제 2장 자유진동

2.1. 무감쇠 자유진동

지배 방정식

$$m\ddot{u} + ku = 0 \qquad (2.1.1)$$

상수계수를 갖는 선형동차 2계 미분방정식

초기조건, 시각 $t=0$ 에서

$$u = u(0), \quad \dot{u} = \dot{u}(0)$$

일반해 또는 시도해

$u = Ce^{st}$로 가정한다

$$\dot{u} = Cse^{st}, \quad \ddot{u} = Cs^2e^{st}$$

→ (2.1.1)에 대입

$$mCs^2e^{st} + kCe^{st} = 0$$

$$(ms^2 + k)\underbrace{Ce^{st}}_{\neq 0} = 0$$

$ms^2 + k = 0$ ← should

characteristic equation

(특성 방정식)

$$s^2 = -k/m, \quad s = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$s = \pm i\omega_n$$

$$s_1 = i\omega_N, \quad s_2 = -i\omega_N$$

$$u(t) = A_1 e^{i\omega_N t} + A_2 e^{-i\omega_N t}$$

Rearrangement.

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

$$u(t) = A_1(\cos\omega_N t + i\sin\omega_N t) + A_2(\cos\omega_N t - i\sin\omega_N t)$$

$$= (A_1 + A_2)\cos\omega_N t + (iA_1 - iA_2)\sin\omega_N t$$

$$= A\cos\omega_N t + B\sin\omega_N t$$

초기조건 부과

$$u(t) = A\cos\omega_N t + B\sin\omega_N t$$

$$\dot{u}(t) = -A\omega_N\sin\omega_N t + B\omega_N\cos\omega_N t$$

$$u(0) = A = u(0)$$

$$\dot{u}(0) = B\omega_N, \quad B = \frac{1}{\omega_N}\dot{u}(0)$$

$$u(t) = u(0)\cos\omega_N t + \left(\frac{\dot{u}(0)}{\omega_N}\right)\sin\omega_N t \quad (2.1.3)$$

$$u(t) = A\cos\omega_N t + B\sin\omega_N t$$

$$= \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos\omega_N t + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin\omega_N t\right)$$

$\sqrt{A^2+B^2} = R$

$\frac{A}{R} = \cos\phi$, $\frac{B}{R} = \sin\phi$

$u(t) = R\cos(\omega_N t - \phi)$.

↑ Simple Harmonic Motion

$\omega_N(t+T_n) - \phi = \omega_N t - \phi + 2\pi$

$\omega_N T_n = 2\pi$.

$T_n = \frac{2\pi}{\omega_N}$

↑ 고유주기

ω_N = 고유 각 진동수 , Radian/sec

$f_n = \frac{1}{T_n}$: 고유진동수, cycle/sec

R = 진폭 $= u_0$ (chopra 의 notation)

$$u(t) = \underbrace{\sqrt{[u(0)]^2 + \left[\frac{\dot{u}(0)}{\omega_N}\right]^2}}_{R} \cos(\omega_N t - \phi)$$

$$\tan\phi = \frac{\dot{u}(0)}{u(0)\,\omega_N},$$

$$\omega_N = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{gk}{mg}} = \sqrt{\frac{g}{mg/k}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}$$

[주의사항]

식 (2.1.1)은 힘의 평형 방정식이다.
따라서 $m\ddot{u}$ term과 ku term의 힘의 단위가 같아야 한다. 만약 다르다면 고유진동수 $\omega_N = \sqrt{k/m}$ 의 수치가 달라진다.
이것은 심각한 오류를 범하는 것이다.

(예제 2.1)

(a) 남북 방향

$$\underbrace{\overset{\text{kip-sec}^2/\text{in}}{(0.04663)}\,\ddot{u}}_{(\text{kip-sec}^2/\text{in})\times(\text{in}/\text{sec}^2)\,\rightarrow\,\text{kips}} + \underbrace{\overset{\text{kips/in}}{(38.6)}\,u}_{(\text{kips/in})\times\text{in}\,\rightarrow\,\text{kips}} = 0$$

$$\omega_N = \sqrt{\frac{k}{m}} = 28.77 \text{ Radian/sec}$$

$$f_N = \frac{\omega_N}{2\pi} = 4.58 \text{ Hz}$$

$$T_N = \frac{2\pi}{\omega_N} = 0.218 \text{ sec}$$

(b) 동서 방향

$$(0.04663)\ddot{u} + (119.7)u = 0$$

$$\omega_N = \sqrt{k/m} = 50.67 \text{ Rad/sec}$$

$$f_N = \omega_N/2\pi = 8.07 \text{ Hz}$$

$$T_N = 1/f_N = 0.124 \text{ sec}$$

예제 2-4 Torsion 진자

$$I_o \ddot{u}_\theta + K_\theta u_\theta = 0$$

$\ddot{u}_\theta$ → rad/sec²

I_o → kip-sec²-ft

K_θ → kip-ft/rad

u_θ → ~~rad~~ rad

kip-ft ⇒ 모멘트 (Torque)

$I_o \ddot{u}_\theta$ ⇒ kip-ft ⇒ 모멘트 (Torque)

$$K_\theta = k_x d^2 + k_y b^2$$

$$= \underbrace{(1.5)}_{kip/in}\underbrace{(12\times 20)}_{in}\underbrace{(20)}_{ft} + (1.0)(2\times 30)(30) = 18000 \text{ kip-ft/rad}$$

} kip-ft/rad

$$I_o = m\frac{b^2+d^2}{12}$$

$$= \underbrace{\frac{(0.1)(30)(20)}{32.2}}_{kips/(ft/sec^2)} \; \underbrace{\frac{30^2+20^2}{12}}_{ft^2} \; ~~= 201.88~~ \; ~~kip\text{-}ft~~$$

kip-ft-sec²

$= 201.88$ kip-sec²-ft

$\omega_n = 9.444$ rad/sec, $f_n = 1.491$ Hz, $T_n = 0.671$ sec.

(observation)

$$u(t) = R\cos(\omega_N t - \phi)$$
$$\dot{u}(t) = -\omega R \sin(\omega_N t - \phi)$$

Potential Energy (Strain Energy) : E_S

$$E_S = \frac{1}{2} k u^2 = \frac{1}{2} k \cdot R^2 \cos^2(\omega_N t - \phi)$$

Kinetic Energy : E_K

$$E_K = \frac{1}{2} m \dot{u}^2 = \frac{1}{2} m \omega_N^2 R^2 \sin^2(\omega t - \phi)$$

무감쇠 시스템의 에너지 보존의 법칙

$$E_S + E_K = \text{Constant}$$

$$E_S + E_K = \frac{1}{2} k R^2 \cos^2(\omega_N t - \phi) + \frac{1}{2} m \omega_N^2 R^2 \sin^2(\omega_N t - \phi) = \frac{1}{2} k R^2$$

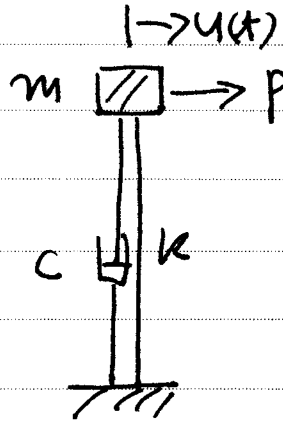
$$E_S(t) + E_K(t) = \text{Constant}$$

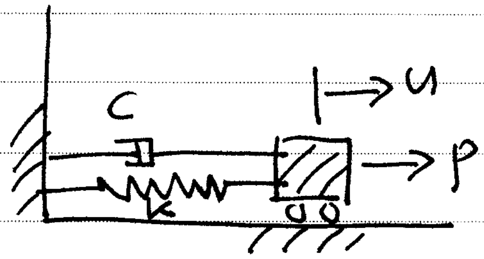
$$E_{S,max} = E_{K,max}$$

$$E_{S,max} \rightarrow E_K = 0$$

$$E_{K,max} \leftarrow E_S = 0$$

2.2 점성감쇠 자유진동





강제진동 지배방정식

$$f_I + f_D + f_S = p(t)$$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t)$$

자유진동 지배방정식

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \qquad (2.2.1a)$$

초기조건, 시각 $t=0$ 에서

$$\dot{u} = \dot{u}(0), \quad u = u(0)$$

일반해

$$u = \underbrace{A}_{\neq 0}e^{st} \text{ 로 가정한다.}$$

$$\dot{u} = Ase^{st}, \quad \ddot{u} = As^2e^{st}$$

→ 식 (2.2.1a)에 대입

$$mAs^2e^{st} + cAse^{st} + kAe^{st} = 0$$

$$A(ms^2 + cs + k)\underbrace{e^{st}}_{\neq 0,\ \text{nonzero}} = 0$$

$$ms^2 + cs + k = 0, \quad \Leftarrow \text{should}$$

$$s = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

Case #1. $c > 2\sqrt{mk} = C_{cr}$

- ✓ 두개의 실근
- ✓ non-oscillation
- ✓ 초임계감쇠시스템

Case #2 $C = 2\sqrt{mk} = C_{cr}$

- ✓ 중근, 또다른 독립해를 구해야한다.
- ✓ non-oscillation
- ✓ 임계감쇠시스템

Case #3 $c < 2\sqrt{mk} = C_{cr}$

- ✓ 두개의 복소수근
- ✓ Oscillation
- ✓ 아임계감쇠시스템

감쇠비 $\zeta = \frac{c}{C_{cr}}$, $c = \zeta C_{cr}$

$$C = 2\sqrt{mk}\,\zeta$$
$$= 2m\sqrt{k/m}\,\zeta$$
$$= 2m\omega_n \zeta$$
$$k = m \cdot \frac{k}{m} = m\omega_n^2$$

지배방정식

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0$$
$$\ddot{u} + 2\omega_n\zeta + \omega_n^2 u = 0$$

$$s = -\omega_n\zeta \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

초임계감쇠시스템 ($\zeta > 1$)

$$s_1 = -\omega_n\zeta + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$
$$s_2 = -\omega_n\zeta - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$
$$u(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

임계감쇠시스템 ($\zeta = 1$)

$$s_1 = -\omega_n \rightarrow u_1(t) = A_1 e^{-\omega_n t}$$

두번째 독립해를 구하기 위해서
method of reduction of order를
적용한다.

$u_2(t) = v(t)\, e^{-\omega_n t}$ 로 가정한다.

$\dot{u}_2(t)$, $\ddot{u}_2(t)$를 구한후 지배방정식에
대입하여 $v(t)$를 구한다

$$v(t) = B_1 + B_2(t) = B_1 + B_2 t$$

상수

따라서 $u_2(t) = A_2 t e^{-\omega_N t}$

$$u(t) = A_1 e^{-\omega_N t} + A_2 t e^{-\omega_N t}$$

아임계감쇠 시스템. ($\zeta < 1$)

$$s_1 = -\omega_N \zeta + i\omega_N\sqrt{1-\zeta^2}$$
$$s_2 = -\omega_N \zeta - i\omega_N\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\omega_D = \omega_N\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$s_1 = -\omega_N\zeta + i\omega_D$$
$$s_2 = -\omega_N\zeta - i\omega_D$$

$$u(t) = e^{-\omega_N\zeta t}\left[A_1 e^{i\omega_D t} + A_2 e^{-i\omega_D t}\right]$$

$$u(t) \Rightarrow e^{-\omega_N\zeta t}\left[A_1 \cos\omega_D t + A_2 \sin\omega_D t\right]$$

$$R = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

$$\frac{A_1}{R} = \cos\phi, \quad \frac{A_2}{R} = \sin\phi$$

$$u(t) = e^{-\omega_N\zeta t} \cdot R\cos(\omega_D t - \phi)$$

$$= \underbrace{R e^{-\omega_N\zeta t}}_{\text{Decay}} \underbrace{\cos(\omega_D t - \phi)}_{\text{Oscillation}}$$

✓ 진폭이 지수함수적으로 감소하는 Harmonic 운동

Harmonic 운동의 주기, T_D

$$T_D = \frac{2\pi}{\omega_D} = \frac{2\pi}{\omega_N} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{T_N}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$\therefore T_D > T_N$ 이고 $T_D \fallingdotseq T_N$ 이다.

초기값 문제, 시각 $t=0$ 에서

$$u = u(0), \quad \dot{u} = \dot{u}(0)$$

$$u = e^{-\omega_N \zeta t}\left[A_1 \cos \omega_D t + A_2 \sin \omega_D t\right]$$

$$u\Big|_{t=0} = A_1 = u(0)$$

$$\dot{u} = -\omega_N \zeta e^{-\omega_N \zeta t}\left[A_1 \cos \omega_D t + A_2 \sin \omega_D t\right]$$

$$+ e^{-\omega_N \zeta t}\left[-\omega_D A_1 \sin \omega_D t + \omega_D A_2 \cos \omega_D t\right]$$

$$\dot{u}\Big|_{t=0} = -\omega_N \zeta A_1 + \omega_D A_2 = \dot{u}(0)$$

$$A_2 = \frac{\omega_N \zeta u(0) + \dot{u}(0)}{\omega_D}$$

$$u(t) = e^{-\omega_N \zeta t}\left[u(0) \cos \omega_D t + \left(\frac{\dot{u}(0) + \omega_N \zeta u(0)}{\omega_D}\right) \sin \omega_D t\right]$$

$$R = \sqrt{[u(0)]^2 + \left[\frac{\dot{u}(0) + \zeta \omega_N u(0)}{\omega_D}\right]^2}$$

$$\cos\phi = \frac{u(0)}{R}, \quad \sin\phi = \left(\frac{1}{R}\right)\left(\frac{\dot{u}(0) + \zeta \omega_N u(0)}{\omega_D}\right)$$

$$u(t) = R e^{-\omega_N \zeta t} \cos(\omega_D t - \phi)$$

고유진동수 또는 고유주기에 대한 감쇠의 영향

$\zeta = 0.1$ (10% 감쇠) 가정

$$\omega_D = \omega_N \sqrt{1 - 0.1^2} = 0.995\,\omega_N$$

$$T_D = T_N / \sqrt{1 - 0.1^2} = 1.005\,T_N$$

Structural Damping : 2% ~ 7%

실제적으로, $\omega_D \simeq \omega_N$, $T_D \simeq T_N$

$\zeta = 0.2$ (20% 감쇠) 가정

$$\omega_D = \omega_N \sqrt{1 - 0.2^2} = 0.98\,\omega_N$$

$$T_D = T_N / \sqrt{1 - 0.2^2} = 1.02\,T_N$$

$$\omega_D \simeq \omega_N, \quad T_D \simeq T_N$$

2.2.3. 운동의 감쇠

$\omega_D t + 2\pi - \phi$

$$u(t) = R e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_D t - \phi)$$

$$\frac{u(t)}{u(t+T_D)} = \frac{R e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_D t - \phi)}{R e^{-\zeta \omega_n (t+T_D)} \cos(\omega_D (t+T_D) - \phi)}$$

$$= e^{-\zeta \omega_n T_D}$$

$$= \exp\left[\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right]$$

연속하는 최고점 값의 비

$$\frac{u_i}{u_{i+1}} = \exp\left[\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right]$$

Logarithmic Decrement, 대수감소 δ

$$\delta = \ln \frac{u_i}{u_{i+1}} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

만약 $\zeta \simeq 0$ 이면, $\sqrt{1-\zeta^2} \simeq 1$

$$\delta \simeq 2\pi\zeta$$

i 번째 peak와 $i+j$ 번째 peak의 비

$$\frac{u_i}{u_{i+j}} = \frac{u_i}{u_{i+1}} \frac{u_{i+1}}{u_{i+2}} \cdots \frac{u_{i+j-1}}{u_{i+j}} = e^{j\delta}$$

$$\ln \frac{u_i}{u_{i+j}} = j\delta \simeq j\,2\pi\zeta$$

$$\zeta = \left(\frac{1}{2\pi j}\right) \ln \frac{u_i}{u_{i+j}} = \left(\frac{1}{2\pi j}\right) \ln \frac{\ddot{u}_i}{\ddot{u}_{i+j}}$$

2.3. 자유진동에서의 에너지
초기변위 $u(0)$ 와 속가속도 $\dot{u}(0)$ 에 의해서 전달된 에너지 E_I : 투입에너지

$$E_I = \frac{1}{2} k [u(0)]^2 + \frac{1}{2} m [\dot{u}(0)]^2$$

임의의 시간 t 에서의 에너지

$$E_K = \frac{1}{2} m [\dot{u}(t)]^2, \quad E_S = \frac{1}{2} k [u(t)]^2$$

$$E_K = \frac{1}{2} m \omega_n^2 \left[-u(0)\sin\omega_n t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n}\cos\omega_n t\right]^2$$

$$E_S = \frac{1}{2} k \left[u(0)\cos\omega_n t + \frac{\dot{u}(0)}{\omega_n}\sin\omega_n t\right]^2$$

$$E_K + E_S = \frac{1}{2} k [u(0)]^2 + \frac{1}{2} m [\dot{u}(0)]^2$$

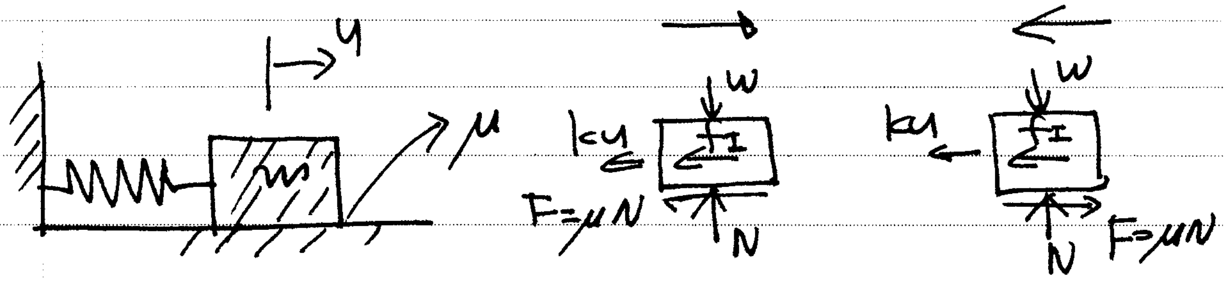
$$E_D = \int_0^{u} f_D\, du = \int_0^{t_1} (c\dot{u})\dot{u}\, dt = \int_0^{t_1} c\dot{u}^2\, dt$$

감쇠된 에너지

$$E_K + E_S + E_D = E_I$$

$t \to \infty$ 이면 $E_K \to 0$, $E_S \to 0$
$E_D \to E_I$

2-4 쿨롱(Coulomb) 감쇠 자유진동



지배방정식

$$f_I + f_F + f_S = p(t)$$

$$f_I = m\ddot{u}, \quad f_F = F\,\mathrm{sgn}(\dot{u}), \quad f_S = ku$$

$$m\ddot{u} + ku + F\,\mathrm{sgn}(\dot{u}) = p$$

자유진동

$$m\ddot{u} + ku + F\,\mathrm{sgn}(\dot{u}) = 0$$

초기변위 $u(0) > 0$ 에서 출발한다.

① $\dot{u} < 0$, from right to left

$$m\ddot{u} + ku = F \quad (1)$$

$$u(t) = A_1 \cos\omega_n t + B_1 \sin\omega_n t + F/k \qquad (2)$$
$$= A_1 \cos\omega_n t + B_1 \sin\omega_n t + u_F$$

② $\dot{u} > 0$ from left to right

$$m\ddot{u} + ku = -F \qquad (3)$$

$$u(t) = A_2 \cos\omega_n t + B_2 \sin\omega_n t - u_F \qquad (4)$$

(i) 시간 $t=0$, $u(0)=u(0)$, $\dot{u}(0)=0$

식(2)에서, $u(0) = A_1 + u_F$, $A_1 = u(0) - u_F$

$\dot{u}(0) = 0$, $B_1 = 0$

$$u(t) = [u(0) - u_F]\cos\omega_n t + u_F.$$

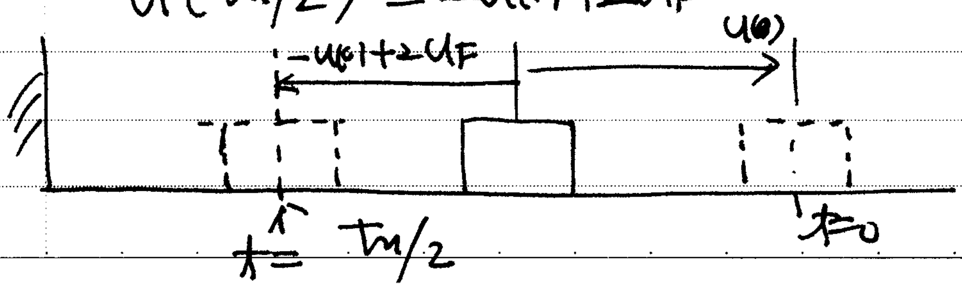
↳ 속도가 영이 될때까지 유효.

$$t = \pi/\omega_n = T_n/2$$

$$u(T_n/2) = -[u(0) - u_F] + u_F = -u(0) + 2u_F$$

(ii) 시간 $t = T_n/2$

$$u(T_n/2) = -u(0) + 2u_F$$



여기서 $-u_0 + 2u_F > -u_F$ 이면
$|-u_0 + 2u_F| < |u_F|$ 이면
진동을 멈추고 질량은 정지한다.

⇒ 복원력이 마찰력 보다 작다.

만약 $-u_0 + 2u_F < -u_F$ 이면 $t > \pi/\omega_n$
될 때 운동은 왼쪽에서 오른쪽으로 일어난다.

식 (4) 에서, $u(T_n/2) = -u_0 + 2u_F$
$\dot{u}(T_n/2) = 0$ 을 대입하면.

$$u(T_n/2) = -A_2 - u_F = -u_0 + 2u_F$$

$$A_2 = u(0) - 3u_F$$

$$\dot{u}(T_n/2) = 0 \longrightarrow B_2 = 0$$

$$u(t) = [u(0) - 3u_F]\cos\omega_n t - u_F$$

$$\dot{u}(t) = -\omega_n [u(0) - 3u_F]\sin\omega_n t$$

$$\frac{T_n}{2} = \pi/\omega_n < t \leq 2\pi/\omega_n = T_n$$

(iii) 시간 $t = T_n$ 에서 운동은 역전한다.

$$u(T_n) = u(0) - 4u_F$$

$t > T_n$

$$u(t) = [u(0) - 5u_F]\cos\omega_n t + u_F$$

∨ 한 cycle에 걸리는 시간, 고유주기는

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_N}$$

∨ 한 cycle 마다 진폭의 감소는

$4u_F$

∨ 운동의 정지
진폭이 u_F 보다 작은 변위 사이클의 끝에서

∨ 쿨롱 감쇠가 시스템을 정지하게 한다.
↳ 마찰력 고찰.

∨ Coulomb 감쇠의 경우에는 진폭이 선형적으로 감소한다.

∨ 점성감쇠에서 일어나는 진폭이 지수함수적으로 감소하고 이론적으로는 $t \to \infty$ 이라도 운동이 "영"이 되지는 않는다.