Equivalent mass in two-dimensional wind tunnel setup

n개의 uncouple된 1자유도 운동 방정식은 아래와 같이 정리할 수 있다.

$$m_i \ddot{q}_i + c_i \dot{q}_i + k_i q = Q_i(t) \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1}$$

$$m_i\left(\ddot{q}_i + 2\xi_i \omega_i \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i\right) = Q_i(t) \tag{2}$$

여기서 i번째 모드의 generalized mass와 풍하중은 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$m_i = \phi_i^T M \phi_i,\ Q_i(t) = \phi_i^T P(t) \tag{3}$$

m_i 는 거더 단위길이당의 값이 아니라 구조시스템 전체의 질량성분이 해당모드의 형상 값과 결합되어 산정되는 것이다. 예를 들어 특정 모드 i에 대한 일반화 질량은 식 (3)을 통하여 거더, 주탑, 케이블 등 모든 부재의 해당 모드의 운동 성분과 그 성분에 관련되는 질량을 모두 고려하여 산정되는 것이다. 따라서 특정 모드에 대해 모드 형상값이 큰 부재의 관성질량 값이 크면 일반화 질량에 기여하는 바가 커지게 된다. 이 개념은 c_i, k_i 도 마찬가지이지만 식 (2)의 일자유도 모드로 분리된 상태에서 일반화 질량값이 결정되면 그 모드의 감쇠비와 고유진동수로 표현할 수 있다. 2차원 풍동실험에서는 이와 같이 일반화 질량과 감쇠비, 고유진동수를 토대로 셋업을 진행하게 된다.

반면 $Q_i(t)$ 는 풍하중과 연관되는데 정적 풍하중, 버페팅 풍하중, 자발진동 풍하중은 특히 바람면적이 크고 진동이 일정 이상 발현되는 거더에 의해 주로 발생하게 된다. 따라서 2차원 풍동실험시에는 케이블이나 주탑 등의 풍하중은 무시한 상태에서 거더의 풍하중만을 모사하게 된다. 실제 $\phi_i^T P(t)$ 의 계산은 거더에 대해서만 고려하게 된다.

을 목표 값으로 진행하는 사례가 많다. 그러나 엄밀히 얘기하면 다른 부재의 해당 모드 질량 기여를 다 반영한 일반화 질량 m_i 를 목표로 하는 것이 원칙이다. 다만 2차원 풍동모형은 전체 거더 길이를 다 고려하지 않고 일부 구간만을 모사하므로 식 (2)의 하중항은 전체 generalized force 중 전체 거더 길이 대비 모사 구간의 길이의 비율만큼만 모형에 작용되게 된다. 따라서 그 비율만큼 식 (2)의 좌변항, 즉 일반화 질량값을 줄일 필요가 있다. 이를 위하여 일반화질량을 거더 총 길이로 나눈 단위길이당 일반화질량으로 표현하고 풍동에서 모사한 길이를 곱하여 총 질량(일반화질량)을 목표값으로 설정하고 이 질량을 스프링에 거치된 거더 모형의 목표 질량값으로 설정하게 된다.

이러한 일반화질량의 개념을 '일본도로교내풍설계편람(2007)'에서는 equivalent mass 로 표현하

고 있다.

$$m_{eq} = \frac{\int m\phi^2 dx}{\int_D \phi_h^2 dx} \tag{4}$$

$$I_{eq} = \frac{\int m\phi^2 dx}{\int_D \phi_\theta^2 dx} \tag{5}$$

위 식에서 분자에 해당하는 부분은 해당모드의 generalized mass를 의미하며, 분모는 거더(D)에 대한 진동모드의 제곱 적분값을 나타낸다. 두 식에 나타난 equivalent mass는 주탑, 케이블과 같은 전체 구조시스템의 질량효과를 포함했을 뿐만 아니라 거더가 길이를 따라 연직 질량분포가 다르거나 모드 형상의 변화 성분이 달라짐을 반영하여 단위길이당 일정 질량을 갖는다고 가정할 때의 거더에 분포시켜야 할 단위길이당 질량값이다. 만약 거더의 연직 질량 성분이 일정하게 분포되고 주탑이나 케이블의 질량이 없다면 $m_{eq} = m$ 이 될 것이다.

Generalized mass m_i 는 구조해석 결과로 주어지는데 보통 각 모드의 m_i 가 1.0이 되도록 orthonormalize 하는 모드형상 벡터를 적용하는 경우가 일반적이다 (SNUSUS, 3D, Sap2000, Midas 는 그러함을 확인). 따라서 m_i 는 1.0으로 보고, 고유진동해석 결과 주어지는 형상벡터를 사용하면 된다. 그 외의 프로그램(RM 등)을 사용할 때에는 프로그램에서 제공되는 모달매스값와 형상벡터를 사용한다.

식 (1)을 equivalent mass로 표현하기 위하여 식 (1)을 $\int_D \phi^2 dx$ 와 동일한 매트릭스 $\left(\phi_i^T \phi_i\right)_D$ 로 양변을 나누면 식(6)과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{m_i}{\left(\phi_i^T \phi_i\right)_D}\left(\ddot{q}_i + 2\xi_i\omega_i\dot{q}_i + \omega_i^2 q_i\right) = \frac{Q_i(t)}{\left(\phi_i^T \phi_i\right)_D} = \frac{\phi_i^T P(t)}{\left(\phi_i^T \phi_i\right)_D} \tag{6}$$

좌항은 첫번째 텀은 equivalent mass로 표현이 되며 우항 또한 거더의 모드 벡터를 통하여 거더가 받는 generalized coordinate 에서의 등분포 힘이다. 식(6)은 데크의 단위길이에 대한 운동방정식이며 실제 풍동실험에서의 셋업을 위해서는 이 동특성 값을 풍동실험에서 구현되는 실제 모형의 길이 만큼에 해당하도록 산정하여 적용하면 된다. 서울대학교 건설환경공학부 풍동의 경우 보통 0.9m의 모형길이를 사용한다. 여기에 축소율을 곱하면 실제 원형의 데크길이에 해당한다. 예를 들어 길이 축소율이 1/100이라면 풍동내 구현되는 데크 길이는 90m에 상당한다. 풍동실험의 셋업에서는 식(6)을 구현하기 위하여 모달질량, 모달감쇠비, 모달진동수 만을 구사하고 모달풍하중은 자동적으로 모형과 바람에 의해 구현된다. 모달감쇠비와 모달진동수는 데크의 길이와 관계없이 결정되는 값이므로 실제로는 식 (4) 또는 식(6)의 좌항 첫번째 텀에 의해 계산되는

equivalent mass에 구현길이(예를 들어 90m)를 곱하여 구하면 되며, 실제 풍동셋업에서는 여기에 축소율을 적용하여 셋팅한다.

이를 종합하면 2차원 데크모형 풍동실험은 데크의 일부만을 모사하는 것이 아니라 사실 generalized coordinate 상에서의 모달방정식을 만족시키는 모형체에 대해 실험을 수행하는 것이고 기본 가정은 데크에 작용하는 풍하중이 데크의 공기역학적 거동을 지배한다는 것에 기반하고 있다.

모달방정식에 기반한 실험이므로 풍동실험에서 관찰하는 응답은 실제 변위가 아니라 general coordinate상의 $q_i(t), \dot{q}_i(t), \ddot{q}_i(t)$ 이다. 이로부터 실제 교량의 특정 부위의 i번째 모드 응답을 얻고자 한다면 다음과 같이 그 위치의 모달 벡터의 값을 곱해 주어야 한다.

$$u_i(x,t) = \phi_i(x) q_i(t) \tag{7}$$