제 5장 동적응답의 수치계산

5.1. 시간증분법 (Time-stepping method)

비탄성시스템

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + f_s(u, \dot{u}) = p(t) \text{ or } -m\ddot{u}_g(t)$$

초기조건, $t=0$ 에서

$$u = u(0), \quad \dot{u} = \dot{u}(0)$$

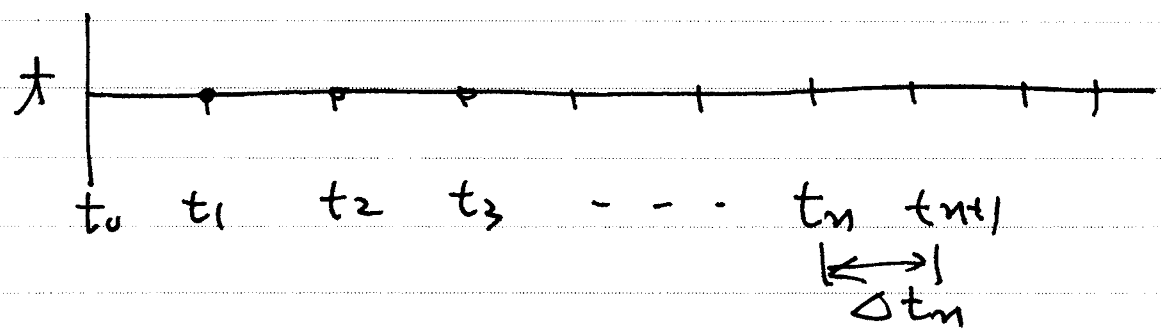
시간의 이산화

$$t_{j+1} = t_j + \Delta t_j, \quad \Delta t_j = t_{j+1} - t_j$$

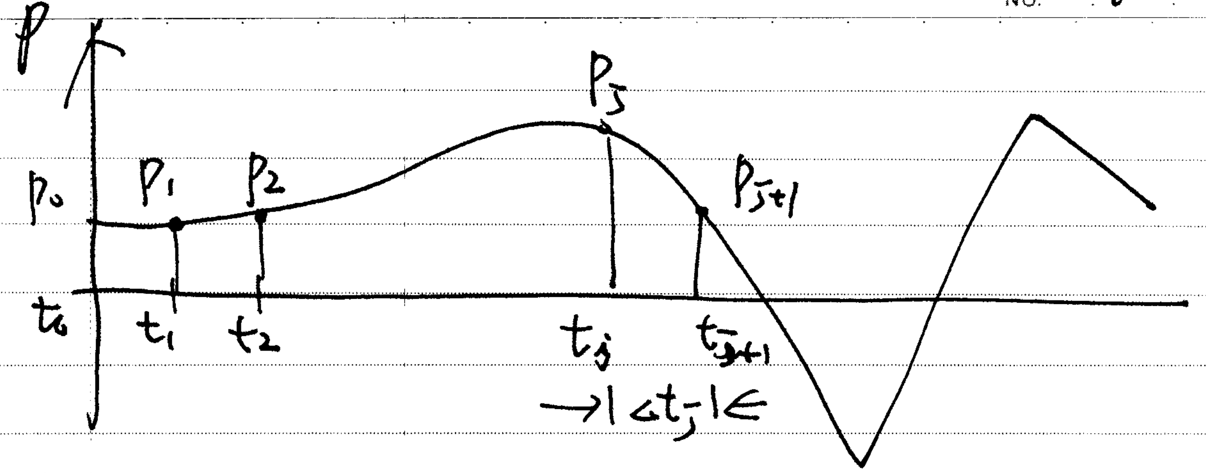
$$j = 0, 1, 2, 3, \cdots$$

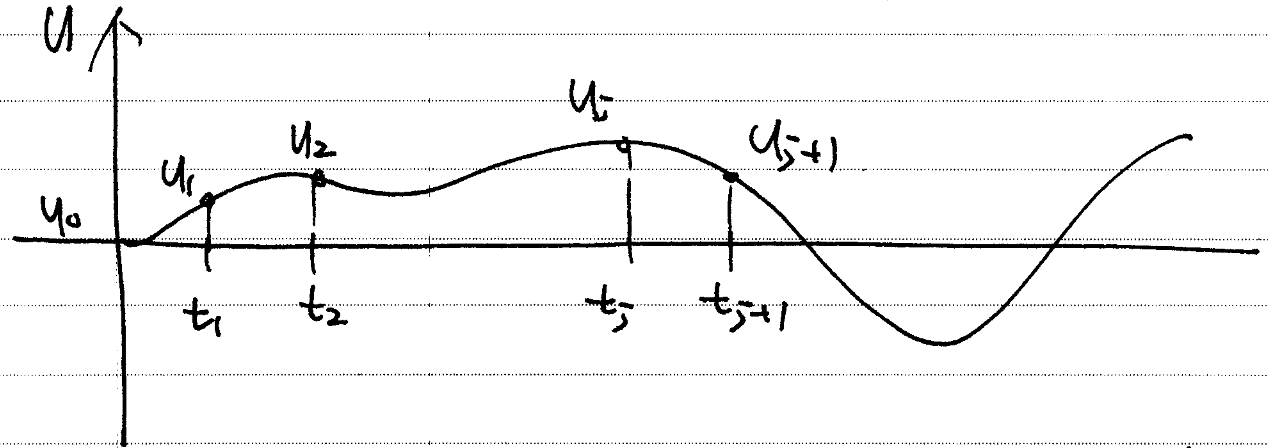
$$t_0, \quad t_1, \quad t_2, \cdots$$

$t=$ 0, Δt_0, $t_1 + \Delta t_1$



NO. 2/CN5





$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i \quad \text{(일반적으로 상수)}$$

시간 $t = t_i$ 에서 다음이 만족된다고 가정

$$m\ddot{u}_i + c\dot{u}_i + (f_s)_i = p_i \qquad (3)$$

$u_i, \dot{u}_i, \ddot{u}_i \rightarrow$ 기지량

시간 $t = t_{i+1}$ 에서 다음식을 만족하는
$u_{i+1}, \dot{u}_{i+1}, \ddot{u}_{i+1}$ 을 결정

$$m\ddot{u}_{i+1} + c\dot{u}_{i+1} + (f_s)_{i+1} = p_{i+1}$$

$\rightarrow$ Time marching $t = t_0, t_1, t_2, \cdots$

수치해석법에 대한 요구조건

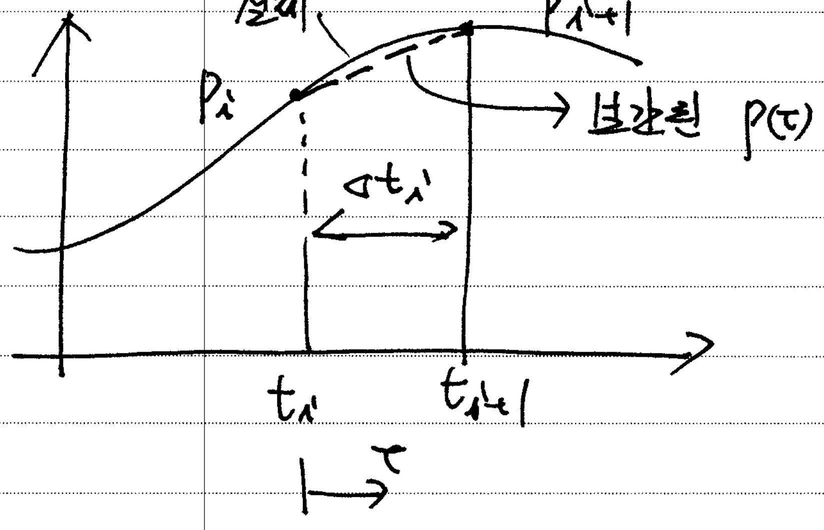
(1) 수렴조건 : 시간단계 (time step)이
감소하면 정해로 수렴
(2) 안정성 : 반올림오차에 안정되어야 한다.
(3) 정확도 : 수치해는 정해에 충분히 가까워야 한다.

공부할 시간증분법

(1) 가진함수 보간에 근거한 방법
(2) 유한차분법
(3) 가속도의 변화에 대한 가정에 근거한 방법

* 추가로 강의할 해석법 : Fourier Analysis

5.2. 가진함수의 보간에 근거한 방법



$$\Delta p_i = p_{i+1} - p_i \,, \quad \Delta t_i = t_{i+1} - t_i$$

$t_i \le t \le t_{i+1}$ 에서

$$p(\tau) = p_i + \left(\frac{\Delta p_i}{\Delta t_i}\right)\tau \leftarrow \text{선형보간}$$

$$0 \le \tau \le \Delta t_i$$

$$m\ddot{u} + ku = p_i + \left(\frac{\Delta p_i}{\Delta t_i}\right)\tau$$

$\underline{u(\tau)} = (1) + (2) + (3)$

(1) $\tau = 0$ 에서 u_i, $\dot{u}_i$ 에의한 자유진동
(2) 정지 초기조건하에서 p_i에 의한 강제진동
(3) 정지 초기조건하에서 $\left(\frac{\Delta p_i}{\Delta t_i}\right)\tau$ 에 의한 강제진동

$$u(\tau) = u_i \cos\omega_n\tau + \frac{\dot{u}_i}{\omega_n}\sin\omega_n\tau + \frac{p_i}{k}(1-\cos\omega_n\tau)$$
$$+ \frac{\Delta p_i}{k}\left(\frac{\tau}{\Delta t_i} - \frac{\sin\omega_n\tau}{\omega_n\Delta t_i}\right) \qquad (5.2.3a)$$

$$\frac{\dot{u}(\tau)}{\omega_n} = -u_i\sin\omega_n\tau + \frac{\dot{u}_i}{\omega_n}\cos\omega_n\tau + \frac{p_i}{k}\sin\omega_n\tau$$
$$+ \frac{\Delta p_i}{k}\frac{1}{\omega_n\Delta t_i}(1-\cos\omega_n\tau) \qquad (5.2.3b)$$

$\tau = \Delta t_i$ 에서 계산

$$u_{i+1} = u_i \cos\omega_n \Delta t_i + \frac{\dot{u}_i}{\omega_n}\sin\omega_n \Delta t_i$$

$$+ \frac{p_i}{k}\left[1 - \cos\omega_n \Delta t_i\right] + \frac{\Delta p_i}{k}\frac{1}{\omega_n \Delta t_i}\left[\omega_n \Delta t_i - \sin\omega_n \Delta t_i\right]$$

$$\dot{u}_{i+1} = -u_i \sin\omega_n \Delta t_i + \frac{\dot{u}_i}{\omega_n}\cos\omega_n \Delta t_i$$

$$+ \frac{p_i}{k}\sin\omega_n \Delta t_i + \frac{\Delta p_i}{k}\frac{1}{\omega_n \Delta t_i}\left[1 - \cos\omega_n \Delta t_i\right]$$

다시 정리하여 되풀이 공식을 얻는다.

$$u_{i+1} = A u_i + B\dot{u}_i + C p_i + D p_{i+1}$$

$$\dot{u}_{i+1} = A' u_i + B'\dot{u}_i + C' p_i + D' p_{i+1}$$

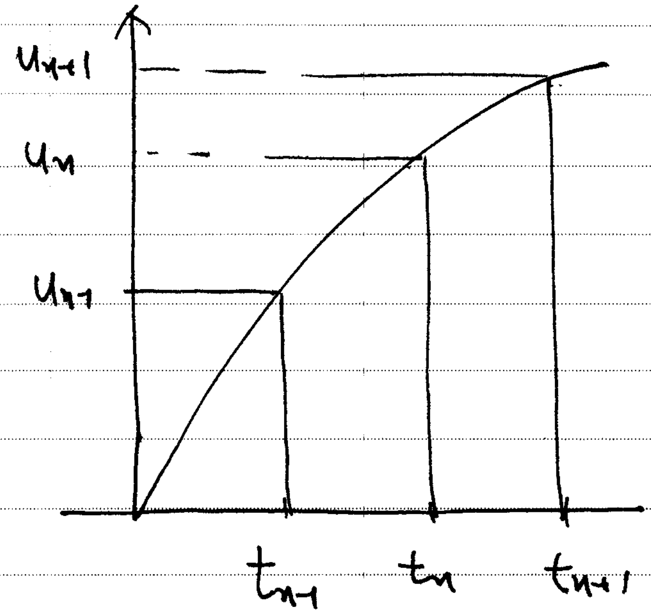
단일계 간의 시스템에서의 되풀이 공식 (5.1)

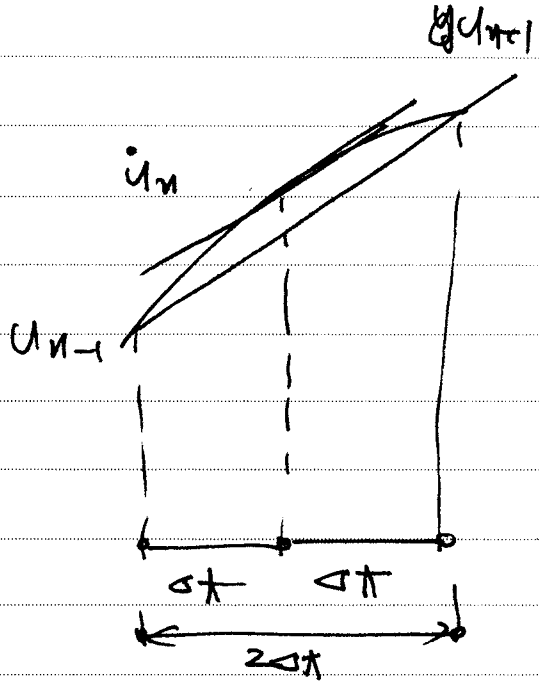
[표 5.2.1] 참조

(특징)

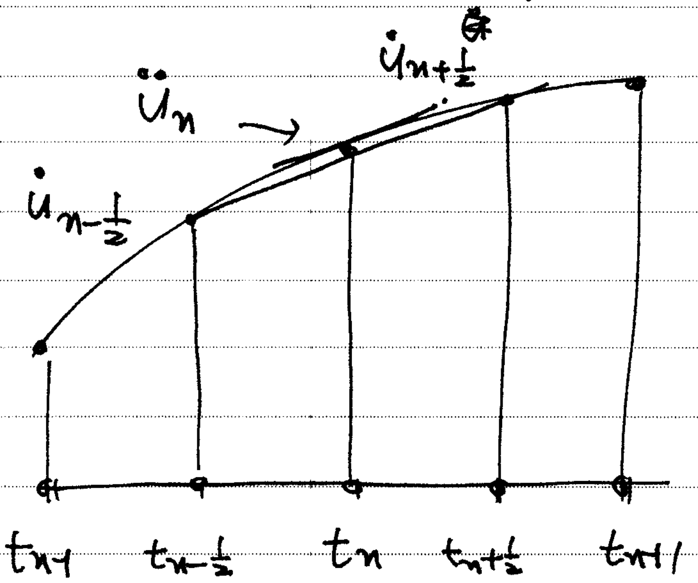
1. Δt에 대한 조건 : 가진함수 보간, 최고점을 포착할 수 있도록 충분한 간격
2. $A, B, \ldots, D'$ 을 1회만 계산
3. 선형시스템에서 타당
4. 다자유도시스템 : 모드중첩법에 적합

5.3. 중심차분법 (Central Difference Method)





$$\dot{u}_n = \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta t}$$



$$\dot{u}_{n-\frac{1}{2}} = \frac{u_n - u_{n-1}}{\Delta t}$$

$$\dot{u}_{n+\frac{1}{2}} = \frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t}$$

$$\ddot{u}_n = \frac{\dot{u}_{n+\frac{1}{2}} - \dot{u}_{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{(\Delta t)^2}$$

NO. 7/CH5

$$\dot{u}_n = \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2\Delta t} \ ; \quad \ddot{u}_n = \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{(\Delta t)^2}$$

$$m\left(\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta t)^2}\right) + c\left(\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta t}\right) + ku_i = P_i$$

$$\underbrace{\left[\frac{m}{(\Delta t)^2} + \frac{c}{2\Delta t}\right]}_{\hat{k}} u_{i+1} = \underbrace{P_i - \left[\frac{m}{(\Delta t)^2} - \frac{c}{2\Delta t}\right] u_{i-1} - \left[k - \frac{2m}{(\Delta t)^2}\right] u_i}_{\hat{P}_i}$$

$$\boxed{\hat{k}\, u_{i+1} = \hat{P}_i}$$

$$u_{i+1} = \frac{\hat{P}_i}{\hat{k}}$$

✓ 양함수법 : t_{i+1} 에서의 평형조건이 아니라 t_i 에서의 평형조건을 이용하여 u_{i+1} 을 구하였기 때문

✓ Not self-starting : u_1 을 구하기 위해서 u_{-1} 이 필요하다.

$$u_{-1} = u_0 - \Delta t \dot{u}_0 + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{u}_0$$

↑ Taylor series expansion around $t=0$

$$m\ddot{u}_0 + c\dot{u}_0 + ku_0 = p_0$$

$$\ddot{u}_0 = \frac{p_0 - c\dot{u}_0 - ku_0}{m}$$

안정성 조건

$$\frac{\Delta t}{T_n} < \frac{1}{\pi}$$

표 5.3.1. 참고

5.4 Newmark 방법

5.4.1. 기본 절차.

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + [(1-\gamma)\Delta t]\ddot{u}_i + (\gamma \Delta t)\ddot{u}_{i+1}$$

$$u_{i+1} = u_i + (\Delta t)\dot{u}_i + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta\right)(\Delta t)^2\right]\ddot{u}_i$$
$$+ \left[\beta(\Delta t)^2\right]\ddot{u}_{i+1}$$

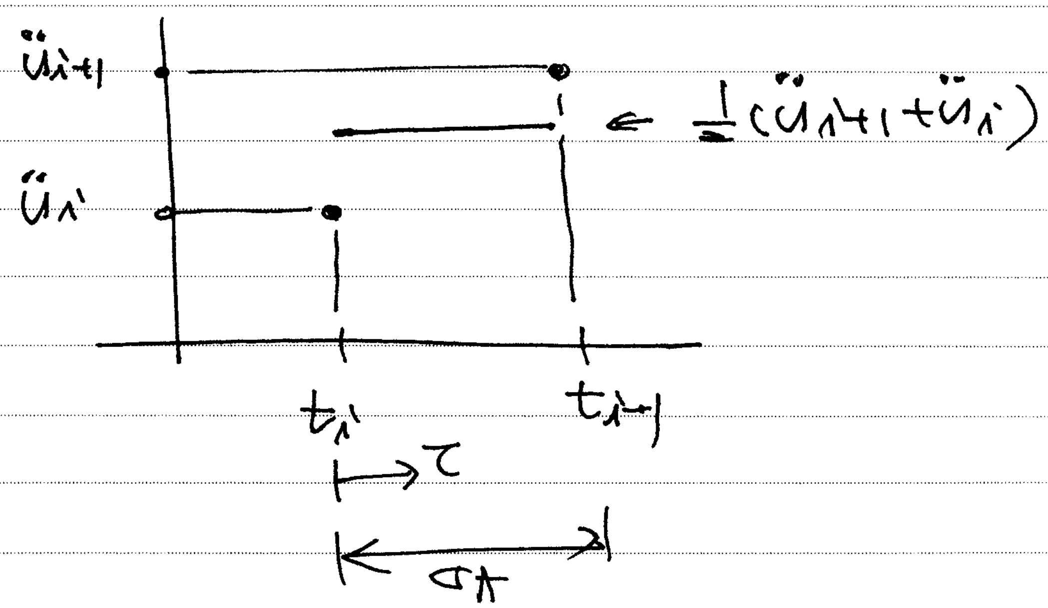
$t_i \leftrightarrow t_{i+1}$ 간의 가속도를 $\ddot{u}_i$, $\ddot{u}_{i+1}$ 의 함수로 표현한 후 속도와 변위를 적분해서 구하는 방법.

$\gamma = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{6} \le \beta \le \frac{1}{4}$ 을 선택하면 일반적으로 만족스러운 결과가 얻어짐.

β 와 γ 의 값에 따라서 수치안정성 및 정확도가 결정된다.

5.4.2 특수한 경우

일정 평균가속도법



$$\ddot{u}(\tau) = \frac{1}{2}(\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i)$$

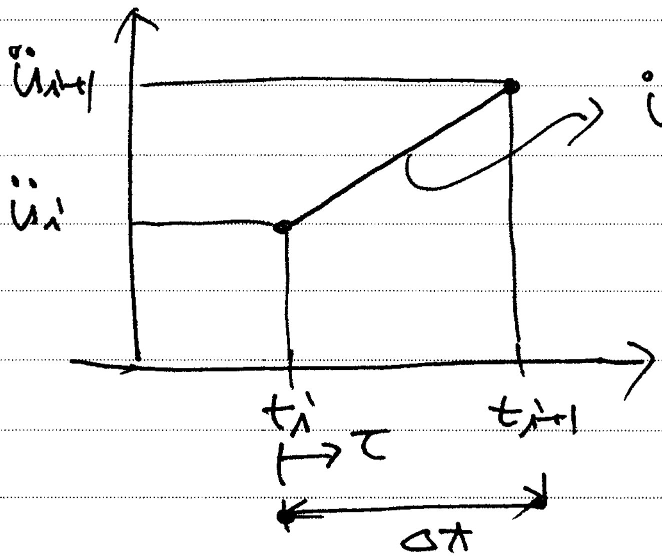
NO. 11/CH5

$$\begin{cases} \dot{u}(\tau) = \dot{u}_i + (\tau)\left(\dfrac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2}\right) \\ u(\tau) = u_i + \tau \dot{u}_i + \dfrac{\tau^2}{2}\left(\dfrac{\ddot{u}_{i+1} + \ddot{u}_i}{2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \dfrac{\Delta t}{2}\ddot{u}_i + \dfrac{\Delta t}{2}\ddot{u}_{i+1} \\ u_{i+1} = u_i + \Delta t\, \dot{u}_i + \dfrac{(\Delta t)^2}{4}\ddot{u}_i + \dfrac{(\Delta t)^2}{4}\ddot{u}_{i+1} \end{cases}$$

↳ $\gamma = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{4}$ 의 Newmark formula.

선형가속도법



$\ddot{u}(\tau) = \ddot{u}_i + \dfrac{\tau}{\Delta t}(\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i)$

$$\ddot{u}(\tau) = \ddot{u}_i + \frac{\tau}{\Delta t}(\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i)$$

$$\begin{cases} \dot{u}(\tau) = \dot{u}_i + \tau \ddot{u}_i + \frac{\tau^2}{2}\frac{1}{\Delta t}(\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i) \\ u(\tau) = u_i + \tau \dot{u}_i + \frac{\tau^2}{2}\ddot{u}_i + \frac{\tau^3}{6\Delta t}(\ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_i + \frac{\Delta t}{2}\ddot{u}_{i+1} \\ u_{i+1} = u_i + \Delta t \dot{u}_i + \frac{1}{3}(\Delta t)^2 \ddot{u}_i + \frac{(\Delta t)^2}{6}\ddot{u}_{i+1} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\gamma = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{6}$ 의 Newmark formula

5.4.3. 비반복공식

$$\Delta u_i = u_{i+1} - u_i, \quad \Delta \dot{u}_i = \dot{u}_{i+1} - \dot{u}_i, \quad \Delta \ddot{u}_i = \ddot{u}_{i+1} - \ddot{u}_i$$

$$\Delta p_i \equiv p_{i+1} - p_i$$

$$\begin{cases} \Delta \dot{u}_i = (\Delta t)\ddot{u}_i + (\gamma \Delta t)\Delta \ddot{u}_i \\ \Delta u_i = (\Delta t)\dot{u}_i + \frac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{u}_i + \beta(\Delta t)^2 \Delta \ddot{u}_i \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta \ddot{u}_i = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\Delta u_i - \frac{\dot{u}_i}{\beta \Delta t} - \frac{1}{2\beta}\ddot{u}_i \\ \Delta \dot{u}_i = \frac{\gamma}{\beta \Delta t}\Delta u_i - \frac{\gamma}{\beta}\dot{u}_i + \Delta t\left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{u}_i \end{cases}$$

$$m\Delta\ddot{u}_i + c\,\Delta\dot{u}_i + k\Delta u_i = \Delta p_i$$

$$m\left\{\frac{\Delta u_i}{\beta(\Delta t)^2} - \frac{\dot{u}_i}{\beta\Delta t} - \frac{\ddot{u}_i}{2\beta}\right\}$$

$$+c\left\{\frac{\gamma}{\beta\Delta t}\Delta u_i - \frac{\gamma}{\beta}\dot{u}_i + \Delta t\left(1-\frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{u}_i\right\}$$

$$+k\Delta u_i = \Delta p_i$$

↳ Δu_i를 제외한 모든 항들 정리하고

$$\left(\underbrace{k + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}c + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}m}_{\hat{k}}\right)\Delta u_i$$

$$= \underbrace{\Delta p_i + \left(\frac{m}{\beta\Delta t} + \frac{\gamma}{\beta}c\right)\dot{u}_i + \left\{\frac{m}{2\beta} + \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)c\right\}\ddot{u}_i}_{\Delta\hat{p}_i}$$

$$\hat{k}\Delta u_i = \Delta\hat{p}_i \rightarrow \Delta u_i = \frac{\Delta\hat{p}_i}{\hat{k}}$$

$$\ddot{u}_{i+1} = \frac{1}{m}\left(p_{i+1} - c\dot{u}_{i+1} - ku_{i+1}\right)$$

$$\ddot{u}_0 = \frac{1}{m}(p_0 - c\dot{u}_0 - ku_0)$$

↑ self-starting method

음해법 : t_{i+1} 에서의 해를 구할 때 t_{i+1} 에서의 평형조건을 이용한다.

수치적 안정성 조건

$$\frac{\Delta t}{T_n} \le \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\gamma - 2\beta}}$$

평균가속도법

$\gamma = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{4}$, $\frac{\Delta t}{T_n} \le \infty$

Δt에 무관하게 안정

선형가속도법

$\gamma = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{6}$, $\frac{\Delta t}{T_n} \le 0.551$

$\boxed{\text{표 5.4.2 숙지}}$

5.5. 안정성과 계산오차.

5.5.1 안정성

조건적으로 안정한 절차.

- ✓ Time-step의 크기가 한계보다 작다는 유계해가 존재한다.
- ✓ 선형가속도법 : $\Delta t / T_N < 0.551$
- ✓ 중심차분법 : $\Delta t / T_N < 1/\pi$

무조건적으로 안정한 절차

- ✓ Time-step의 크기에 무관하게 유계해 존재
- ✓ 일정평균가속도법

단자유도 시스템 ;

- ✓ 안정성 관련 개념은 주목되지 않는다.
- ✓ 정확한 해를 위해서 $\Delta t / T_N$이 작아야 한다.

다자유도 시스템

- ✓ 고차모드에서도 안정성을 유지하자면 $\Delta t / T_N$이 매우 작아야 한다.
- ✓ 무조건적으로 안정한 절차가 선호된다.

5.5.2 계산오차.

자유진동문제

$m\ddot{u}+ku=0$, $u(0)=1$, $\dot{u}(0)=0$

이론해 $u(t)=\cos\omega_n t$

수치해법 비교: 중심차분법, 평균가속도법, 선형가속도법, 윌슨 방법

비교항목: 진폭의 쇠퇴(AD), 주기의 늘어남(PE)
를 $\Delta t/T_n$의 함수로 비교

진폭의 쇠퇴(AD)

- ✓ 윌슨방법: 수치적 감쇠
- ✓ 중심차분법, 평균가속도법, 선형가속도법: 수치적 감쇠가 없음.

주기의 늘어남(PE)

- ✓ 중심차분법이 가장 부정확: $\Delta t/T_n = 1/\pi$ 근처에서 오차 급증
- ✓ 선형가속도법이 PE가 최소

적합한 해법

- ✓ 단자유도 시스템: 선형가속도법
- ✓ 다자유도 시스템: 일정평균가속도법 또는 윌슨 법

시간 단계폭의 선택

- ✓ $\Delta t = 0.1 T_n$ 이면 합리적인 결과

v 지반운동 : $\Delta t = 0.02$ sec (계측시 간격)
시간단계폭은 이보다 작아야 한다.

실용적인 시간단계폭 결정
v 시간단계폭을 줄여가면서 해석 반복
v 연속된 두 결과 근접시 단정.

~~5.6. 비~~
(그림 5.5.1) 수록

(그림 5.5.2) 수록

5.6. 비선형응답해석 : 중심차분법

추후에 최종예정

5.7 비선형응답해석 : 뉴마크법

추후에 최종예정

B. Fourier Analysis

Fourier series

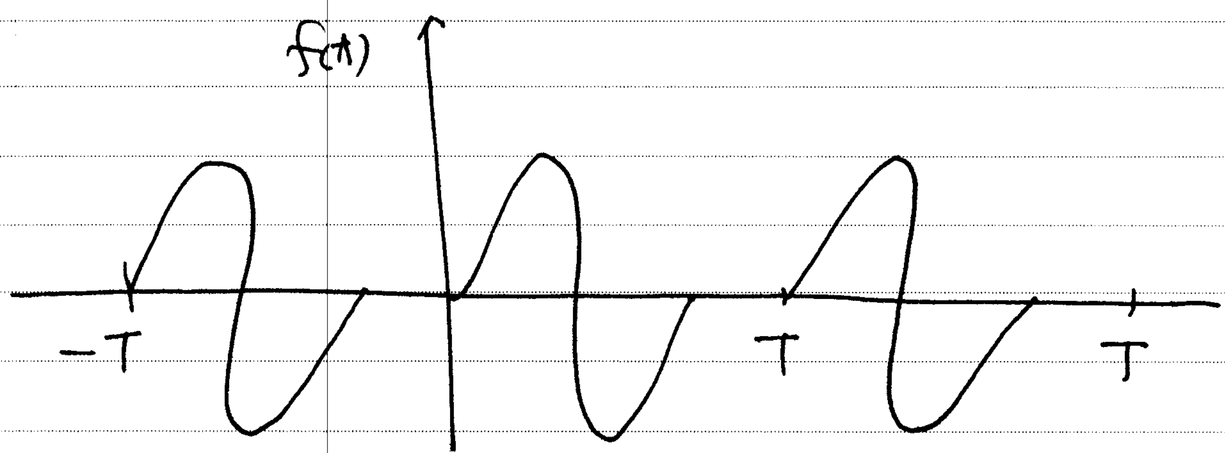
periodic function : $f(t)$

$$f(t+T) = f(t), \quad \text{period} = T$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\frac{2\pi}{T}t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega_0 t} \quad (1)$$

$$\omega_0 = 2\pi/T$$

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t}\, dt \quad (2)$$



Uniqueness of a_n

19/0415

Uniqueness of a_n

$$b_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-inw_0 t}$$

$$a_n = b_n$$

(증명)

$$a_n - b_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} f(t)e^{-inw_0 t}dt$$

$$- \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T} f(t)e^{-inw_0 t}dt$$

우변의 ~~두~~ 첫번째 항에서 $\tau = t + T$로 변환

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{0} f(t)e^{-inw_0 t}dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T} f(\tau - T)e^{-inw_0(\tau - T)}d\tau$$

$$= \frac{1}{T}\int_{T/2}^{T} f(\tau)e^{-inw_0 \tau}d\tau$$

$\Downarrow$ $a_n = b_n \rightarrow$ unique

20/CH5

(정리) 만약 주기함수 $f(t)$가 식(11)에 의해서 표현된다면 a_n은 식(12)에 의해서 주어진다.

(증명)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-in\omega_0 t}$$

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-in\omega_0 t}\, dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{im\omega_0 t}\right) e^{-in\omega_0 t}\, dt$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{im\omega_0 t} e^{-in\omega_0 t}\, dt$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \underbrace{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{i(m-n)\omega_0 t}\, dt}_{\substack{= 0 \ \text{if } m \neq n \\ 1 \ \text{if } m = n}}$$

$$= a_n$$

따라서

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\, e^{-in\omega_0 t}\, dt$$

Fourier Transform

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \qquad (1)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \qquad (2)$$

Fourier Series → Fourier Transform

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \qquad (3)$$

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \qquad (4)$$

식(3)은 $|t| < T/2$ 에서 식(1)과 동일

식(4)에서

$$T a_n = \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\overbrace{\frac{2\pi}{T}}^{=\omega_0} t} dt$$

$T \to \infty$ 이면

$$T a_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-in\frac{2\pi}{T} t} dt = F(n\omega_0)$$

22/CH5

$T \to \infty$ 이라면 $2\pi / T \to 0$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T a_n e^{i n \omega_0 t} \left(\frac{2\pi}{T}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0)\, \omega_0$$

$T \to \infty$ 이라면 $\omega_0 = d\omega$, $n\omega_0 = \omega$

식(6)은

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

Fourier Transform에 의한 SDOF system의 응답해석.

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t)$$

I.C. $\quad u(0) = 0$, $\dot{u}(0) = 0$

$$\mathcal{F}[m\ddot{u} + c\dot{u} + ku] = \mathcal{F}[p(t)]$$

$$(-\omega^2 m + i\omega c + k)\hat{u} = \hat{p}$$

23/CH5

$$\hat{u} = \underbrace{\left(\frac{1}{-\omega^2 m + i\omega c + k}\right)}_{H(\omega)} \underbrace{\hat{P}(\omega)}_{P(\omega)}$$

$$= H(\omega)\,P(\omega)$$

↑ system function

$$u(t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{u}(\omega)]$$

$$= \mathcal{F}^{-1}[H(\omega)\,P(\omega)]$$

Fourier Analysis 절차.

$$\begin{array}{ccc} p(t) & \xrightarrow{\text{F.T.}} & P(\omega) \\ & & \downarrow \\ u(t) & \xleftarrow[\text{I.F.T}]{} & H(\omega)\,P(\omega) \end{array}$$

(Inverse Fourier Transform)

일반적으로

$H(\omega)$: closed form Analytic expression

$P(\omega)$: numerical expression

or Analytic expression

24/cw5

$$\begin{tikzcd} h(t) \arrow[r, leftrightarrow, "F.T", "I.F.T"'] & H(\omega) \end{tikzcd}$$

$\uparrow$ Impulse Response function

$\uparrow$ System function

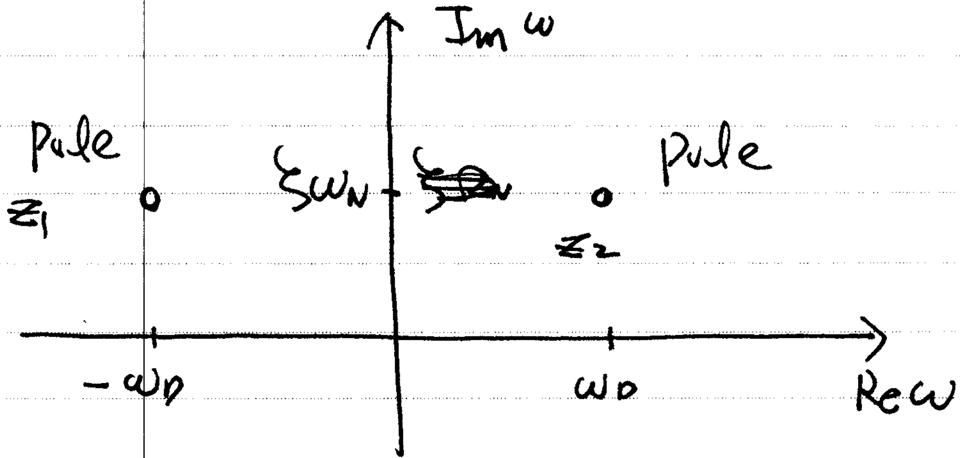
Analytic solution : contour integral

$$H(\omega) = \frac{1}{-\omega^2 m + i\omega c + k}$$

$$= \left(-\frac{1}{m}\right) \frac{1}{\omega^2 - i\omega 2\zeta\omega_N - \omega_N^2}$$

$\omega^2 - (2i\zeta\omega_N)\omega - \omega_N^2 = 0$ 의 근

$$\omega = i\zeta\omega_N \pm \omega_D$$

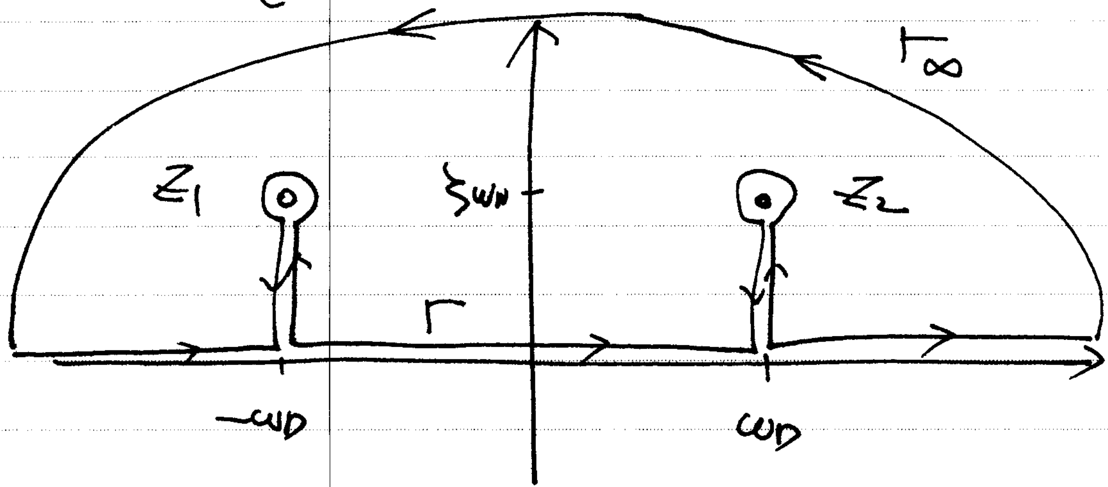


25/CH5

$$H(\omega)=\left(-\frac{1}{m}\right)\frac{1}{[\omega-(i\xi-\omega_D)][\omega-(i\xi+\omega_D)]}$$

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)e^{i\omega t}d\omega}_{I}$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi}\right)I$$



$$I=2\pi i\sum_{j=1}^{2}R(z_j) \quad \Leftarrow \text{Residue theorem}$$

$$R(z_1)=\left(-\frac{1}{m}\right)\frac{e^{i(i\xi\omega_N-\omega_D)t}}{[i\xi\omega_N-\omega_D-(i\xi\omega+\omega_D)]}$$

$$=\left(-\frac{1}{m}\right)\frac{e^{-\xi\omega_N t}\,e^{-i\omega_D t}}{(-2\omega_D)}$$

26/CH5

$$R(z_2)=\left(-\frac{1}{m}\right)\frac{e^{i(i\zeta\omega_N+\omega_D)t}}{[i\zeta\omega_N+\omega_D-(i\zeta\omega_N-\omega_D)]}$$

$$=\left(-\frac{1}{m}\right)\frac{e^{-\zeta\omega_N t}e^{i\omega_D t}}{2\omega_D}$$

$$\sum_{j=1}^{2}R(z_j)=\left(-\frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{2\omega_D}\right)\left(-e^{-i\omega_D t}+e^{i\omega_D t}\right)e^{-\zeta\omega_N t}$$

$$=\left(-\frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{2\omega_D}\right)\left(2i\sin\omega_D t\right)e^{-\zeta\omega_N t}$$

$$h(t)=\left(\frac{1}{2\pi}\right)(2\pi i)\sum_{j=1}^{2}R(z_j)$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi}\right)(2\pi i)\left(-\frac{1}{m}\right)\left(\frac{1}{2\omega_D}\right)(2i\sin\omega_D t)e^{-\zeta\omega_N t}$$

$$=\frac{1}{m\omega_D}\sin\omega_D t\, e^{-\zeta\omega_N t}$$

$$=\left(\frac{1}{m\omega_D}\right)e^{-\zeta\omega_N t}\sin\omega_D t$$

217/CH5

Approximation of Fourier Integral

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

$$\simeq \frac{1}{2\pi}\Delta\omega \sum_{n=-M}^{M-1} F(n\Delta\omega)\, e^{in\Delta\omega t} \qquad (1)$$

$$t = m\Delta t = m\frac{T}{N}, \quad \Delta\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad 2M = N$$

$$f(m\Delta t) \simeq \left(\frac{1}{2\pi}\right)\left(\frac{2\pi}{T}\right)\sum_{n=-M}^{M-1} F(n\Delta\omega)\, e^{i\frac{2\pi nm}{N}}$$

$$= \sum_{n=-M}^{M-1}\left(\frac{1}{T}F(n\Delta\omega)\right) e^{i\frac{2\pi nm}{N}} \qquad (2)$$

$$\frac{F(n\Delta\omega)}{T} = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-in\Delta\omega t}\, dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(t)\, e^{-in\Delta\omega t}\, dt$$

$$= \left(\frac{1}{T}\right)\left(\frac{T}{N}\right)\sum_{m=0}^{N-1} f(m\Delta t)\, e^{-in\frac{2\pi}{T}\frac{T}{N}m}$$