tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \frac{1}{2} \delta x \right) \right] \delta y \delta z = \left(- \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \right) \delta x \delta y \delta z \quad (2.12a) \end{aligned}$$

과 같고, 한 쌍의 면 (N, S)에 작용하는 힘들의 전체 합은

$$- \left(\tau_{yx} - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \delta z + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \frac{1}{2} \delta y \right) \delta x \delta z = \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \delta x \delta y \delta z \quad (2.12b)$$

그리고 면 T 와 B 에 작용하는 힘들의 전체 합은

$$- \left(\tau_{zx} - \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) \delta x \delta y + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \frac{1}{2} \delta z \right) \delta x \delta y = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \delta x \delta y \delta z \quad (2.12c)$$

와 같다. 이들 표면응력에 기인한 단위 체적당의 전체 힘은 식 (2.12a), (2.12b) 및 (2.12c)를 합한 뒤 체적 $\delta x \delta y \delta z$ 으로 나눈 것과 같다.

운동량 방정식의 x -방향 성분은 식 (2.11)로 표현한 x -방향 운동량의 변화율을 표면응력에 의한 x -방향 힘[식 (2.13)]과 소스에 의한 x -방향 운동량 변화율을 합한 것과 같게 두면 얻어진다:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \frac{\partial(-p + \tau_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z} + S_{Mx} \quad (2.14a)$$

운동량 방정식의 y -방향 성분은

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial(-p + \tau_{yy})}{\partial y} + \frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z} + S_{My} \quad (2.14b)$$

으로, 운동량 방정식의 z -방향 성분은

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial(-p + \tau_{zz})}{\partial z} + S_{Mz} \quad (2.14c)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} & \tau_{yy} &= 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} & \tau_{zz} &= 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \\ \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\} & \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \mu \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right\} \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu \left\{ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right\} \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + S_{Mx} \end{aligned} \quad (2.32a)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + S_{My} \end{aligned} \quad (2.32b)$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dw}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial z} \left[2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \right] + S_{Mz} \end{aligned} \quad (2.32c)$$

많은 경우 점성응력을 아래와 같이 재정리하는 것이 유용하다.

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x} \left[2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\
 & \quad + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} (\lambda \operatorname{div} \mathbf{u}) \right] \\
 &= \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} \mathbf{u}) + [s_{Mx}]
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} u) + S_{Mx}} \quad (2.34a)$$

$$\boxed{\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} v) + S_{My}} \quad (2.34b)$$

$$\boxed{\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} w) + S_{Mz}} \quad (2.34c)$$

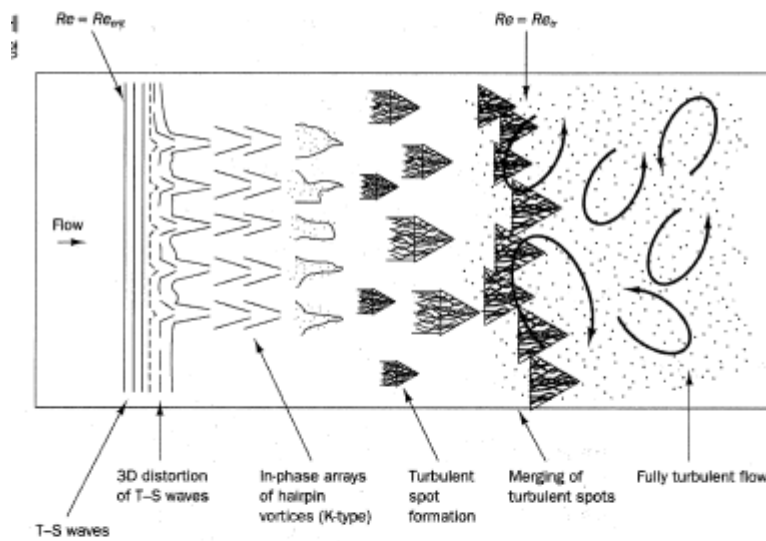
2. (20 pts) 층류에서 난류로 전이하는 과정을 평판의 유동을 예로 들어 설명하시오.

기준	배점
현상 설명	10
T-S(Tollmien-Schlichting) 웨이브, Hairpin 모양의 와류, Turbulent spot의 병합	10

평판 경계층: 변곡점 없는 유동의 예

변곡점이 없는 속도 곡선을 가진 유동의 경우, 점성 불안정성 이론에 의하면, 미소 교란의 증폭을 보이는 유한한 크기의 영역, 즉 레이놀즈수가 $Re_\delta = 1,000$ (여기서 δ 는 경계층 두께) 정도되는 영역이 존재하는 것으로 확인된다. 평판 상의 발달 유동(developing flow)이 바로 그러한 유동에 속하며, 전이의 과정에 대해 광범위한 연구가 수행되어져 왔다.

이벤트의 정확한 순서는 유입 유동의 교란의 정도(level)에 민감하다. 그러나 유동 시스템이 충분히 매끄러운 조건을 날도록 만든다면, 경계층 유동이 비교적 긴 파장의 교란에 대해 불안정해지는 현상을 확인할 수 있다. 전이와 완전 발달 난류의 과정을 스케치한 것이 그림 3.6이다.



여러 가지 실험에 의해 만약 유입 유동이 층류이면 초기 선형 불안정성이 $Re_{x, crit} = 91,000$ 정도에서 발생한다는 이론적 예측이 맞다는 것이 입증되고 있다. 불안정한 2차원 교란을 Tollmien-Schlichting(T-S) 웨이브(wave)라 부른다. 이들 교란은 주 유동 방향으로 증폭한다.

이어지는 불안정성의 발전은 최대의(선형) 증폭을 보이는 웨이브의 진폭에 달려 있다. 증폭은 레이놀즈수의 한정된 범위 내에서 일어나기 때문에 증폭된 웨이브가

더 하류에서 감쇄하여 다시 층류로 유지될 수도 있는 것이다. 만약 진폭이 충분히 크다면 2차적인 비선형 불안정성 메커니즘이 작용하여 T-S 웨이브가 3차원적이 되고 결국 머리핀(hairpin) 모양의 와류로 발전해 나간다. 가장 흔한 메커니즘인 이른바 K-형 천이에서 머리핀 와류는 정렬을 하게 된다.

머리핀 와류의 상부에는 강한 전단 영역이 형성되고, 이것이 더욱 강해져서 늘여지고 말려지는 현상으로 발전된다. 천이의 그 다음 과정은 강한 전단 층이 마치 폭포처럼 더욱 작은 단위로 파괴(cascading breakdown)하게 되는데, 이 경우 측정 가능한 파라미터의 주파수 스펙트럼은 무질서한 성질을 보여준다. 이렇게 큰 변동과 강한 국지성을 보이는 영역은 고체 벽면 근처에서 시공간적으로 매우 무질서하게 발생한다. 이들 영역에서 삼각형 난류 스폿(triangular turbulent spot)이 폭발한다. 이들 난류 스폿은 유동과 더불어 이동하고 옆으로 퍼지면서 성장하며 이에 따라 층류형태를 보이는 유체가 점차 더 많이 난류 운동에 참여하도록 유도한다.

평판 경계층의 천이는 활동적인 위치(active site)에서 난류 스폿이 형성되고 이어서 서로 다른 스폿들이 합쳐져서 유동과 더불어 하류로 이동하는 특징을 보인다. 이것은 레이놀즈수 $Re_{s,lr} \approx 10^6$ 에서 일어난다. 그림 3.7은 평판 경계층에서 발생하는 이러한 과정을 스냅샷으로 보여주는 평면도이다.

3. (30 pts) 비압축성 유동을 위한 RANS 방정식에 필요한 조건을 나열하고 x 방향 성분을 유도 하시고. 방정식에서 각각의 항들이 의미하는 바를 설명하시오.

기준	배점
x방향 RANS 방정식 유도	15
x방향 RANS 방정식	5
각각의 항들이 의미	10

순간 연속방정식과 Navier-Stokes 방정식을 직교좌표계 시스템에서 고려해 본다. 이에 따라 속도 \mathbf{u} 의 x -성분은 u , y -성분은 v , z -성분은 w 이다.

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \text{div}(u\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \text{div}(\text{grad}(u)) \quad (3.24a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \text{div}(v\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \text{div}(\text{grad}(v)) \quad (3.24b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \text{div}(w\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \text{div}(\text{grad}(w)) \quad (3.24c)$$

이 방정식 시스템은 모든 난류 흐름에 적용된다. 여기서는, 레이놀즈 분해를 적용하여 변동성분이 평균 유동에 미치는 영향에 대해 살펴보고자 한다. 즉, 유동 변수 \mathbf{u} (따라서 그 성분 u, v, w)와 p 를 평균 양과 변동성분의 합으로 표현한다.

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}' \quad u = U + u' \quad v = V + v' \quad w = W + w' \quad p = P + p'$$

이와 유사하게 x -운동량 방정식 (3.24a)를 처리한다. 각 항의 시간 평균은 아래와 같이 정리된다.

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial t}} = \frac{\partial U}{\partial t} \quad \overline{\text{div}(u\mathbf{u})} = \text{div}(U\mathbf{U}) + \text{div}(\overline{u'\mathbf{u}'})$$

$$-\overline{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} \quad \overline{\nu \text{div}(\text{grad}(u))} = \nu \text{div}(\text{grad}(U))$$

이 결과들을 대입하면 시간-평균의 x -운동량 방정식은 아래와 같이 된다.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \text{div}(U\mathbf{U}) + \text{div}(\overline{u'\mathbf{u}'}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \text{div}(\text{grad}(U)) \quad (3.26a)$$

(I) (II) (III) (IV) (V)

식 (3.24b)와 (3.24c)에 이러한 과정을 적용하면 시간-평균의 y -운동량 방정식과 시간-평균의 z -운동량 방정식을 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \text{div}(V\mathbf{U}) + \text{div}(\overline{v'\mathbf{u}'}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \text{div}(\text{grad}(V)) \quad (3.26b)$$

(I) (II) (III) (IV) (V)

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div}(W\mathbf{U}) + \text{div}(\overline{w'\mathbf{u}'}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \text{div}(\text{grad}(W)) \quad (3.26c)$$

(I) (II) (III) (IV) (V)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \text{div}(UU) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \text{div}(\text{grad}(U)) + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(-\rho \overline{u'^2})}{\partial x} + \frac{\partial(-\rho \overline{u'v'})}{\partial y} + \frac{\partial(-\rho \overline{u'w'})}{\partial z} \right] \quad (3.27a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \text{div}(VU) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \text{div}(\text{grad}(V)) + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(-\rho \overline{u'v'})}{\partial x} + \frac{\partial(-\rho \overline{v'^2})}{\partial y} + \frac{\partial(-\rho \overline{v'w'})}{\partial z} \right] \quad (3.27b)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \text{div}(WU) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \text{div}(\text{grad}(W)) + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(-\rho \overline{u'w'})}{\partial x} + \frac{\partial(-\rho \overline{v'w'})}{\partial y} + \frac{\partial(-\rho \overline{w'^2})}{\partial z} \right] \quad (3.27c)$$

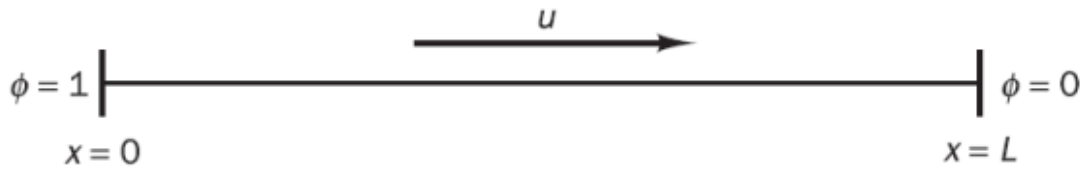
식 (3.26a-c)의 항 (I), (II), (IV) 및 (V)는 순간 방정식 (3.24a-c)에서도 있었지만, 시간 평균의 과정으로 시간-평균 운동량 방정식에는 새로운 항(III)이 생겨났음에 유의하자. 이 항은 변동 속도들 사이의 곱에 의한 것이며 난류 에디로 인한 대류적인 운동량 수송에 기인한 것이다. 식 (3.26a-c)의 이 항들은 우변으로 넘기고, 그것을 난류로 인해 평균 속도 성분 U , V 및 W 에 추가적으로 가해지는 새로운 난류 응력의 역할로 이해하는 것이 보통이다.

필터링 된 운동량 방정식은 RANS 운동량 방정식 (3.26a-c) 혹은 (3.27a-c)와 매우 유사하다. 항 (I)은 필터링 된 x -, y - 및 z -운동량의 변화율이다. 항 (II)와 (IV)는 필터링 된 x -, y - 및 z -운동량의 대류 및 확산 플럭스이다. 항 (III)은 필터링 된 압력의 x -, y - 및 z -방향 구배이다. 마지막 항 (V)는 필터링 연산에 의한 것으로서, 마치 RANS 운동량 방정식에서 시간 평균 연산에 따른 레이놀즈 응력과 같다. 이것들은 응력 세트 τ_{ij} 의 하나의 발산(divergence)으로 취급할 수 있다. 첨자를 사용하면 이들 항의 i -성분은 다음과 같다.

4. (30 pts) 5개의 등간격 격자점과 QUICK 차분법을 이용하여 $u = 0.2 \text{ m/s}$ 인 경우에 대해 다음의 문제를 푸시오.

그림과 같이 1차원 영역을 통해 대류와 확산으로 물리량 ϕ 가 수송된다. 지배방정식은

$\frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right)$ 이고 경계조건은 그림에 나온 바와 같다. ϕ 의 분포를 x 의 함수로 계산하시오.

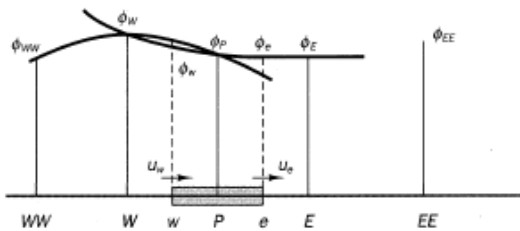


기준	배점
ϕ 의 분포를 x 의 함수로 계산	15
QUICK 차분법 이용	10
지배방정식에 대한 식 전개	5

2차 상류차분법 (quadratic upwind differencing scheme, QUICK)

대류 현상에 대한 Leonard(1979)의 QUICK 차분법은 격자 면의 값을 구하기 위해 상류에 가중치를 둔 2차 보간(three-point upstream-weighted quadratic interpolation)을 사용한다. 즉, 면의 양쪽에 위치한 두 개의 이웃(bracketing) 절점과 상류의 한 절점을 통과하는 2차 함수로부터 면에서의 ϕ 값을 구한다(그림 5.17 참조).

예를 들어, $u_w > 0$, $u_e > 0$ 일 때 ϕ_w 를 구하기 위해 WW , W 및 P 를 지나가는



2차식을 이용하고, ϕ_e 를 구하기 위해 W, P 및 E 를 지나는 2차식을 이용한다. $u_w < 0, u_e < 0$ 인 경우, ϕ_w 를 구하기 위해 W, P, E 를 지나는 2차식을, ϕ_e 를 구하기 위해 P, E, EE 를 지나는 2차식을 사용한다. 균일한 격자의 경우, 두 이웃 절점 i 와 $i-1$, 상류 절점 $i-2$ 사이에서 격자 면의 ϕ 값은 다음 식으로 주어진다.

$$\phi_{face} = \frac{6}{8}\phi_{i-1} + \frac{3}{8}\phi_i - \frac{1}{8}\phi_{i-2} \quad (5.45)$$

$u_w > 0$ 일 때 서쪽 면 w 에 대한 이웃 절점은 W 와 P 가 되고, 상류 절점은 WW 가 되므로(그림 5.17 참조) 다음 식이 유도된다.

$$\phi_w = \frac{6}{8}\phi_W + \frac{3}{8}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_{WW} \quad (5.46)$$

$u_e > 0$ 일 때 동쪽 면 e 에 대한 이웃 절점은 P 와 E 가 되고, 상류 절점은 W 가 되므로 다음 식이 유도된다.

$$\phi_e = \frac{6}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_E - \frac{1}{8}\phi_W \quad (5.47)$$

포물선의 구배를 이용하여 확산 항을 구할 수 있으며, 흥미롭게도 균일한 격자에서 이 방법은 확산에 대한 중심차분법과 동일하게 된다. 만약 $F_w > 0, F_e > 0$ 일 때 대류 항에 대해 식 (5.46)과 (5.47)을 사용하고 확산 항에 대해 중심차분법을 사용하면, 1차원 대류-확산 수송방정식을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} & \left[F_e \left(\frac{6}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_E - \frac{1}{8}\phi_W \right) - F_w \left(\frac{6}{8}\phi_W + \frac{3}{8}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_{WW} \right) \right] \\ & = D_e(\phi_E - \phi_P) - D_w(\phi_P - \phi_W) \end{aligned}$$

위 식을 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \left[D_w - \frac{3}{8}F_w + D_e + \frac{6}{8}F_e \right] \phi_P &= \left[D_w + \frac{6}{8}F_w + \frac{1}{8}F_e \right] \phi_W \\ &+ \left[D_e - \frac{3}{8}F_e \right] \phi_E - \frac{1}{8}F_w \phi_{WW} \quad (5.48) \end{aligned}$$

이제 이산화 방정식을 표준 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\boxed{a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_{WW} \phi_{WW}} \quad (5.49)$$

a_W	a_E	a_{WW}	a_P
$D_w + \frac{6}{8}F_w + \frac{1}{8}F_e$	$D_e - \frac{3}{8}F_e$	$-\frac{1}{8}F_w$	$a_W + a_E + a_{WW} + (F_e - F_w)$

$F_w < 0, F_e < 0$ 인 경우, 서쪽 및 동쪽 경계를 통과하는 플럭스는 다음 식으로 표현할 수 있다.

$$\phi_w = \frac{6}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_W - \frac{1}{8}\phi_E \quad (5.50)$$

$$\phi_e = \frac{6}{8}\phi_E + \frac{3}{8}\phi_P - \frac{1}{8}\phi_{EE}$$

이산화된 대류-확산 방정식 (5.9)의 대류 항에 대해 상기 두 식을 대입하고, 확산 항에 대해 중심차분법을 사용하면, 다음과 같은 계수를 얻을 수 있다.

a_W	a_E	a_{EE}	a_P
$D_w + \frac{3}{8}F_w$	$D_e - \frac{6}{8}F_e - \frac{1}{8}F_w$	$\frac{1}{8}F_e$	$a_W + a_E + a_{EE} + (F_e - F_w)$

계수에 대한 위의 두 표를 조합하면, + 및 - 유동방향에 모두 유효한 일반식을 얻을 수 있다. 1차원 대류-확산 문제에 대한 QUICK 차분법을 요약하면 다음과 같다.

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + a_{WW} \phi_{WW} + a_{EE} \phi_{EE} \quad (5.51)$$

중심 계수는

$$a_P = a_W + a_E + a_{WW} + a_{EE} + (F_e - F_w)$$

로 표현되고, 이웃 계수들은 다음과 같다.

a_W	a_{WW}	a_E	a_{EE}
$D_w + \frac{6}{8}\alpha_w F_w + \frac{1}{8}\alpha_e F_e + \frac{3}{8}(1-\alpha_w)F_w$	$-\frac{1}{8}\alpha_w F_w$	$D_e - \frac{3}{8}\alpha_e F_e - \frac{6}{8}(1-\alpha_e)F_e - \frac{1}{8}(1-\alpha_w)F_w$	$\frac{1}{8}(1-\alpha_e)F_e$

여기서, $F_w > 0$ 인 경우 $\alpha_w = 1$, $F_e > 0$ 인 경우 $\alpha_e = 1$

$F_w < 0$ 인 경우 $\alpha_w = 0$, $F_e < 0$ 인 경우 $\alpha_e = 0$

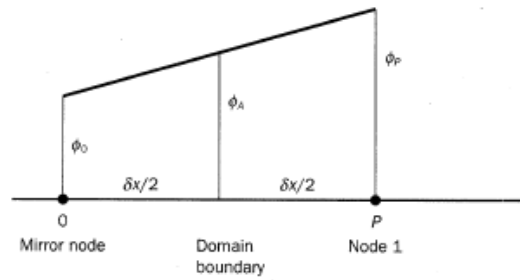
예제 5.4

5개의 격자점과 QUICK 차분법을 이용하여 $u = 0.2 \text{ m/s}$ 인 경우에 대해 예제 5.1에서 고려한 문제를 풀어라. QUICK 수치해, 엄밀해, 중심차분해를 서로 비교하라.

풀이 예제 5.1에서와 같이 이산화를 위해 5개의 격자점을 사용한다. 이 예제의 데이터와

$u = 0.2 \text{ m/s}$ 를 적용하면, 모든 곳에서 $F = F_e = F_w = 0.2$, $D = D_e = D_w = 0.5$ 이므로 cell Peclet 수는 $Pe_w = Pe_e = \rho u \delta x / \Gamma = 0.4$ 가 된다. 내부 절점 3과 4에서 QUICK 차분법을 이용한 이산화 방정식은 식 (5.51)과 같다.

QUICK 차분법에서는 3개의 절점 값을 사용하는 식 (5.46)과 (5.47)을 이용하여 격자 경계에서의 ϕ 값을 계산한다. 절점 1, 2 및 5는 모두 계산영역 경계에 의해 영향을 받으므로 따로 처리할 필요가 있다. 경계 절점 1의 서쪽 면(w)에서 ϕ 값이 주어졌지만($\phi_w = \phi_A$), 동쪽 면에서 ϕ_e 를 구하기 위한 식 (5.47)의 서쪽 절점(W)은 존재하지 않는다. 이 문제를 해결하기 위해 Leonard(1979)는 그림 5.18과 같이 물리적 경계의 서쪽으로 거리가 $\delta x/2$ 떨어진 위치에 '거울(mirror)' 절점을 만들고, 선형 외삽(linear extrapolation)의 사용을 제안하였다.



선형적으로 외삽된 거울 절점에서의 값은 다음 식으로 주어진다.

$$\phi_0 = 2\phi_A - \phi_P \quad (5.52)$$

거울 절점에서의 이러한 외삽은 검사체적 1의 동쪽 면에서 식 (5.47)로써 ϕ_e 를 구할 때 필요한 W 절점의 값을 제공한다.

$$\begin{aligned} \phi_e &= \frac{6}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_E - \frac{1}{8}(2\phi_A - \phi_P) \\ &= \frac{7}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_E - \frac{2}{8}\phi_A \end{aligned} \quad (5.53)$$

경계 절점에서 구배를 구할 때, 식 (5.53)과 일관성을 유지해야 한다. 서쪽 경계를 통한 확산 플럭스는 다음과 같다.

$$\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_A = \frac{D_A^*}{3} (9\phi_P - 8\phi_A - \phi_E) \quad (5.54)$$

$$D_A^* = \frac{\Gamma}{\delta x}$$

위첨자 *는 QUICK 차분법에서 확산 전도도가 경계와 내부 절점에서 같은 값을

가짐을 나타내기 위해 사용되며, $D_A^* = D = \Gamma/\delta x$ 이다. 이 점은 지금까지 논의한 다른 차분법과는 차이가 있는데, 격자의 반을 이용하여 근사식을 구한 차분법에서는 격자 경계에서 확산 전도도가 항상 $D_A = 2D = 2\Gamma/\delta x$ 가 된다.

절점 1에서 이산화 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F_e \left[\frac{7}{8} \phi_P + \frac{3}{8} \phi_E - \frac{2}{8} \phi_A \right] - F_A \phi_A \\ = D_e (\phi_E - \phi_P) - \frac{D_A^*}{3} (9\phi_P - 8\phi_A - \phi_E) \end{aligned} \quad (5.55)$$

검사체적 5에서 동쪽 면의 ϕ 값을 알고 있으므로($\phi_e = \phi_B$), 동쪽 경계를 통한 ϕ 의 확산 플럭스는 다음 식으로 주어진다.

$$\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_B = \frac{D_B^*}{3} (8\phi_B - 9\phi_P + \phi_W) \quad (5.56)$$

$$D_B^* = \frac{\Gamma}{\delta x}$$

절점 5에서 이산화 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} F_B \phi_B - F_w \left[\frac{6}{8} \phi_W + \frac{3}{8} \phi_P - \frac{1}{8} \phi_{WW} \right] \\ = \frac{D_B^*}{3} (8\phi_B - 9\phi_P + \phi_W) - D_w (\phi_P - \phi_W) \end{aligned} \quad (5.57)$$

검사체적 1의 동쪽 면에서 ϕ 를 구하기 위해 특별한 표현을 사용했으므로 플럭스의 일관성을 보장하기 위해 검사체적 2의 서쪽 면을 통한 대류 플럭스를 계산할 때 동일한 ϕ 표현을 사용하여야 한다. 따라서 절점 2에서 다음 식을 얻는다.

$$\begin{aligned} F_e \left[\frac{6}{8} \phi_P + \frac{3}{8} \phi_E - \frac{1}{8} \phi_W \right] - F_w \left[\frac{7}{8} \phi_W + \frac{3}{8} \phi_P - \frac{2}{8} \phi_A \right] \\ = D_e (\phi_E - \phi_P) - D_w (\phi_P - \phi_W) \end{aligned} \quad (5.58)$$

절점 1, 2 및 5에 대해 표준 이산화 방정식은 다음 형태로 쓸 수 있다.

$$a_P \phi_P = a_{WW} \phi_{WW} + a_W \phi_W + a_E \phi_E + S_u \quad (5.59)$$

중심 계수는

$$a_P = a_{WW} + a_W + a_E + (F_e - F_w) - S_P$$

로 표현되고, 이웃 계수들은 다음과 같다.

Node	a_{WW}	a_W	a_E	S_P	S_u
1	0	0	$D_c + \frac{1}{3}D_A^* - \frac{3}{8}F_c$	$-\left(\frac{8}{3}D_A^* + \frac{2}{8}F_c + F_A\right)$	$\left(\frac{8}{3}D_A^* + \frac{2}{8}F_c + F_A\right)\phi_A$
2	0	$D_w + \frac{7}{8}F_w + \frac{1}{8}F_c$	$D_c - \frac{3}{8}F_c$	$\frac{1}{4}F_w$	$-\frac{1}{4}F_w\phi_A$
3	$-\frac{1}{8}F_w$	$D_w + \frac{1}{3}D_B^* + \frac{6}{8}F_w$	0	$-\left(\frac{8}{3}D_B^* - F_B\right)$	$\left(\frac{8}{3}D_B^* - F_B\right)\phi_B$

수치들을 대입하면 계수들은 다음 표와 같다.

표 5.10

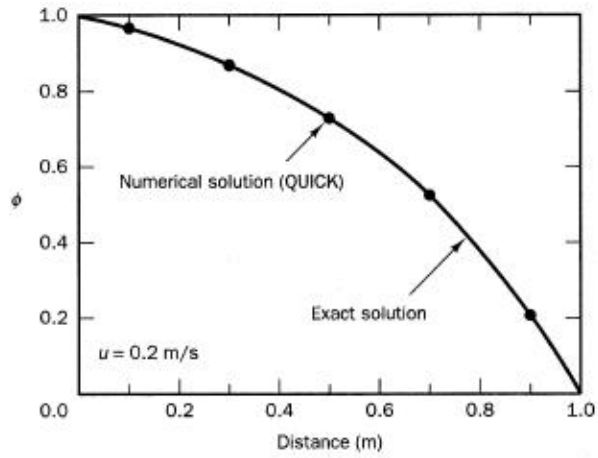
Node	a_W	a_E	a_{WW}	S_u	S_P	a_P
1	0	0.592	0	$1.583\phi_A$	-1.583	2.175
2	0.75	0.425	0	$-0.05\phi_A$	0.05	1.075
3	0.675	0.425	-0.025	0	0	1.075
4	0.675	0.425	-0.025	0	0	1.075
5	0.817	0	-0.025	$1.133\phi_B$	-1.133	1.925

연립방정식의 행렬식 형태는

$$\begin{bmatrix} 2.175 & -0.592 & 0 & 0 & 0 \\ -0.7 & 1.075 & -0.425 & 0 & 0 \\ 0.025 & -0.675 & 1.075 & -0.425 & 0 \\ 0 & 0.025 & -0.675 & 1.075 & -0.425 \\ 0 & 0 & 0.025 & -0.817 & 1.925 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.583 \\ -0.05 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

와 같이 표현되고, 위 시스템에 대한 해는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9648 \\ 0.8707 \\ 0.7309 \\ 0.5226 \\ 0.2123 \end{bmatrix} \quad (5.61)$$



5.11

Node	Distance	Analytical solution	QUICK solution	Difference	CD solution	Difference
1	0.1	0.9653	0.9648	0.0005	0.9696	0.0043
2	0.3	0.8713	0.8707	0.0006	0.8786	0.0073
3	0.5	0.7310	0.7309	0.0001	0.7421	0.0111
4	0.7	0.5218	0.5226	-0.0008	0.5374	0.0156
5	0.9	0.2096	0.2123	-0.0027	0.2303	0.0207
Σ Absolute error				0.0047		0.059