제3장 조화가진과 주기가진에 대한 응답

3.1 무감쇠 시스템의 조화진동

조화하중 (Harmonic Excitation)

$$p(t) = p_0 \sin \omega t, \quad p(t) = p_0 \cos \omega t$$

ω : 가진진동수, 가력진동수, 가진주파수

$T = 2\pi/\omega$: 가진주기, 가력주기

지배운동 방정식

$$m\ddot{u} + ku = p_0 \sin \omega t$$

$$m\ddot{u} + ku = p_0 \cos \omega t$$

초기조건, 시간 $t=0$ 에서

$$u = u(0), \quad \dot{u} = \dot{u}(0)$$

일반해

$$u(t) = \underbrace{u_c(t)}_{\text{상보해}} + \underbrace{u_p(t)}_{\text{특수해}}$$

상보해

$$u(t) = A e^{i\omega_n t} + B e^{-i\omega_n t}$$

or

$$u(t) = A \cos\omega_n t + B \sin\omega_n t$$

특수해 ($\omega \neq \omega_n$)

Linear system 이므로

$$m\ddot{u} + ku = p_0 e^{i\omega t}$$
$$= p_0(\cos\omega t + i \sin\omega t)$$

$u(t) = \hat{u} e^{i\omega t}$ 로 가정한다.

$$(-\omega^2 m + k)\hat{u} e^{i\omega t} = p_0 e^{i\omega t}$$

$$\hat{u} = \frac{p_0}{k - \omega^2 m}$$

$$= \frac{p_0}{k(1 - \omega^2 \frac{m}{k})},$$

$$= \left(\frac{p_0}{k}\right) \cdot \frac{1}{1 - \omega^2/\omega_n^2}$$

$$= (u_{st})_0 \cdot \frac{1}{1 - \beta^2}$$

$\beta = \frac{\omega}{\omega_n}$: 고유진동수에대한 가력진동수 비

$$u_p(t) = (u_{st})_0 \left(\frac{1}{1-\beta^2}\right)\left[\cos\omega t + i\sin\omega t\right]$$

$$= \underbrace{(u_{st})_0 \left(\frac{1}{1-\beta^2}\right)\cos\omega t}_{} + i\underbrace{(u_{st})_0\left(\frac{1}{1-\beta^2}\right)\sin\omega t}_{}$$

$p = p_0 \cos\omega t$ 에 대응하는 해 (실수부)

$p = p_0 \sin\omega t$ 에 대응하는 해 (허수부)

$(u_{st})_0 = p_0/k$: 정적응답

특수해 ($\omega = \omega_n$)

$e^{i\omega t} = e^{i\omega_n t}$ 는 상보해의 하나와 같으므로 새로운 형태의 해를 구한다.

$$u_p(t) = t\left[De^{i\omega_n t} + Ee^{-i\omega_n t}\right]$$

$$\dot{u}_p(t) = \left(De^{i\omega_n t} + Ee^{-i\omega_n t}\right) + t\left(i\omega_n De^{i\omega_n t} - i\omega_n Ee^{-i\omega_n t}\right)$$

$$\ddot{u}_p(t) = 2\left(i\omega_n De^{i\omega_n t} - i\omega_n Ee^{-i\omega_n t}\right) - \omega_n^2 t\left(De^{i\omega_n t} + Ee^{-i\omega_n t}\right)$$

대입하면

$$m(2i\omega_N)(De^{i\omega_N t} - Ee^{-i\omega_N t}) - m\cancel{\omega_N^2 u} + \cancel{ku} = p_0 e^{i\omega_N t}$$

$E=0$ (why?)

$$D = \frac{p_0}{2i\omega_N m}$$

$$u_p(t) = \left(\frac{p_0}{2i\omega_N m}\right) t e^{i\omega_N t}$$

$$= \left(\frac{p_0 t}{2\omega_N m}\right)(-i) e^{i\omega_N t}$$

$$= \underbrace{\left(\frac{p_0}{2\omega_N m}\right) t \sin\omega_N t}_{} + i \underbrace{\left(\frac{-p_0}{2\omega_N m}\right) t \cos\omega_N t}_{}$$

$p = p_0 \cos\omega_N t$ 에 대응하는 해 (실수부)

$p = p_0 \sin\omega_N t$ 에 대응하는 해 (허수부)

일반해 ($\omega \neq \omega_N$)

$$m\ddot{u} + ku = p_0 \sin\omega t$$

$$u(t) = A\cos\omega_N t + B\sin\omega_N t + \frac{(u_{st})_0}{1-\beta^2}\sin\omega t$$

초기조건 $u(0)=0$, $\dot{u}(0)=0$

$$A=0, \quad B=\frac{(u_{st})_0}{1-\beta^2}(-\beta)$$

$$u(t)=\frac{(u_{st})_0}{1-\beta^2}\left(-\beta\sin\omega_n t+\sin\omega t\right)$$

일시적 진동 / 강제진동
안정상태진동

안정상태진동

$$u(t)=(u_{st})_0\left(\frac{1}{1-\beta^2}\right)\sin\omega t$$

$$u_{st}(t)=\left(\frac{p_0}{k}\right)\sin\omega t$$

($(u_{st})_0$: 정적 변위)

○ $\beta<1$: 순위상
하중의 작용 방향과 시스템의 운동 방향이 일치한다.

○ $\beta>1$: 역위상
하중의 작용 방향과 시스템의 운동 방향이 반대이다.

$$u(t)=u_0\sin\omega t=(u_{st})_0\frac{1}{1-\beta^2}\sin\omega t$$

$$=(u_{st})_0 R_d\sin(\omega t-\phi)$$

$$Rd = \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \frac{1}{|1-\beta^2|}$$

$$\phi = \begin{cases} 0 & \beta < 1, \quad \omega < \omega_N \\ \pi & \beta > 1, \quad \omega > \omega_N \end{cases}$$

변위응답계수, 변형응답계수

(i) $\beta \simeq 0$, $Rd \simeq 1$
정적응답

(ii) $0 < \beta < 1$, $Rd > 1$

(iii) $\beta \simeq 1$, $Rd \to \infty$
동조현상, Resonance
공진현상

(iv) $1 < \beta < \sqrt{2}$, $Rd > 1$

(v) $\beta > \sqrt{2}$ $Rd < 1$

(vi) $\beta >> \sqrt{2}$ $Rd \to 0$

공진진동수
- ∨ Rd가 최대가 되는 진동수
- ∨ 무감쇠 시스템에서는 ω_N
- ∨ $Rd \to \infty$

Beats

$$m\ddot{u} + ku = p_0 \cos \omega t$$

$$u(t) = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t + \frac{(u_{st})_0}{1-\beta^2}\cos\omega t$$

$$u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = 0$$

$$A = -\frac{(u_{st})_0}{1-\beta^2}, \quad B = 0$$

$$u(t) = \frac{(u_{st})_0}{1-\beta^2}\left(\cos\omega t - \cos\omega_n t\right)$$

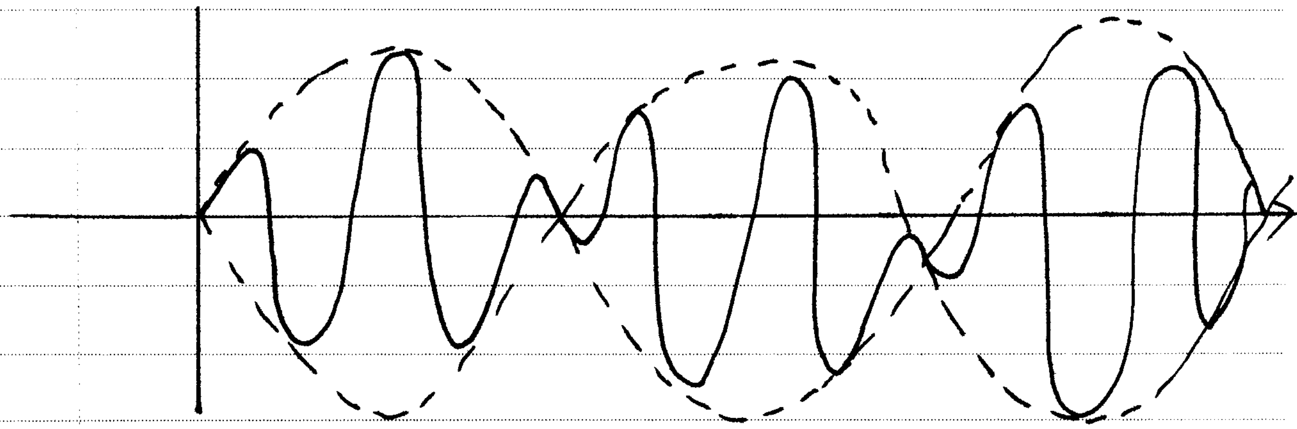
$$= \frac{2(u_{st})_0}{1-\beta^2}\sin\frac{\omega_n+\omega}{2}\sin\frac{\omega_n-\omega}{2}$$

만약 $\omega_n \simeq \omega$ 이면

$\sin\frac{\omega_n+\omega}{2}$: 빠르게 진동

$\sin\frac{\omega_n-\omega}{2}$: 느리게 진동

modulation



공진 ($\omega = \omega_n$)

$$m\ddot{u} + ku = p_0 \sin\omega_n t$$

$$u_p(t) = -\frac{p_0}{2\omega_n m} t\cos\omega_n t = -\frac{p_0}{2m\omega_n^2}\omega_n t\cos\omega_n t$$

$$= -\frac{p_0}{2k}\omega_n t\cos\omega_n t$$

$$= -\frac{(u_{st})_0}{2}\omega_n t\cos\omega_n t$$

$$u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = 0$$

$$u(t) = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t - \frac{(u_{st})_0}{2}\omega_n t\cos\omega_n t$$

$$A = 0, \quad B = \frac{(u_{st})_0}{2}$$

$$u(t) = \frac{(u_{st})_0}{2}\left(\sin\omega_n t - \omega_n t\cos\omega_n t\right)$$

$$u'(t) = \frac{(u_{st})_0}{2}\left(\omega_n\cos\omega_n t - \omega_n\cos\omega_n t + \omega_n^2 t\sin\omega_n t\right)$$

$$= \frac{(u_{st})_0}{2}\left(\omega_n^2 t\sin\omega_n t\right)$$

$$u'(t) = 0$$

$$t = 0, \text{ or } \omega_n t = n\pi,$$

Extrema 주기 $= \pi/\omega_N = T_N/2$

$$\frac{u(t)}{(u_{st})_0} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\sin\frac{2\pi}{T_N}t - \frac{2\pi}{T_N}t\cos\frac{2\pi}{T_N}t\right)$$

Local maxima

주기 $= T_N$

$t = (j-\frac{1}{2})T_N \quad , \quad j = 1, 2, 3, \cdots$

$$\text{maxima} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(0 - \frac{2\pi}{T_N}(j-\frac{1}{2})T_N\,(-1)\right)(u_{st})_0$$

$$= \pi(j-\frac{1}{2})(u_{st})_0$$

Local minima

주기 $= T_N$

$t = jT_N, \quad j = 1, 2, 3, \cdots$

$$\text{minima} = -\pi j\,(u_{st})_0$$

매 cycle 마다 변위진폭의 증가량은

$$|u_{j+1} - u_j| = (u_{st})_0\left[(j+1)\pi - j\pi\right]$$

$$= \pi(u_{st})_0$$

$$= \pi\frac{p_0}{k}$$

$t \to \infty \quad , \quad |u(t)| \longrightarrow \infty$

3.2. 점성감쇠를 가진 조화진동

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=\begin{cases} p_0\sin\omega t \\ p_0\cos\omega t \end{cases}$$

시간 $t=0$ 에서

$$u=u(0), \quad \dot{u}=\dot{u}(0)$$

일반해 → 완결해

$$u(t)=u_c(t)+u_p(t)$$

상보해 특수해

상보해

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=0$$

$$u_c(t)=e^{-\zeta\omega_n t}(A\cos\omega_D t+B\sin\omega_D t)$$

특수해

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=p_0e^{i\omega t}$$

$$u=u_R+iu_I$$

u_R: $p_0\cos\omega t$ 에 대응하는 해
u_I: $p_0\sin\omega t$ 에 대응하는 해

Linear System

$$e^{i\omega t} \longrightarrow \boxed{\text{system}} \longrightarrow H(\omega)e^{i\omega t}$$

$e^{i\omega t}$는 Linear System 의
eigenfunction 이다.

(증명)

$$L\{e^{i\omega t}\} = e(t)$$

$$L\{e^{i\omega(t+t_1)}\} = e(t+t_1)$$

$$L\{e^{i\omega t} e^{i\omega t_1}\} = e^{t} e^{i\omega t_1}$$

$$e(t+t_1) = e^{i\omega t_1} e(t)$$

$t=0$

$$e(t_1) = e^{i\omega t_1} \underbrace{e(0)}_{=1}$$

$$\Downarrow$$

$$e(t) = e^{i\omega t} \quad ///$$

$u = \hat{u} e^{i\omega t}$ 로 가정한다.

$$\dot{u} = i\omega \hat{u} e^{i\omega t}, \quad \ddot{u} = -\omega^2 \hat{u} e^{i\omega t}$$

$$(-m\omega^2 + ci\omega + k)\hat{u} e^{i\omega t} = P_0 e^{i\omega t}$$

$$\hat{u} = \frac{P_0}{k - m\omega^2 + i\omega c}$$

$$= \left(\frac{P_0}{k}\right) \frac{1}{1 - \omega^2/\omega_n^2 + i\omega 2m\omega_n\zeta/m\omega_n^2}$$

$$\hat{u} = \left(\frac{p_0}{k}\right) \frac{1}{1-\beta^2 + 2i\zeta\beta}$$

$$= \left(\frac{p_0}{k}\right) \frac{e^{-i\phi}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}}$$

여기서 $\tan\phi = \dfrac{2\zeta\beta}{1-\beta^2}$

$$1-\beta^2 + 2i\zeta\beta = \sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}\, e^{i\phi}$$

$$u_p(t) = \left(\frac{p_0}{k}\right) \frac{e^{(i\omega t - i\phi)}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\zeta^2\beta^2}}$$

$$= \left(\frac{p_0}{k}\right) \frac{e^{i(\omega t - \phi)}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 2\zeta^2\beta^2}}$$

For $p_0 \sin\omega t$ 에 대해서

$$u_p(t) = \left(\frac{p_0}{k}\right) \frac{\sin(\omega t - \phi)}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 2\zeta^2\beta^2}}$$

For $p_0 \cos\omega t$

$$u_p(t) = \left(\frac{p_0}{k}\right) \frac{\cos(\omega t - \phi)}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 2\zeta^2\beta^2}}$$

일반해.

$\beta \sin \omega t$ 의 경우

$$u(t) = \underbrace{e^{-\zeta\omega_n t}(A\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t)}_{\text{일시적 진동 성분}}$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{P_0}{k}\right)\frac{\sin(\omega t - \phi)}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 2^2\zeta^2\beta^2}}}_{\text{강제진동 안정상태 진동 성분}}$$

✓ 일시적 진동성분 : 시간이 지나면 감쇠되어 없어진다.

✓ 안정상태진동성분 : 일정한 진폭으로 진동하는 운동

3.2.a. $\omega = \omega_N$ 인 경우

$$\phi = \pi/2$$

$$u_p(t) = (u_{st})_0 \left(\frac{1}{2\zeta}\right)(-\cos\omega_n t)$$

$$u(t) = (u_{st})_0 \left(\frac{1}{2\zeta}\right)\left[e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos\omega_D t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_D t\right) - \cos\omega_n t\right]$$

최대 진폭 $u_0 = \frac{(u_{st})_0}{2\zeta}$

경감쇠시스템

$\zeta \simeq 0$, $\omega_D \simeq \omega_N$

$$u(t) \simeq (u_{st})_0 \left(\frac{1}{2\zeta}\right)\left(e^{-\zeta\omega_n t} - 1\right)\cos\omega_n t$$

시간에 따른 진폭의 크기 비로 , $t = j T_N$

$$\frac{|u_j|}{u_0} = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}$$

$$= 1 - e^{-2\pi\zeta j}$$

3.2.3. 최대 변형과 위상 지연.

하중 $P_0 \sin\omega t$ 에 대한 정상상태 변위

$$u(t) = \underbrace{\left(\frac{P_0}{k}\right)\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 2^2\zeta^2\beta^2}}}_{u_0} \sin(\omega t - \phi)$$

$$= (u_{st})_0 \, R_d \sin(\omega t - \phi)$$

$$R_d = \frac{u_0}{(u_{st})_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\zeta^2\beta^2}}$$

: 변위(변형)응답계수

$$\phi = \tan^{-1}\frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2}$$: 위상각, 위상지연

R_d

- ✓ 감쇠는 R_d를 감소시킨다
- ✓ 감소의 정도는 가진진동수의 함수이다.
  즉, $\omega/\omega_N = \beta$ 의 함수이다

ϕ

- ✓ 감쇠에 의해서 영향을 받는다.
- ✓ $\omega/\omega_N = \beta$ 에 의해서 주로 결정된다.

진동수 비에 따른 응답의 특성변화

(i) $\frac{\omega}{\omega_N} = \beta \ll 1$ or, $\beta \simeq 0$

- ✓ 하중이 천천히 변동한다
- ✓ 동적응답이 정적응답과 실질적으로 동일
- ✓ 강성이 응답을 지배한다
- ✓ $\phi \simeq 0$, 순위상
- ✓ $R_d \geq 1$

(ii) $\frac{\omega}{\omega_N} = \beta \simeq 1$

- ✓ 가진진동수가 고유진동수에 근접
- ✓ 동적 변형이 정적변형보다 매우 크다.
- ✓ 감쇠가 응답을 지배한다
- ✓ $R_d \gg 1$
- ✓ $\phi \simeq \pi/2$
  → 하중이 "영" 일때 변위가 최대

(iii) $\frac{\omega}{\omega_N} = \beta >> 1$

✓ 하중이 빠르게 변동한다

✓ β가 증가함에 따라서 $R_d \to 0$

✓ 질량이 동적응답을 지배한다.

✓ $R_d << 1$

✓ $\phi \simeq \pi$, 역위상

Complex plane에서의 조화운동

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p_0 e^{i\omega t}$$

$$u(t) = \left(\frac{p_0}{k}\right) \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\xi^2\beta^2}} e^{i(\omega t - \phi)}$$

$$= \left(\frac{p_0}{k}\right) R_d \, e^{i(\omega t - \phi)}$$

$$f_I + f_D + f_S = p \Rightarrow p - f_I - f_D - f_S = 0$$

$$f_S = ku = p_0 R_d \, e^{i(\omega t - \phi)}$$

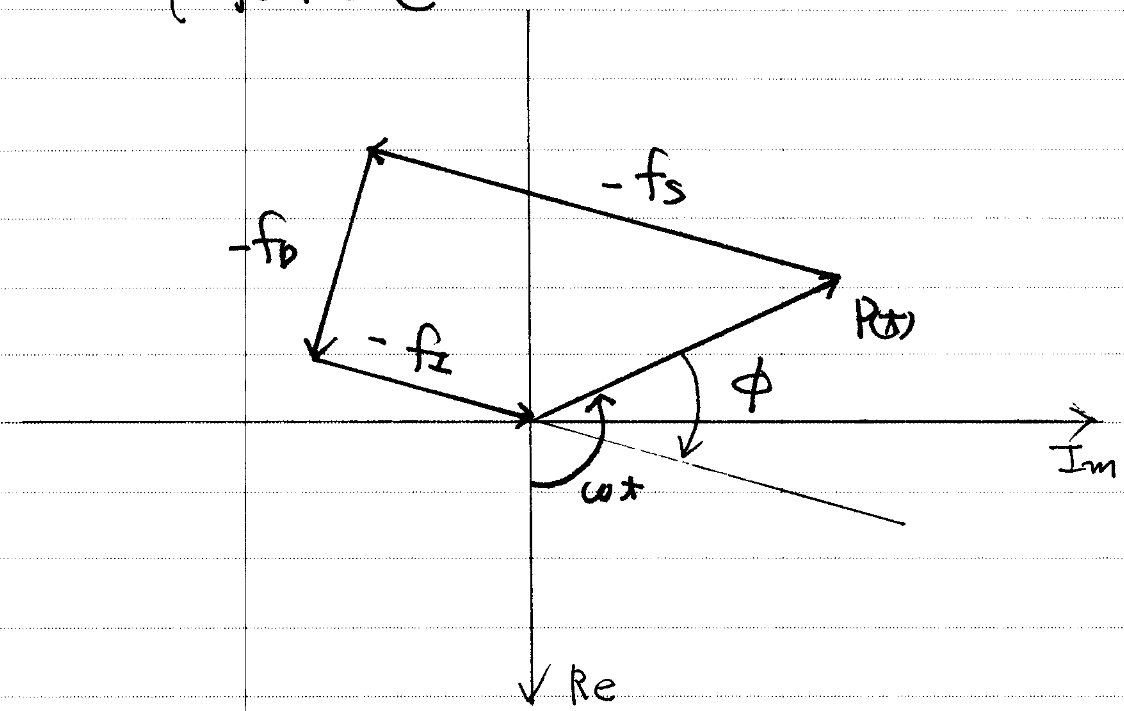
$$f_D = i\omega c u = \omega c \, e^{i\frac{\pi}{2}} \left(\frac{p_0}{k}\right) R_d \, e^{i(\omega t - \phi)}$$

$$= \omega \, 2m\omega_N \xi \, e^{i\frac{\pi}{2}} \left(\frac{p_0}{k}\right) R_d \, e^{i(\omega t - \phi)}$$

$$= 2\xi\beta \, p_0 R_d \, e^{i(\omega t - \phi + \pi/2)}$$

$$f_I = -\omega^2 m u = e^{i\pi}\omega^2 m \left(\frac{P_0}{k}\right) R_d\, e^{i(\omega t - \phi)}$$

$$= \beta^2 P_0 R_d\, e^{i(\omega t - \phi + \pi)}$$



(1) $\omega << \omega_N$, $\beta \simeq 0$

$R_d \simeq 1$, $\phi \simeq 0$

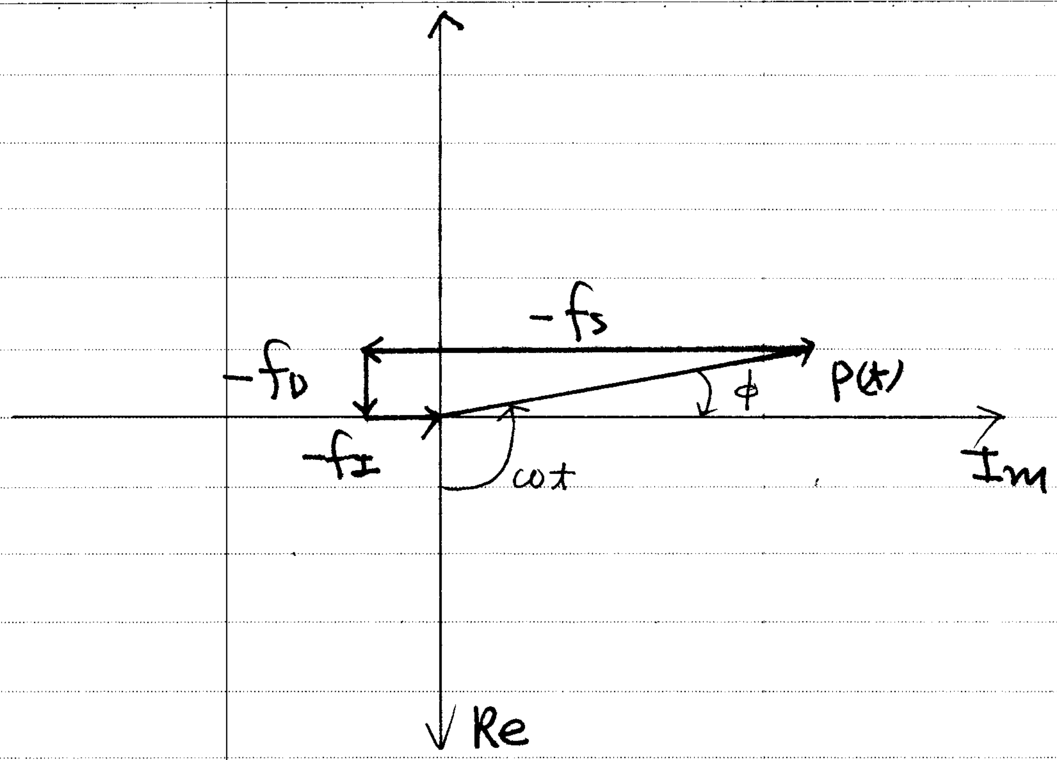
$f_S \simeq P_0 e^{i\omega t}$

$f_D \simeq 2\zeta\beta P_0 e^{i(\omega t + \pi/2)} \simeq 0$

$f_I \simeq \beta^2 P_0 e^{i(\omega t + \pi/2)} \simeq 0$

$|f_D| << |f_S|$, $|f_I| << |f_S|$

외력과는 spring force가 평형을 이루고
f_S가 지배적이기 때문에 응답은 static 응답이다.



(ii) $\omega \simeq \omega_N, \quad \beta \simeq 1$

$$R_d \simeq \frac{1}{2\zeta}, \quad \phi = \pi/2$$

$$f_S \simeq P_0 R_d e^{i(\omega t - \pi/2)} = P_0 \left(\frac{1}{2\zeta}\right) e^{i(\omega t - \pi/2)}$$

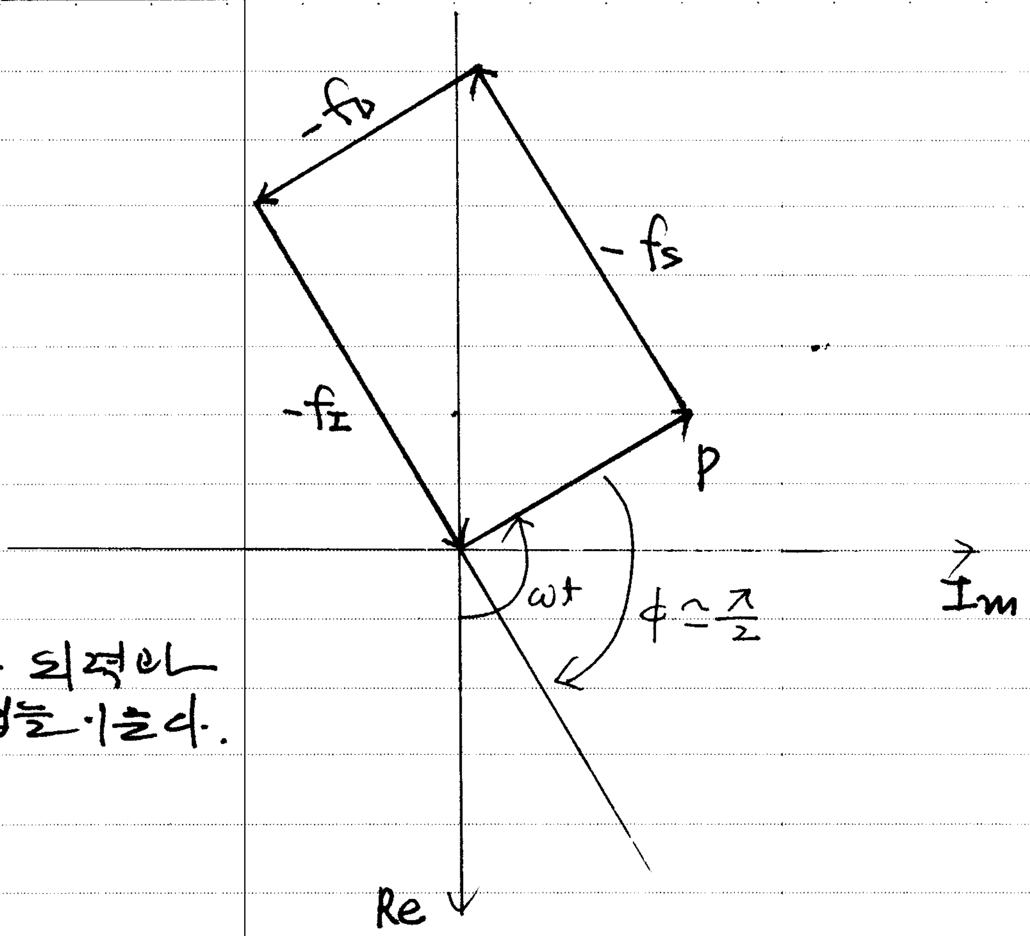
$$f_D \simeq (2\zeta)(\beta) P_0 \left(\frac{1}{2\zeta}\right) e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2})}$$

$$= P_0 e^{i\omega t}$$

$$f_I \simeq \beta^2 P_0 R_d e^{i(\omega t - \phi + \pi)}$$

$$= (1) P_0 \left(\frac{1}{2\zeta}\right) e^{i(\omega t - \frac{\pi}{2} + \pi)}$$

$$= \left(\frac{P_0}{2\zeta}\right) e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})}$$



f_D가 외력과 평형을 이룬다.

(iii) $\omega \gg \omega_n$, $\beta \gg 1$

$$R_d = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\zeta^2\beta^2}}$$

$$= \frac{1}{\beta^2\sqrt{\left(\frac{1}{\beta^2} - 1\right)^2 + 4\zeta^2/\beta^2}}$$

$\beta \to \infty$ $\quad R_d \to \frac{1}{\beta^2}$

$\phi \simeq \pi$

$$f_S \simeq \frac{p_0}{\beta^2}\, e^{i(\omega t - \pi)} \simeq 0$$

$$f_D \simeq (2\zeta)\beta p_0 \left(\frac{1}{\beta^2}\right) e^{i(\omega t - \pi + \pi/2)}$$

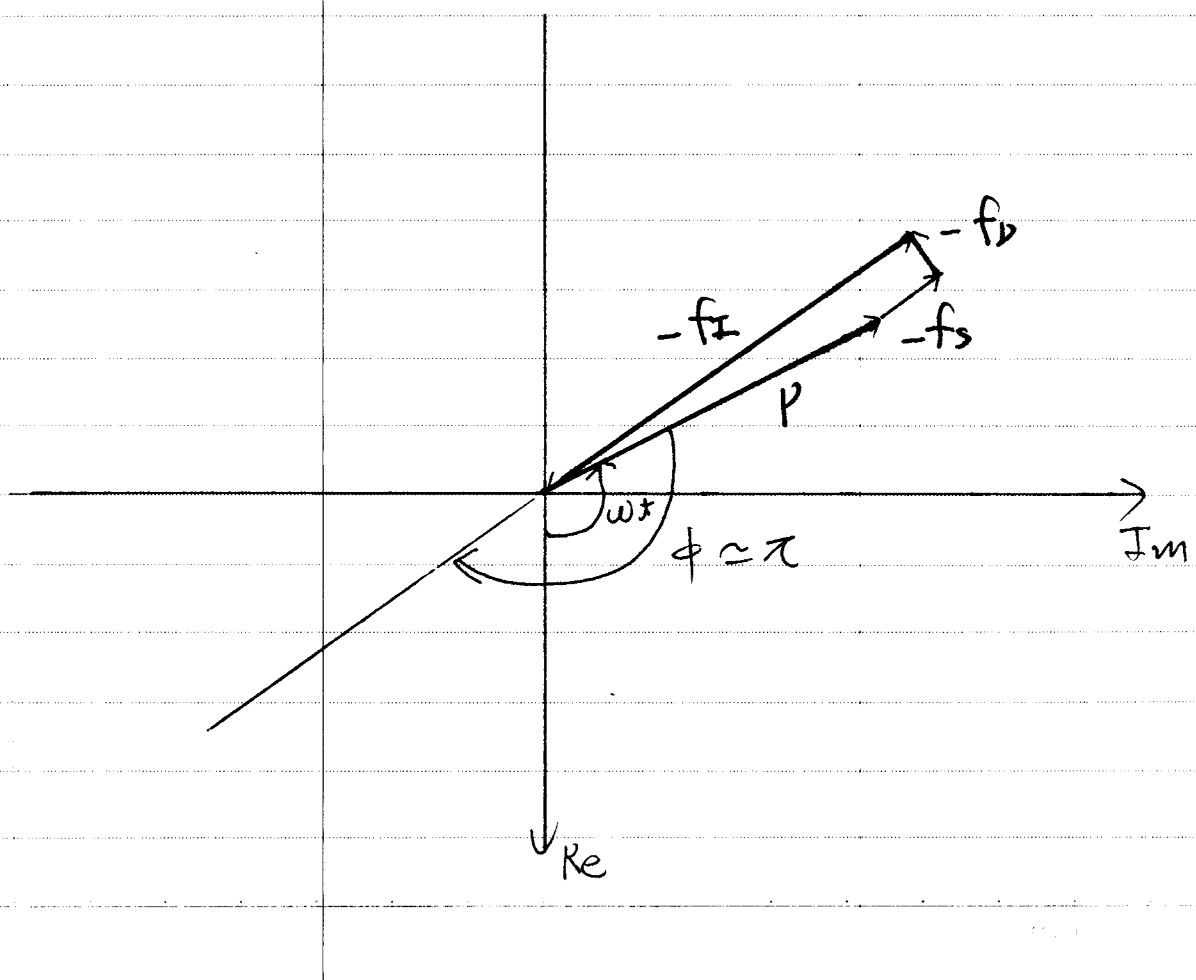
$$= \left(\frac{2\zeta}{\beta}\right) p_0\, e^{i(\omega t - \pi/2)}$$

$$\simeq 0$$

$$f_I \simeq \beta^2 p_0 \left(\frac{1}{\beta^2}\right) e^{i(\omega t - \pi + \pi)}$$

$$= p_0\, e^{i\omega t}$$

외력과는 관성력이 평형을 이룬다.



3.2.4 응력응답계수

안정상태 변위

$$u(t) = (u_{st})_0 \, R_d \sin(\omega t - \phi) \qquad (6)$$

$$\frac{u(t)}{P_0/k} = R_d \sin(\omega t - \phi)$$

R_d : 변위응답계수 (Deformation Response Factor)
= 정적변위 $(u_{st})_0$ 에 대한 동적변위의 진폭 (u_0) 의 비율

식(6)을 시간에대해서 미분하면

$$\dot{u}(t) = (u_{st})_0 \, R_d \, \omega \cos(\omega t - \phi)$$
$$= (u_{st})_0 \, \omega_N \cdot \left(R_d \frac{\omega}{\omega_N}\right) \cos(\omega t - \phi) \qquad (7)$$

$$\frac{\dot{u}(t)}{(u_{st})_0 \, \omega_N} = \left(\frac{\omega}{\omega_N} R_d\right) \cos(\omega t - \phi)$$
$$= R_v \cos(\omega t - \phi)$$

$$\frac{\dot{u}(t)}{(u_{st})_0 \, \omega_N} = \frac{\dot{u}(t)}{\frac{P_0}{k} \omega_N} = \frac{\dot{u}(t)}{P_0/\sqrt{km}}$$

$(u_{st})_0 \omega_N$ 는 하중 P_0 에 의해서 발생한 정적변위 $(u_{st})_0$ 가 초기변위로 시스템에 작용할때 자유진동시 속도의 최대값이다.

R_v : 속도응답계수 (velocity Response Factor)
= $(u_{st})_0 \omega_N$ 에 대한 동력속도의 진폭의 비율

$= \beta R_d$

식 (■)을 시간에 대해서 미분하면

$$\ddot{u}(t) = -(u_{st})_0 R_d \omega^2 \sin(\omega t - \phi)$$
$$= \omega_N^2 (u_{st})_0 \left(-R_d \left(\frac{\omega}{\omega_N}\right)^2\right) \sin(\omega t - \phi)$$

$$\frac{\ddot{u}(t)}{\omega_N^2 (u_{st})_0} = -R_a \sin(\omega t - \phi)$$

$$(u_{st})_0 \omega_N^2 = \frac{P_0}{k} \cdot \frac{k}{m} = \frac{P_0}{m}$$

: 질량 m에 P_0 가 작용할 때의 가속도 진폭, 또는

: 초기변위 $(u_{st})_0$ 에 의한 무감쇠 시스템의 가속도의 최대값, 또는 진폭

R_a: 가속도 응답계수 (Acceleration Response Factor)

$= \omega_n^2 (u_{st})_0$에 대한 가속도 진폭의 비율

$= \beta^2 R_d$

$$R_a/\beta = R_v = \beta R_d$$

$$R_d = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\xi^2\beta^2}}$$

- $R_d = 1$ at $\beta = 0$
- $\beta = 1^-$ 에서 최대값 $(\beta < 1)$
- $R_d \to 0$ as $\beta \to \infty$

$$R_v = \frac{\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\xi^2\beta^2}}$$

- $\beta = 0$ 에서 $R_v = 0$
- $\beta = 1$ 에서 R_v는 최대값
- $\beta \to \infty$ 이면 $R_v \to 0$

$$R_a = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\zeta^2\beta^2}}$$

- $\beta = 0$ 에서 $R_a = 0$
- $\beta = 1^+$ 에서 R_a는 최대값 $(\beta > 1)$
- $\beta \to \infty$ 이면 $R_a \to 0$

감쇠 $\zeta > 1/\sqrt{2}$ 이면 R_d와 R_a에서는 최고점이 생기지 않는다.

3.25. 공진진동수와 공진시 응답

감쇠비 $\zeta < \frac{1}{\sqrt{2}}$ 일 때

- 변위공진 진동수 $= \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2}$
- 속도공진 진동수 $= \omega_n$
- 가속도공진 진동수 $= \omega_n / \sqrt{1-2\zeta^2}$

공진진동수에서의 응답진폭계수

$$R_d = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad R_v = \frac{1}{2\zeta}, \quad R_a = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

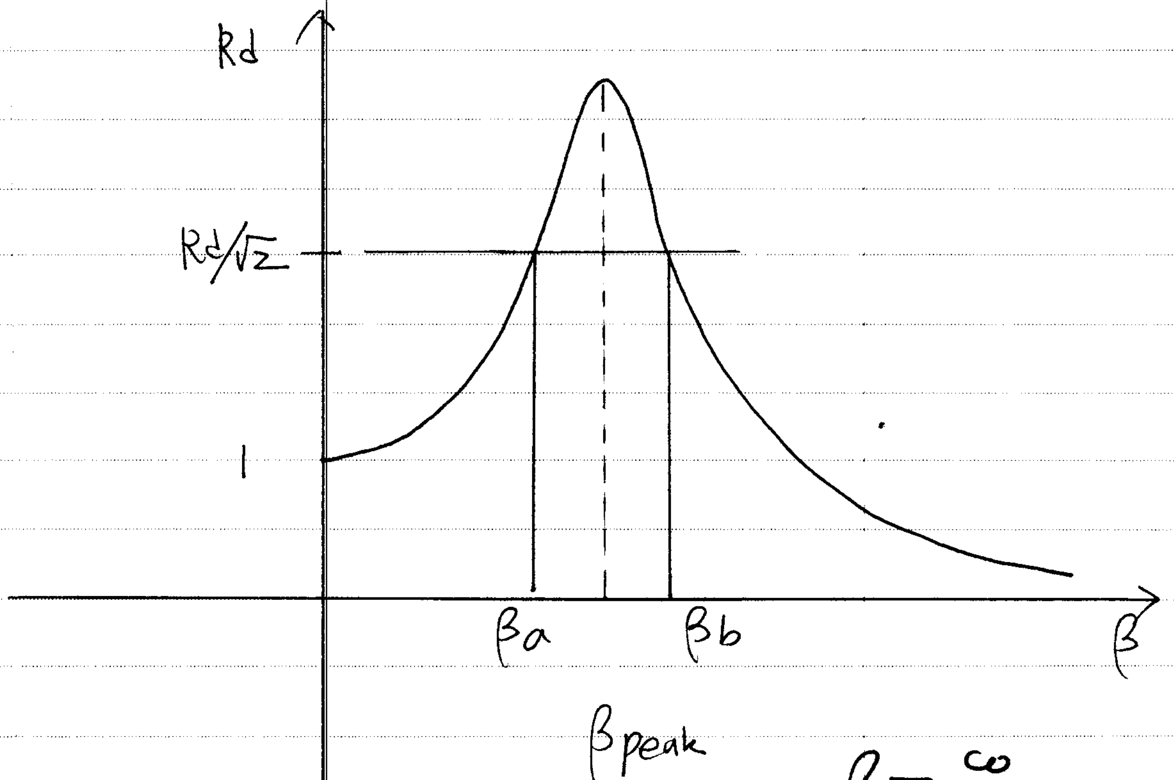
3.2.6. 반출력 대역폭

ω_a, ω_b : 공진진동수의 전후에 위치하여
진폭 u_0가 공진진폭의 $1/\sqrt{2}$ 배가
되는 가진진동수

감쇠비 ζ가 작을 경우 ($\zeta \ll 1$)

$$\frac{\omega_b - \omega_a}{\omega_N} = 2\zeta, \quad \omega_N \simeq \frac{1}{2}(\omega_b + \omega_a)$$

$$\zeta = \frac{f_b - f_a}{2 f_n}, \quad \zeta = \frac{\omega_b - \omega_a}{2\omega_N}$$



$$\beta = \frac{\omega}{\omega_N}$$

$$Rd(\beta) = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\zeta^2\beta^2}}$$

$$\frac{dRd}{d\beta} = 0, \quad \beta^2 = 1-2\zeta^2, \ \beta = \sqrt{1-2\zeta^2}$$

$$\beta_{peak} = \sqrt{1-2\zeta^2}$$

$$Rd,max = \frac{1}{\sqrt{(1-1+2\zeta^2)^2 + 4\zeta^2(1-2\zeta^2)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\zeta^4 + 4\zeta^2 - 8\zeta^4}}$$

$$= \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

βa, βb를 구한다.

$$(Rd(\beta))^2 = \frac{1}{2}(Rd,max)^2$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\zeta^2\beta^2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}\right)^2$$

$$\beta^4 - 2(1-2\zeta^2)\beta^2 + 1 - 8\zeta^2 + 8\zeta^4 = 0$$

$$\beta^2 = (1-2\zeta^2) \pm 2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}$$

Taylor series expansion

$$\beta = \left[1 + 2\left(-\zeta^2 \pm \zeta\sqrt{1-\zeta^2}\right)\right]^{1/2}$$

$$\beta \simeq 1 + \left(-\zeta^2 \pm \zeta\sqrt{1-\zeta^2}\right)$$

$$\beta a = (1-\zeta^2) - \zeta\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\beta b = (1-\zeta^2) + \zeta\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$\beta b - \beta a = 2\zeta\sqrt{1-\zeta^2} \simeq 2\zeta$$

$$\beta b + \beta a = 2(1-\zeta^2) \simeq 2$$

$$\zeta = \frac{\beta b - \beta a}{\beta b + \beta a} = \frac{\omega b - \omega a}{\omega b + \omega a}$$

$$\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{\beta b - \beta a}{\beta b + \beta a}$$

앞에서 유도된 식에서는

$\omega_N = \frac{1}{2}(\omega b + \omega a)$로 취하면

올바른 공식이 유도된다.

3.3. 진동발생기에 대한 응답.

반대로 회전하는 2개의 질량: $m_e/2$
편심 : e

$$p(t) = (m_e e \omega^2)\sin\omega t$$

구조물의 응답

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = \overbrace{(m_e e \omega^2)}^{p_0}\sin\omega t$$

안정상태 변위와 가속도의 진폭

$$u_0 = \frac{p_0}{k} R_d = \frac{m_e e \omega^2}{\underbrace{k}_{=m\omega_n^2}} R_d$$

$$= \left(\frac{m_e e}{m}\right)\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 R_d$$

$$\ddot{u}_0 = \frac{p_0}{m} R_a = \frac{m_e e \omega^2}{m} R_a$$

$$= \frac{m_e e \omega_n^2}{m} \cdot \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 R_a$$

3.4. 조화진동시험에 의한 고유진동수와 감쇠.

3.4.1. 공진시험

$\omega = \omega_n$ 에서 $\quad R_d(1) = \dfrac{1}{2\zeta} = \dfrac{(u_{st})_0}{(u_0)_{\omega=\omega_n}}$

ω_n의 식별 : 위상각 $\phi = \frac{\pi}{2}$

sine sweeping 출력 방법사용

$u_0 = \ddot{u}_0/\omega^2$: 가속도 진폭으로부터 변위진폭계산

문제점 : $(u_{st})_0$를 알아내기 어렵다.

3.4.2 진동수-응답 곡선

반출력대역폭 방법에 의해서 고유진동수와 감쇠비를 추정한다.

f_n : 변위진폭이 최대인 주파수(진동수)

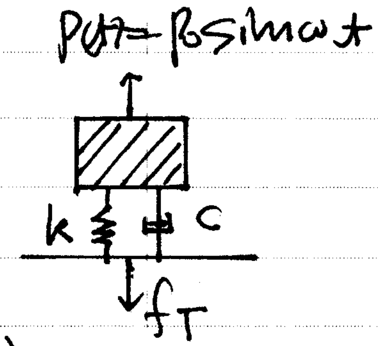
$$\zeta = \frac{f_b - f_a}{2f_n}$$

또는

$$\zeta = \frac{f_b - f_a}{f_b + f_a}, \quad f_n \simeq \frac{1}{2}(f_b + f_a)$$

편심질량 진동발생기의 경우에는 p_0 이 ω^2에 비례한다. 따라서 측정된 가속도 진폭을 ω^4로 나누어서 일정진폭하중에 대한 진동수-변위곡선을 얻는다.

3.5. 하중전달과 진동격리.



$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=p_0e^{i\omega t}$$

$$f_T=f_S+f_D$$

$$f_S=ku=p_0R_de^{i(\omega t-\phi)}$$

$$f_D=c\dot{u}=p_0(2i\zeta\beta)R_de^{i(\omega t-\phi)}$$

$$f_T=p_0R_d(1+2i\zeta\beta)e^{i(\omega t-\phi)}$$

$$=p_0R_d\sqrt{1+(2\zeta\beta)^2}\,e^{i(\omega t-\phi+\psi)}$$

$$\frac{(f_T)_0}{p_0}=R_d\sqrt{1+(2\zeta\beta)^2}$$

↳ Transmissibility, TR

$$TR=\left\{\frac{1+(2\zeta\beta)^2}{(1-\beta^2)^2+(2\zeta\beta)^2}\right\}^{1/2}$$

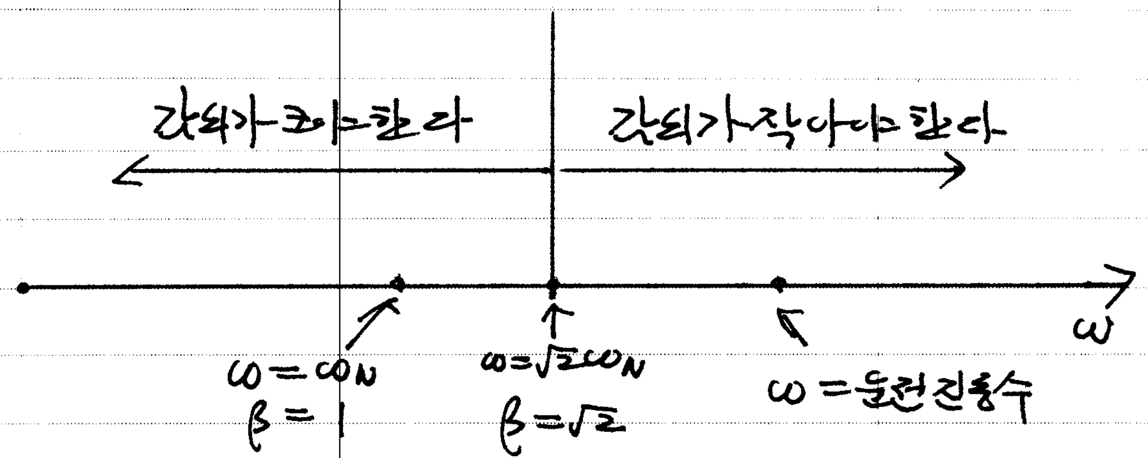
(i) $\omega/\omega_N<\sqrt{2}$, $\beta<\sqrt{2}$

감쇠는 전달되는 하중의 크기를 감소시킨다.

(ii) $\omega/\omega_N>\sqrt{2}$, $\beta>\sqrt{2}$

감쇠는 전달되는 하중의 크기를 증가시킨다.

회전 기계의 경우



3.6. 지반운동에 대한 응답과 진동격리

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_g(t)$$

$$\ddot{u}_g(t) = \ddot{u}_{g0}\, e^{i\omega t}$$

$$u(t) = \left(\frac{-m\ddot{u}_{g0}}{k}\right) R_d\, e^{i(\omega t - \phi)}$$

$$\ddot{u}(t) = \ddot{u}_{g0} \cdot R_d \left(\frac{\omega}{\omega_N}\right)^2 e^{i(\omega t - \phi)}$$

$$= \ddot{u}_{g0}\, R_d\, \beta^2 e^{i(\omega t - \phi)}$$

$$\ddot{u}^t(t) = \ddot{u}(t) + \ddot{u}_g(t)$$

$$e^{i\phi} = \frac{(1-\beta^2) + 2i\zeta\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\zeta^2\beta^2}}$$

$$e^{-i\psi} = \frac{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\xi^2\beta^2}}{(1-\beta^2) + 2i\xi\beta}$$

$$\ddot{u}(t) = \ddot{u}_{g0} \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+4\xi^2\beta^2}} \cdot \frac{\sqrt{(1-\beta^2)^2+4\xi^2\beta^2}}{(1-\beta^2)+2i\xi\beta} e^{i\omega t}$$

$$= \ddot{u}_{g0} \cdot \frac{\beta^2}{(1-\beta^2)+2i\xi\beta} e^{i\omega t}$$

$$\ddot{u}_g(t) + \ddot{u}(t)$$
$$= \ddot{u}_{g0} e^{i\omega t} + \ddot{u}_{g0} \frac{\beta^2}{(1-\beta^2)+2i\xi\beta} e^{i\omega t}$$

$$\ddot{u}(t) = \ddot{u}_{g0} \cdot \frac{1 + 2i\xi\beta}{(1-\beta^2)+2i\xi\beta} e^{i\omega t}$$

$$\frac{\ddot{u}^t(t)}{\ddot{u}_{g0}} = \frac{\sqrt{1+4\xi^2\beta^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+4\xi^2\beta^2}} e^{i(\omega t - \phi + \psi)}$$

$$TR = \frac{\ddot{u}^t_0}{\ddot{u}_{g0}} = \left\{ \frac{1+4\xi^2\beta^2}{(1-\beta^2)^2+4\xi^2\beta^2} \right\}^{1/2}$$

(i) $\omega << \omega_N$, $\beta \simeq 0$

- $\ddot{u}^t_0 \simeq \ddot{u}_{g0}$
- 질량과 지반은 일체로 움직인다.
- Spring이 강체와 같다.

(ii) $\omega >> \omega_N$, $\beta \to \infty$

- $\ddot{u}^t_0 \simeq 0$
- 질량은 지반이 움직이더라도 ~~고정~~ 정지되어 있다.
- spring의 강성이 '영'에 가깝다.

(Alternative Derivation)

$$m\ddot{u}^t(t) + c(\dot{u}^t - \dot{u}_g) + k(u^t - u_g) = 0$$

$$m\ddot{u}^t + c\dot{u}^t + ku^t = ku_g + c\dot{u}_g$$

$$u_g = u_{g0}\, e^{i\omega t}$$

$$\dot{u}_g = u_{g0}\, i\omega\, e^{i\omega t}$$

$$u^t = \frac{k + i\omega c}{k - m\omega^2 + i\omega c}\, u_{g0}\, e^{i\omega t}$$

$$\frac{u^t(t)}{u_{g0}} = \frac{1 + 2i\xi\beta}{(1-\beta^2) + 2i\xi\beta}\, e^{i\omega t}$$

$$\frac{u^t(t)}{u_{g0}} = \frac{\sqrt{1^2 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}\, e^{i(\omega t - \phi + \psi)}$$

$$TR = \frac{u^t_0}{u_{g0}} = \frac{\ddot{u}^t_0}{\ddot{u}_{g0}} = \left\{ \frac{1 + 4\xi^2\beta^2}{(1-\beta^2)^2 + 4\xi^2\beta^2} \right\}^{1/2}$$

3.7 진동-측정기기

- Tranducer : 질량-스프링-감쇠기 시스템 형식
- 3 방향 성분 : 수평 2축 방향 성분, 수직 성분

3.7.1. 가속도의 측정

지반운동 : 시간에 따라 변하고 넓은 주파수 대역의
조화진동성분을 보유

하나의 진동수 성분에 대한 운동의 고찰

$$u(t) = -\left(\frac{R_d}{\omega_N^2}\right)\ddot{u}_g\left(t - \frac{\phi}{\omega}\right)$$

↑
$\ddot{u}_g(t)$에 비해서 ϕ/ω 만큼 시간이 지연되고
$\left(-\frac{R_d}{\omega_N^2}\right)$ 만큼 곱해진 운동 성분.

설계의 주목표

- R_d 와 ϕ/ω 를 가진진동수, ω로부터 독립적일 수 있도록 한다.

$\zeta = 0.7$ 인 경우

- $0 \le \beta = \frac{\omega}{\omega_N} \le 0.5$ 범위에서 $R_d \simeq 1.0$

✓ $0 \le \beta = \frac{\omega}{\omega_N} \le 1.0$ 범위에서

$\phi \propto \omega \Leftrightarrow \phi/\omega \sim$ 상수

$f_N = 5\,Hz$, $\zeta = 0.7$

✓ 유용한 진동수 대역 : $0 \le f \le 25\,Hz$

✓ $u(t)$의 진폭은 R_d/ω_N^2에 비례한다.
ω_N이 크면 진폭을 받아야 한다.

3.7.2. 변위의 측정

$$u(t) = (R_d\,\beta^2)\,u_{g0}\sin(\omega t - \phi)$$

$$= R_a\,u_{g0}\sin(\omega t - \phi)$$

If $\omega \gg \omega_N$, $R_a \to 1$, $\phi \Rightarrow \pi$

$$u(t) = -u_{g0}\sin\omega t$$

✓무거운 질량과 유연한 스프링 필요
✓ 36 in 정도의 지반 변위 수용 필요

3.8. 점성감쇠에서의 에너지 소산

$p(t) = p_0 \sin \omega t$ 가정

$$u(t) = \underbrace{\left(\frac{p_0}{k}\right) R_d}_{u_0} \sin(\omega t - \phi)$$

$$\dot{u}(t) = \omega u_0 \cos(\omega t - \phi)$$

소산 에너지 E_D

$$E_D = \int f_D \, du = \int_0^{2\pi/\omega} (c\dot{u})\dot{u}\, dt$$

$$= c \int_0^{2\pi/\omega} \left[\omega u_0 \cos(\omega t - \phi)\right]^2 dt$$

$$= c\omega^2 u_0^2 \int_0^{2\pi/\omega} \frac{1 + \cos 2(\omega t - \phi)}{2} \, dt$$

$$= c\,\omega^2 u_0^2 \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2\pi}{\omega}\right) \qquad // \ \frac{k}{\omega_n^2}$$

$$= \pi c \omega u_0^2 = \pi \, 2 m \omega_n \zeta \omega u_0^2$$

$$= 2\pi \zeta \beta k u_0^2$$

✓ E_D는 변위의 진폭에 비례한다

✓ 주어진 감쇠비와 진폭에 대해서 E_D는 상수가 아니다.

투입에너지, E_I (정상상태)

$$E_I = \int p(t)\,du = \int_0^{2\pi/\omega} p(t)\,\dot{u}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi/\omega} (p_0 \sin\omega t)(\omega u_0 \cos(\omega t - \phi))\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi/\omega} (p_0 \sin\omega t)(\omega u_0)(\cos\omega t \cos\phi + \sin\omega t$$
$$\times \sin\phi)\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi/\omega} (p_0\, \omega u_0 \sin\phi)\sin^2\omega t\,dt$$

$$= (p_0\, \omega\, u_0 \sin\phi)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2\pi}{\omega}\right)$$

$$= \pi p_0 u_0 \sin\phi$$

$$= \pi p_0 u_0\, 2\zeta\beta R_d$$

$$= 2\pi\zeta\beta\, k u_0 \underbrace{\left(\frac{p_0}{k}\right) R_d}_{u_0}$$

$$= 2\pi\zeta\beta\, k u_0^2$$

즉 $E_I = E_D$

위치에너지, E_S

$$E_S = \int f_S\, du = \int_0^{2\pi/\omega} k u \dot{u}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi/\omega} k[u_0 \sin(\omega t - \phi)][\omega u_0 \cos(\omega t - \phi)]\, dt$$

$$= 0 \quad (\text{why?})$$

운동에너지 E_k

$$E_k = \int f_I\, du = \int_0^{2\pi/\omega} m\ddot{u}\dot{u}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi/\omega} m[-\omega^2 u_0 \sin(\omega t - \phi)]$$

$$\times [\omega u_0 \cos(\omega t - \phi)]\, dt$$

$$= 0 \quad (\text{why?})$$

more on E_D

$$f_D = c\dot{u} = c\omega u_0 \cos(\omega t - \phi)$$

$$= c\omega \sqrt{u_0^2 - u_0^2 \sin^2(\omega t - \phi)}$$

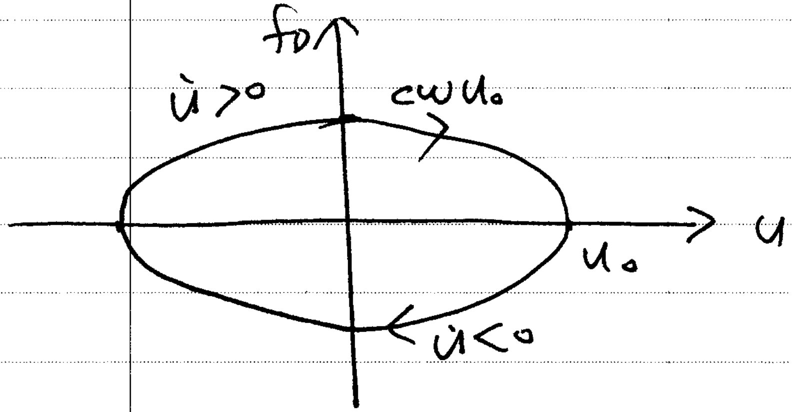
$$= c\omega \sqrt{u_0^2 - (u(t))^2}$$

$$\left(\frac{u}{u_0}\right)^2 + \left(\frac{f_D}{c\omega u_0}\right)^2 = 1$$

$f_D - u$ 곡선 : 이력루프

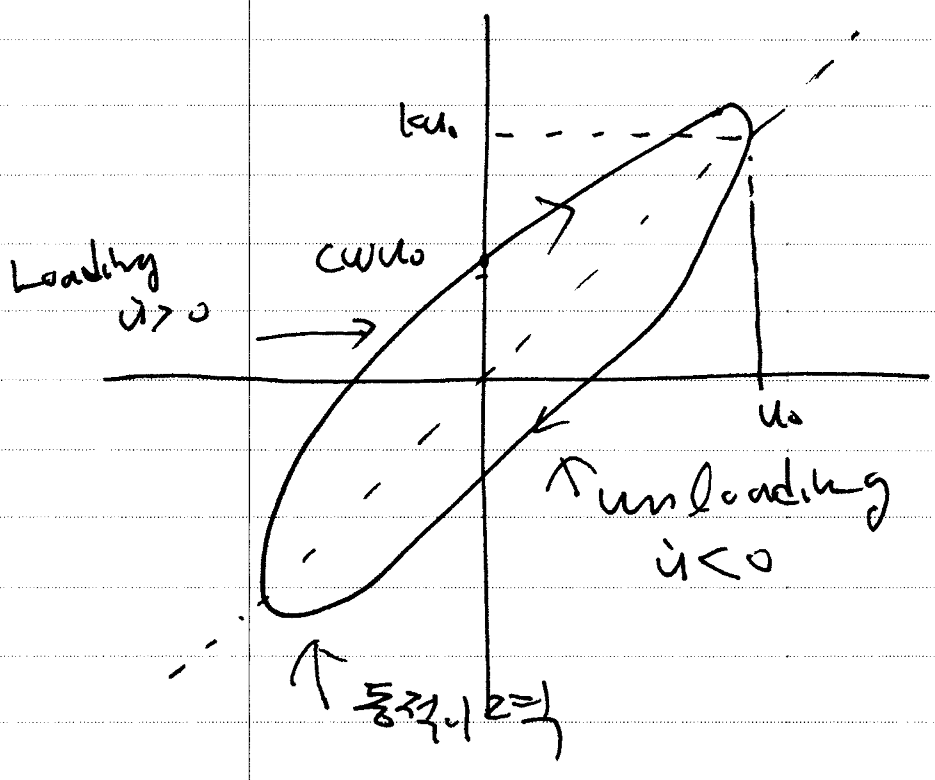
타원의 면적 $= \pi c \omega u_0^2 = E_D$

↑ 한 cycle마다 소산된 에너지 량



전체저항력 : $f_S + f_D$

$$f_S + f_D = ku(t) + c\dot{u}(t)$$
$$= ku + c\omega\sqrt{u_0^2 - u^2}$$



동적이력 정적이력

✓ 루프의 면적은 가진진동수에 비례한다.

✓ $\omega = 0$ 이면 하중-변형 곡선은 직선이 된다.

✓ 루프의 경사선이 타원형

✓ 소성변형이력루프는 정적 반복하중에 의해 얻음

✓ 루프의 끝이 뾰족하다

비감쇠역량 (specific damping capacity)

$= E_D / E_{S0} \left(= \frac{1}{2} k u_0^2\right)$

$=$ 운동의 1사이클당 손실에너지 $/ \frac{1}{2} k u_0^2$

비감쇠계수 (specific damping factor)
또는 손실계수 (loss factor) : ξ

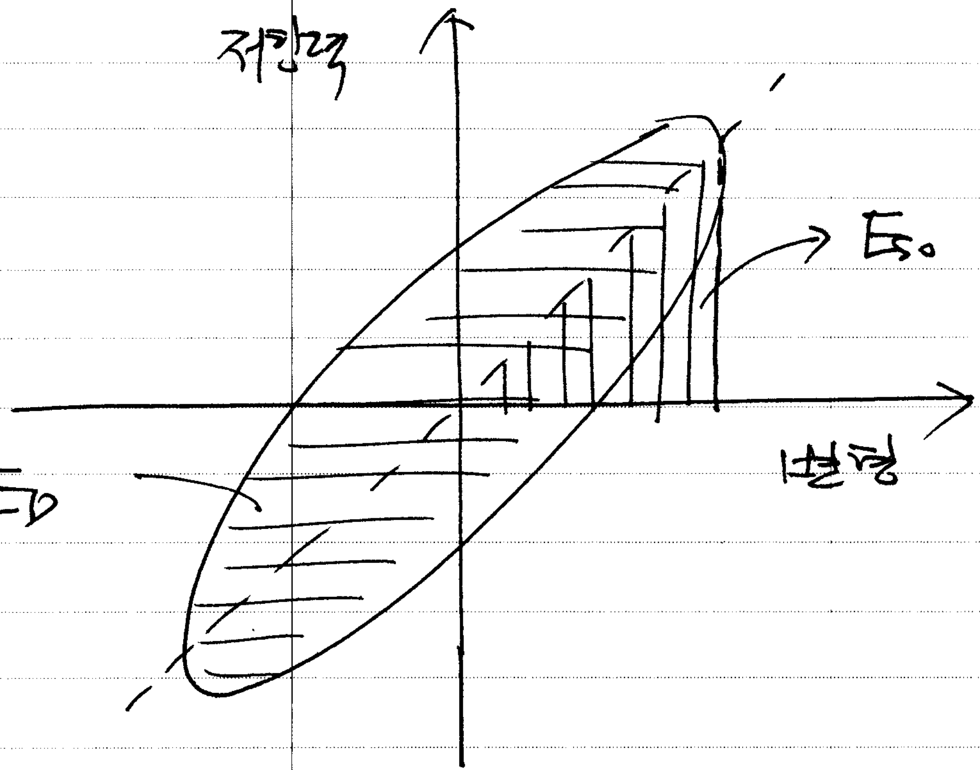
$$\xi = \frac{1}{2\pi} \frac{E_D}{E_{S0}}$$

$E_D / 2\pi$: 단위 radian 당 에너지 손실량

비감쇠역량과 비감쇠계수는 작은 감쇠를 표현 할 때 유용하다

(예): 재료의 감쇠역량

~~3.9. 등가점성감쇠~~



3.9. 등가점성감쇠

실제구조물에 존재하는 모든 감쇠기구가 합친 효과와 동등하도록 점성감쇠의 감쇠계수 결정

<u>정의 #1</u>

- ✓ $\omega = \omega_N$ 의 조화운동에 대한 응답으로부터 계산
- ✓ $\zeta_{eq} = \frac{1}{2} \frac{(u_{st})_0}{(u_0)_{\omega=\omega_N}}$

정의 #2

✓ 진동수 응답곡선에서 구한다

✓ $\zeta_{eq} = \dfrac{f_b - f_a}{f_b + f_a}$

정의 #3

✓ 실제 구조물에서 한 사이클당 소산된 에너지를 선형화된 시스템에서 소산된 에너지와 일치 시킨다.

$$E_D = 4\pi \overset{=\beta}{\zeta_{eq}} \left(\frac{\omega}{\omega_N}\right) \overset{=\frac{1}{2}ku_0^2}{E_{so}}$$

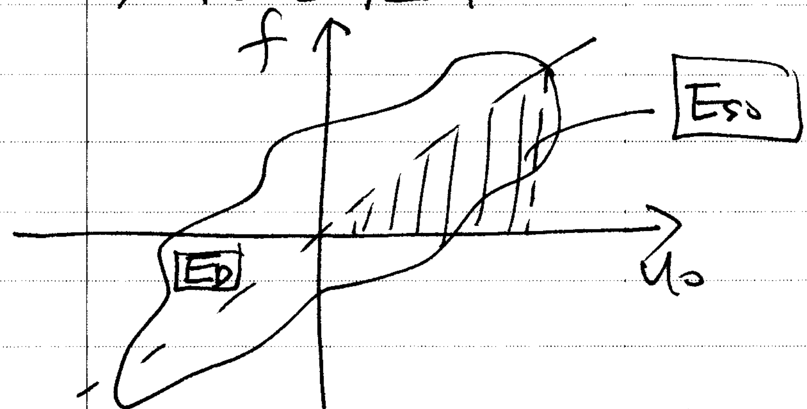
E_D: 실제시스템 에너지 손실량

ζ_{eq}: 선형화된 시스템 에너지 손실량

$\boxed{\omega = \omega_N \text{ 이면}}$

$$\zeta_{eq} = \left(\frac{1}{4\pi}\right)\frac{E_D}{E_{so}}, \quad \omega = \omega_N$$

→ 가장 만족스러운 근사



다자유도 시스템의 모드감쇠비

✓ 고유진동수로 해당모드로 진동할 때 에너지 소산량을 등가점성감쇠 에너지 소산량과 일치시킨다.

방법의 적용한계

✓ 구조물은 선형탄성한계 내에 있게 하는 진폭으로 진동하는 경우에 유효

✓ 비탄성 변형에 의한 에너지 소산을 등가점성감쇠로 모델링하는 것은 타당하지 않다.

3.10. 속도무관감쇠의 조화진동
↳ Rate-Independent Damping

✓ rate independent linear damping (속도무관 선형감쇠)

✓ 구조감쇠 (structural damping)

✓ 고체감쇠 (solid damping)

✓ 이력감쇠 (hysteretic damping

✓ 재료의 반복변형에 의해서 소산되는 에너지량은 가진진동수에 무관

✓ 등가감쇠비가 모든 고유진동모드와 고유진동수에서 일정하다.

✓ 겉보기 ~~씌~~ 탄성한계 : 소성 변형률, 국부적인 소성변형, 결정소성, 소성흐름에 의한 ~~내력~~ 응력 이력 거동과 연관

✓ 거시적 평균응력 탄성한계, 미시적으로 국소적응력은 소성변형

✓ 거시적 소성변형에 기인한 에너지 소산량은 더크다.

속도무관 감쇠 표현방법 또는 구현 방법

$$f_D = \frac{\eta k}{\omega} \dot{u}$$

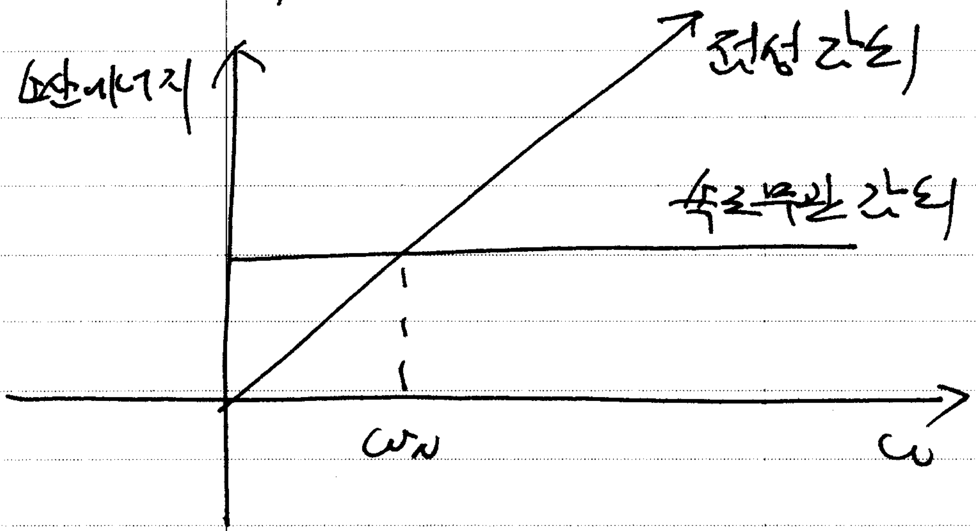
η : 손실계수

$$E_D = \pi c \omega u_0^2$$
$$= \pi \left(\frac{\eta k}{\omega}\right)(\omega) u_0^2$$
$$= 2\pi \eta E_{S0}$$

$$\eta = \left(\frac{1}{2\pi}\right)\frac{E_D}{E_{So}}$$

: 손실계수의 정의

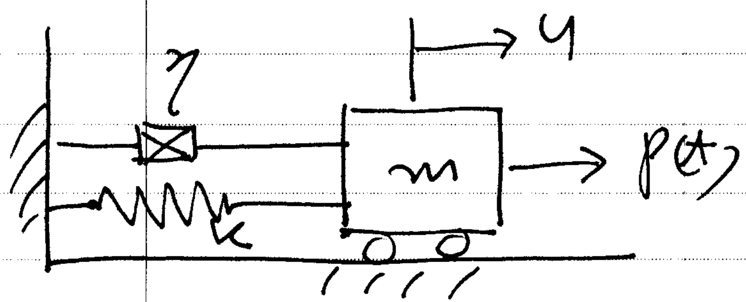
시간영역에서는 구현이 어렵고 진동수 영역에서 편리하다.



3.10.2. 조화하중에 대한 정상상태 응답

지배방정식

$$m\ddot{u} + \left(\frac{\eta k}{\omega}\right)\dot{u} + ku = p(t)$$



$p(t) = p_0 e^{i\omega t}$ 로 가정

$$u(t) = \frac{p_0 e^{i\omega t}}{k - \omega^2 m + i\omega \eta \frac{k}{\omega}}$$

$$= \left(\frac{p_0}{k}\right) \frac{p_0 e^{i\omega t}}{1 - \beta^2 + i\eta}$$

$$= \left(\frac{p_0}{k}\right) \frac{e^{i(\omega t - \phi)}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + \eta^2}}$$

$$\tan\phi = \frac{\eta}{1-\beta^2}$$

$$R_d = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + \eta^2}}$$

$\beta = 1$, $\omega = \omega_n$ 에서 R_d의 최대값

$C = \eta \frac{k}{\omega}$ 일경우 점성감쇠비 ζ

$$\zeta = \frac{\eta \, k/\omega}{2\sqrt{km}} = \frac{\eta}{2\beta}$$

$$= \left(\frac{\eta}{2}\right)\left(\frac{1}{\beta}\right)$$

특징

1. 공진은 $\omega = \omega_n$에서 발생
⇔ 점성감쇠 $\omega < \omega_n$ 에서 공진

2. $\omega = 0$ 에서 $\phi = \tan^{-1}\eta$
⇔ 점성감쇠 $\phi = 0$
: 속도무관 감쇠에서는 외력하중과 위상이 일치할 수가 없다.

3.10.3 등가점성감쇠를 이용한 해

소산에너지를 $\omega = \omega_n$에서 일치시킨다

속도무관감쇠 : $E_D = 2\pi\eta E_{so}$

점성감쇠 : $E_D = 4\pi\zeta_{eq} E_{so}$

$$2\pi\eta E_{so} = 4\pi\zeta_{eq} E_{so}$$

$$\zeta_{eq} = \frac{\eta}{2}$$

등가점성감쇠를 이용해서 시간영역해석을 수행

~~3.10.4. Complex Stiffness~~

3.10.4. Complex stiffness or Complex Damping

$$m\ddot{u} + \eta\frac{k}{\omega}\dot{u} + ku = p(t)$$

$$p(t) = p_0 e^{i\omega t}$$

$$u(t) = \hat{u} e^{i\omega t}$$

$$\left(-\omega^2 m + i\omega\eta\frac{k}{\omega} + k\right)\hat{u} = p_0$$

$$\left(-\omega^2 m + \underbrace{k(1+i\eta)}_{k_c}\right)\hat{u} = p_0$$

k_c : Complex stiffness

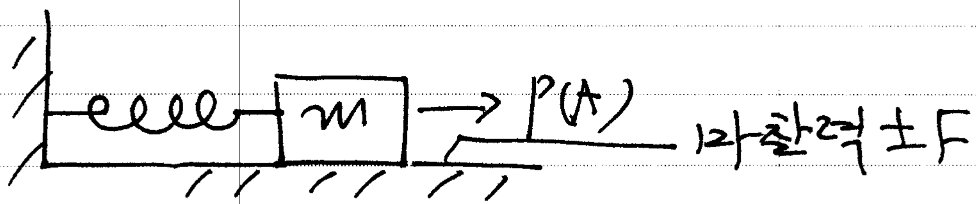
$$m\ddot{u} + k_c u = p(t)$$

stiffness를 complex로 정의하고
주파수영역(진동수영역)에서 해석시행

FFT를 알고나면 매우 편리한 방법

3.11. 쿨롱 마찰을 가진 조화운동

3.11.1. 운동방정식



$$m\ddot{u} + ku + \mathrm{sgn}(\dot{u})F = p(t)$$

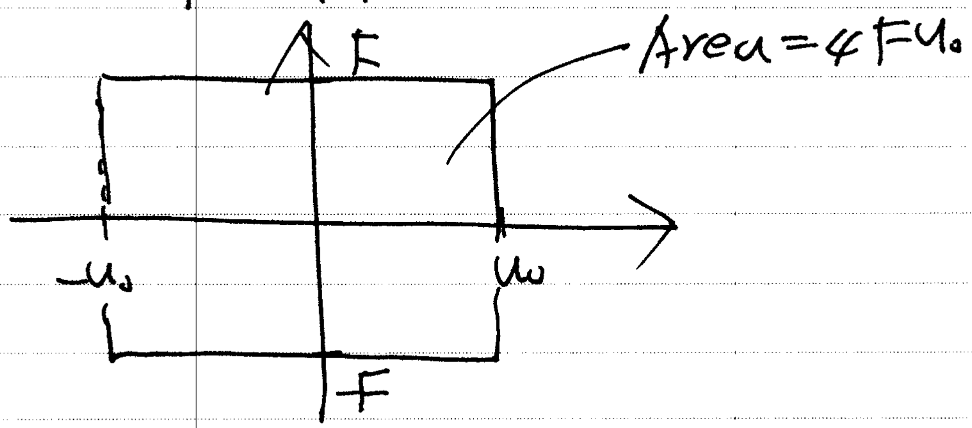
3.11.2 조화하중에 대한 정상상태 응답

✓ $\omega = \omega_N$에서 $F < \left(\frac{\pi}{4}\right)p_0$ 이라고 가정

운동의 진폭이 쿨롱마찰이 있더라도 상한이 없다

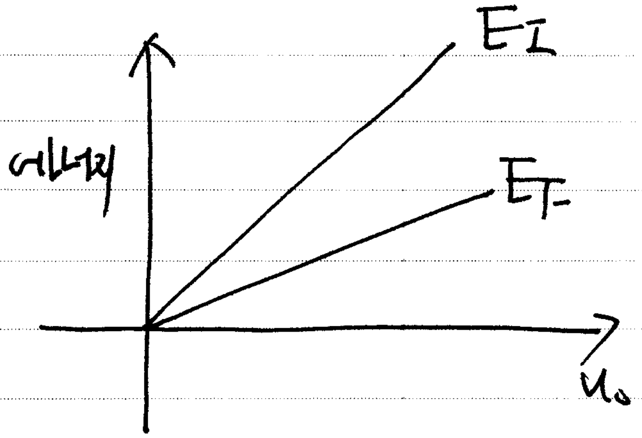
마찰에의해서 한 사이클당 소산되는 에너지

$$E_F = 4Fu_0$$



만약 $F < \left(\frac{\pi}{4}\right)P_0$ 이면

$E_F < E_I$



3.11.3. 등가점성감쇠를 이용하여

$$\zeta_{eq} = \left(\frac{1}{4\pi}\right)\left(\frac{1}{\beta}\right)\frac{E_D}{E_{s0}}$$

$$= \left(\frac{1}{4\pi}\right)\left(\frac{1}{\beta}\right)\frac{4Fu_0}{\frac{1}{2}ku_0^2}$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{1}{\beta}\right)\frac{F/k}{u_0}$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{1}{\beta}\right)\frac{u_F}{u_0}$$

u_0 에 대한 근사해 : 점성감쇠시스템

$$\frac{u_0}{(u_{st})_0} = \frac{1}{\left[(1-\beta^2)^2 + (2\zeta_{eq}\beta)^2\right]^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + \left(2\left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{u_F}{u_0}\right)\beta\right)^2}}$$

$$\frac{u_0}{(u_{st})_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + \left(\left(\frac{4}{\pi}\right)\left(\frac{u_F}{u_0}\right)\right)^2}} = \frac{u_0}{p_0/k}$$

$$\left(\frac{p_0}{k}\right)^2 = u_0^2\left((1-\beta^2)^2 + \left(\frac{4}{\pi}\frac{u_F}{u_0}\right)^2\right)$$

$$= u_0^2(1-\beta^2)^2 + \left(\frac{4}{\pi}u_F\right)^2$$

$$u_0^2 = \frac{\left(\frac{p_0}{k}\right)^2 - \left(\frac{4}{\pi}u_F\right)^2}{(1-\beta^2)^2}$$

$$\left(\frac{u_0}{p_0/k}\right)^2 = \frac{1-\left(\frac{4}{\pi}\frac{F}{p_0}\right)^2}{(1-\beta^2)^2}$$

$$\frac{u_0}{(u_{st})_0} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{4}{\pi}\frac{F}{p_0}\right)^2}}{(1-\beta^2)}$$

단. $\frac{4}{\pi}\frac{F}{p_0} < 1$, $F < \frac{\pi}{4}p_0$

∨ 마찰력이 작으면 sine 운동

∨ 마찰력이 크면 불연속운동

위상각에 대한 근사해

$$\tan\phi = \frac{2\zeta_{eq}\beta}{1-\beta^2}$$

$$= \frac{2\left(\frac{2}{\pi}\right)\left(\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{u_F}{u_0}\right)\beta}{1-\beta^2}$$

$$= \frac{\frac{4}{\pi}\frac{u_F}{u_0}}{1-\beta^2}$$

$$\beta<1 \longrightarrow \tan\phi = +$$

$$\beta>1 \longrightarrow \tan\phi = -$$

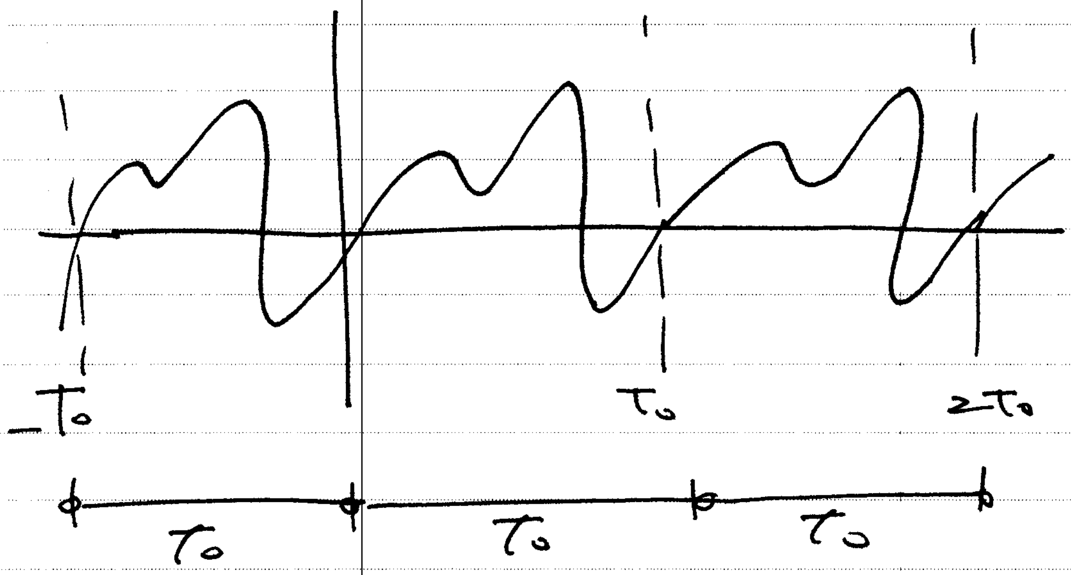
$$\tan\phi = \frac{\left(\frac{4}{\pi}\right)u_F (u_{st})_0 \frac{1-\beta^2}{\sqrt{1-\left(\frac{4}{\pi}F/p_0\right)^2}}}{1-\beta^2}$$

$$\tan\phi = \frac{\left(\frac{4}{\pi}\right) F/p_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{4}{\pi} F/p_0\right)^2}}$$

⇒ 주어진 F/p_0 에 대해서 $\tan\phi = \text{const}$.

$\omega = \omega_N$ 에서 위상각은 불연속이다.

주기 가진에 대한 응답.



T_0 = period

3.12. Fourier Series

$p(t)$는 주기함수. 주기 T_0

$$p(t + j T_0) = p(t)$$

$$t = -\infty, \cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots, \infty$$

$$p(t) = a_0 + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos\left(\frac{2\pi j}{T_0} t\right) + \sum_{j=1}^{\infty} b_j \sin\left(\frac{2\pi j}{T_0} t\right) \qquad (1)$$

$$\omega_0 = 2\pi / T_0$$

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} p(t)\, dt$$

$$a_j = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} p(t) \cos\left(\frac{2\pi j}{T_0} t\right) dt, \quad j = 1, 2, 3, \cdots$$

$$b_j = \frac{2}{T_0} \int_0^{T_0} p(t) \sin\left(\frac{2\pi j}{T_0} t\right) dt, \quad j = 1, 2, 3, \cdots$$

(증명)

식(1)의 양변에 $\cos \frac{2\pi n}{T_0} t$ 또는 $\sin \frac{2\pi n}{T_0} t$ 를 곱하여 $t=0$ 에서 T_0 까지 적분 한다.

$$p(t) = a_0 \qquad u_0(t) = P_0/k \quad (4.3절 참고)$$

$$p(t) = a_j \cos\frac{2\pi j}{T_0}t = a_j \cos j\omega_0 t$$

$$u_j^c(t) = \left(\frac{a_j}{k}\right)\frac{2\zeta\beta_j \sin(j\omega_0 t) + (1-\beta^2)\cos(j\omega_0 t)}{(1-\beta_j^2)^2 + (2\zeta\beta_j)^2}$$

$$\beta_j = \frac{j\omega_0}{\omega_N}$$

$$u_j^c(t) = \left(\frac{a_j}{k}\right) R_d \cos(j\omega_0 t - \phi)$$

$$p(t) = b_j \sin\frac{2\pi j}{T_0}t = b_j \sin j\omega_0 t$$

$$u_j^s(t) = \frac{b_j}{k}\frac{(1-\beta_j^2)\sin j\omega_0 t - 2\zeta\beta_j \cos(j\omega_0 t)}{(1-\beta_j^2)^2 + (2\zeta\beta_j)^2}$$

$$u_j^s(t) = \left(\frac{b_j}{k}\right) R_d \sin(j\omega_0 t - \phi)$$

$$u(t) = u_0(t) + \sum_{j=1}^{\infty} u_j^c(t) + \sum_{j=1}^{\infty} u_j^s(t)$$

부록3 : 네방향 대수그래프

$$\frac{Ra}{\omega/\omega_N} = Rv = \left(\frac{\omega}{\omega_N}\right)Rd$$

$$\frac{Ra}{\beta} = Rv = \beta Rd \quad , \beta = \omega/\omega_N$$

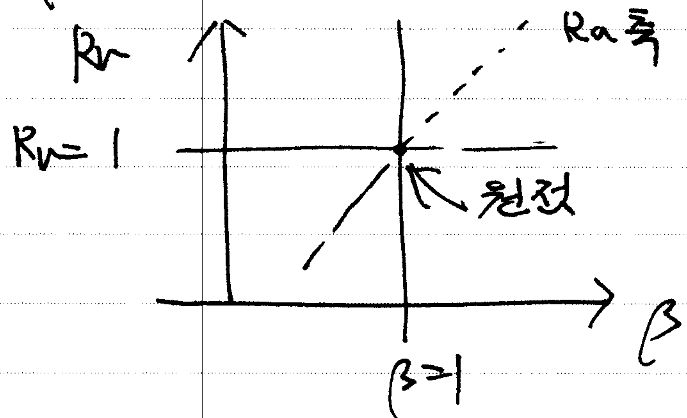
$$\log Rv = \log \beta + \log Rd \qquad (1)$$

Rd가 상수이면 (1)는 기울기 1인 직선
→ Rd 축은 기울기 (−1)

$$\log Rv = -\log \beta + \log Ra \qquad (2)$$

Ra가 상수이면 (2)는 기울기 −1인 직선
→ Ra축은 기울기 (+1)

1. $\beta = 1$, $Rv = 1$ → 원점



2. 원점에서 $Ra = 1$, Ra 축을 그린다
Ra축은 $Rd = 1$ 인 직선이다
$Ra = \beta^2 Rd = \beta^2$, $\beta = \sqrt{Ra} = Rv$

3. 원점에서 $R_d=1$, R_d 축을 그린다.
R_d 축은 $R_a=1$ 된 직선이다.

$$R_a = 1 = \beta^2 R_d \Rightarrow R_d = \frac{1}{\beta^2}$$

$$\sqrt{R_d} = \frac{1}{\beta} \Rightarrow \beta = \frac{1}{\sqrt{R_d}}$$

$$R_v = \beta R_d = \frac{1}{\sqrt{R_d}} R_d = \sqrt{R_d}$$