

Electromagnetic field 1 schedule

week	date	experiment contents
1	3/3	Vector analysis (1)
2	3/10	Vector analysis (2)
3	3/17	How to use Matlab (1)
4	3/24	How to use Matlab (2)
5	3/31	Finite Difference Methode
6	4/7	Laplace equation
7	4/14	Finite Element Methode
8	4/21	FDTD method
9	4/28	FEMM
10	5/5	1st Q&A
11	5/12	2nd Q&A
12	5/19	Magnetic force measurement
13	5/26	Helmholtz coil measurement
14	6/2	3rd Q&A
15	6/9	feedback

2

MATLAB

MATLAB의 기초와 응용

1. MATLAB의 시작

1.1. MATLAB 개요

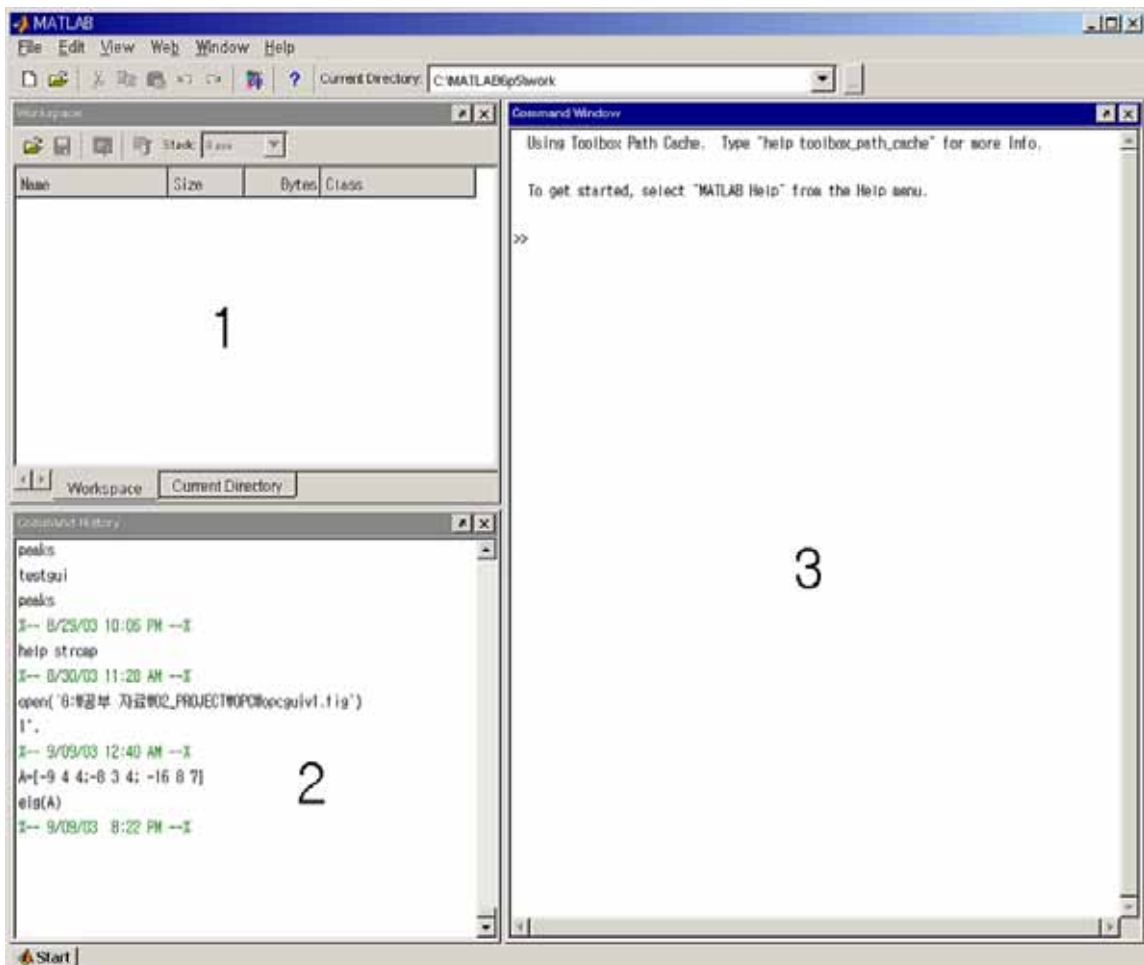
MATLAB이란 **MAT**rix **LAB**oratory를 뜻하는 말로서, 수치해석, 행렬연산, 신호처리 및 간편한 그래픽 기능 등을 통합하여 고성능의 수치계산 및 결과의 가시화 기능을 제공하는 프로그램이다.

MATLAB은 행렬과 벡터를 기본 자료로 사용하여 기능을 수행하는 계산환경을 제공한다.

MATLAB은 기본적으로 행렬을 자료로 다루기 때문에 dimensioning이 필요하지 않으며 통상적인 프로그래밍 언어들을 사용하여 프로그램을 작성하지 않고도 쉽게 수치 계산을 수행할 수 있다.

MATLAB의 가장 큰 특징은 M-file을 사용함으로써 특정한 해를 구하는데 필요한 응용 프로그램을 손쉽게 작성할 수 있다는 점이다.

1.2. MATLAB main window



1. **Workspace**: 현재 command window에서 사용되고 있는 데이터에 대한 정보를 EXCEL과 같은 spread sheet 구조로 보여주며 사용자가 쉽게 데이터 값을 바꿀 수 있게 해준다.
2. **Command History**: MATLAB을 수행하는 동안 실행한 모든 명령어들을 기록해준다. 그러므로 이전에 사용했던 모든 명령어를 쉽게 재사용할 수 있다.
3. **Command Window**: 사용자가 MATLAB 명령어를 직접 입력하여 실행할 수 있다. “>>” 모양의 프롬프트에 간단한 연산이나 명령어를 입력하면 결과 값을 볼 수 있다. 또한, M file을 실행시킬 수 있다.

1.3 간단한 연산

MATLAB의 Command Window(명령창)에서는 간단한 연산을 수행할 수 있다. 또한, 수학, 공학 및 과학에서 중요한 여러 가지 일반 함수와 상수뿐만 아니라 특수한 문제를 풀기 위한 수백 개의 특수한 함수 및 알고리즘을 제공한다. (예: i, j, pi, eps, sin, cos, besselj, legendre 등)

명령창에서 작업을 할 때, MATLAB은 생성된 변수들의 값과 명령어들을 Workspace(작업 공간)에 저장한다. who 명령어를 통해, Workspace에 저장되어 있는 변수들의 목록을 확인 할 수 있다. 또한 저장되어 있는 변수들은 clear 명령어로 지울 수 있다.

```
>> A = 1+2i
```

```
A =
```

```
1.000000000000000 + 2.000000000000000i
```

```
>> B = 1-2j
```

```
B =
```

```
1.000000000000000 - 2.000000000000000i
```

```
>> C = A*B*cos(pi)
```

```
C =
```

```
-5
```

```
>> who
```

```
Your variables are:
```

```
A      B      C
```

```
>> clear B
```

```
>> who
```

```
Your variables are:
```

```
A      C
```

help 명령어를 이용하면, MATLAB에서 정의하고 있는 여러 가지 함수들에 대한 도움말을 볼 수 있다.

```
>> help cos
```

COS Cosine.
COS(X) is the cosine of the elements of X.

Overloaded methods
help sym/cos.m

1.4 행렬의 연산

1.4.1 벡터의 생성

벡터를 생성하기 위해서 왼쪽 중괄호([])로 시작하여 원하는 값들을 공백()이나 쉼표(,)로 분리하여 입력하고 오른쪽 중괄호(])로 닫는다. 또한 콜론(:)기호를 사용하여, 일정한 수열 형태의 벡터를 생성할 수도 있다. 벡터의 각 원소는 첨자를 사용하여 접근한다. 예를 들어, x의 첫 번째 원소는 x(1), x의 두 번째 원소는 x(2)등으로 나타낸다.

x = [2 pi/2 1+2j]	특정한 원소의 행벡터 x를 생성
x = first:last	first부터 last까지 간격이 1인 행벡터 x를 생성
x = first:increment:last	first부터 last까지 increment 간격인 행벡터 x를 생성

```
>> x = [2 2*pi sqrt(2) 2-3j log(2)]
```

```
x =
```

```
Columns 1 through 2
```

```
2.0000000000000000          6.28318530717959
```

```
Columns 3 through 4
```

```
1.41421356237310          2.000000000000000 - 3.000000000000000i
```

```
Column 5
```

```
0.69314718055995
```

```
>> y = 1:5
```

```
y =
```

```
1 2 3 4 5
```

```
>> z = 1:2:9
```

```
z =
```

```
1 3 5 7 9
```

```
>> w = y(1)+z(5)
```

```
w =
```

```
10
```

위의 예제에서의 벡터는 한 개의 행과 여러 개의 열로 구성되었다. 이러한 벡터를 **행벡터**

라고 한다. 이와는 달리, 여러 개의 행과 한 개의 열로 구성된 **열벡터**를 구성할 수 있다.

열벡터를 생성하는 방법으로 세미콜론으로 값들을 분리하여 정의하거나, 전치(transpose) 연산자(' ')를 이용하여 행벡터를 열벡터로 전치하는 방법이 있다.

```
>> y = 1:5
y =
     1     2     3     4     5
>> z = y'
z =
     1
     2
     3
     4
     5
```

1.4.2 행렬의 생성

행렬의 생성은 행벡터와 열벡터의 생성과 같고, 특정 행에서 원소들을 분리하기 위하여 쉼표(,)나 공백()을 사용하고 각각 행을 나누기 위해서 세미콜론(:)을 사용한다.

```
>> X = [1 2 3 4;5 6 7 8]
X =
     1     2     3     4
     5     6     7     8
```

여기서 X는 2×4 행렬이 된다.

1.4.3 행렬의 연산

- 행렬의 덧셈 및 뺄셈에는 숫자의 덧셈 및 뺄셈과 마찬가지로 '+' 와 '-' 기호를 사용한 다. 단 행렬 연산의 대상이 되는 두 행렬의 차원이 같아야 한다.

- 행렬 또는 벡터의 덧셈과 뺄셈은 각 행렬의 같은 위치, 즉 **행렬 상의 색인이 같은 원소**끼리 이루어진다. (원소 대 원소 연산)

- 서로 차원이 다른 경우에 연산이 불가능했지만, 예외적으로 1× 행렬인 스칼라의 경우에는 어떤 한 행렬이나 벡터와도 연산이 가능하다. 이 경우에는 행렬이나 벡터의 모든 원소들에 스칼라를 더하거나 빼면 된다.

```
>> X = [1 2 3;4 5 6] % 새로운 행렬 X 생성
X =
     1     2     3
     4     5     6
>> Y = X-1 % 배열 X의 모든 원소에서 1을 빼서 행렬 Y 생성
Y =
```

```

    0    1    2
    3    4    5
>> Z = X - Y          % 원소 대 원소로 X에 Y를 빼서 행렬 Z 생성
Z =
    1    1    1
    1    1    1
>> 2*Z+Y             % Z의 모든 원소에 2를 곱하고 Y를 더함
ans =
    2    3    4
    5    6    7

```

하지만 곱셈과 나눗셈의 경우 점 곱셈 기호($\cdot*$)와 점 나눗셈 기호($\cdot/$)를 사용하여 원소 대 원소를 곱한다. 즉, 두 행렬의 차원이 같을 때 각 행렬의 같은 위치에 있는 원소들끼리 곱셈을 하여 새로운 행렬을 구성한다. 곱셈 기호($*$)앞의 점(\cdot)은 원소 대 원소의 배열 곱셈을 수행한다는 의미이다.

```

>> X                  % 행렬 X를 다시 출력
X =
    1    2    3
    4    5    6
>> Y                  % 행렬 Y를 다시 출력
Y =
    0    1    2
    3    4    5
>> X.*Y               % 행렬 X와 Y의 원소 대 원소 곱을 실행
ans =
    0    2    6
   12   20   30

```

점이 없는 곱셈은 선형 대수에서 다루는 행렬 곱셈을 의미한다.

```

>> X                  % 2x3 행렬 X를 다시 출력
X =
    1    2    3
    4    5    6
>> W = [1 0:0 1:1 1] % 3x2 행렬 W를 정의
W =
    1    0
    0    1

```

```

    1    1
>> V = X*W           % X와 W의 행렬 곱인 2x2 행렬 V를 계산
V =
    4    5
   10   11

```

행렬은 MATLAB의 기본이 되기 때문에, MATLAB에서는 행렬의 일부분을 삽입, 추출, 재배열할 수 있는 기능을 제공한다. 다음의 예제를 보자.

```

>> X = [1 2 3;4 5 6]   % 2x3 행렬 X를 생성
X =
    1    2    3
    4    5    6
>> X(1,3) = 0         % 행렬 X의 1행 3열 원소에 0을 대입
X =
    1    2    0
    4    5    6
>> y = X(:,2)        % 행렬 X의 두 번째 열을 열벡터 y로 정의
y =
    2
    5
>> X(2,:) = 9        % 행렬 X의 두 번째 행의 모든 원소에 9를 대입
X =
    1    2    0
    9    9    9
>> Y = X(:, 3:-1:1)  % 행렬 X의 열을 역순으로 하여 행렬 Y를 생성한다.
Y =
    0    2    1
    9    9    9
>> z = [1 3 5];
>> Y = [ Y;z ]       % 행벡터 z를 행렬 Y의 마지막 행으로 추가한다.
Y =
    0    2    1
    9    9    9
    1    3    5

```

행렬의 특정 원소는 위의 예제와 같이 X(행,열)의 첨자를 사용하여 접근한다. 마찬가지로, 위의 예제에서처럼, 행렬의 특정 행은 X(행,:), 특정 열을 X(:,열)로 접근한다. 새로운 행렬을 생성할 때 자신의 행렬 일부를 이용하여 만들 수 있는데 이를 부행렬이라고 한다. 위 예에서 보는 바와 같이 작은 행렬을 이용하여 큰 행렬에 추가할 수도 있고, 반대로 할 수

도 있다. 참고로 명령에 마지막에 세미콜론(;)을 추가하면 명령은 실행되지만 화면에 보여 주지는 않는다.

- 부행렬 지정방법 : (시작행 : 끝행, 시작열 : 끝열)

예로 행렬 A가 10×10의 정방 행렬이라고 가정하자.

- ▷ A(1:5, 3) : 1행부터 5행까지의 원소중에 3번째 있는 원소들(열 벡터)
- ▷ A(1:5, 5:10) : 1행부터 5행까지의 원소중 7열부터 10열까지의 원소(5×8의 부행렬)
- ▷ A(:, 5) : 5번째열에 있는 원소들(10×1의 열 벡터)
- ▷ A(1:2, :) : 1행부터 2행까지의 모든 원소들(2×10의 부행렬)

2. Script M file

2.1 Script M file의 정의

간단한 문제에 대해서는 명령창에서 해결이 가능하지만, 명령이 많아지거나 하나 이상의 변수 값을 변경하기 원할 때, 명령창에 입력하는 방법으로는 어려워진다. 복잡한 명령들의 일괄 수행을 위하여 MATLAB의 실행 문장들을 포함하고 있는 파일을 Script M file이라고 한다. Script M file은 일반 text editor나 MATLAB Editor/Debugger에서 편집이 가능하고, MATLAB Editor/Debugger에서는 바로 실행이 가능하다. 또한 MATLAB 명령창에서도 Script M file의 파일명을 입력하는 방법으로 실행이 가능하다. 스크립트 파일 내의 문장들은 MATLAB 작업 공간상의 자료들을 전역변수로 취급하여 처리한다. 즉 스크립트 파일에 의해 생성되거나 사용된 변수들은 현재의 명령창 작업공간 상에 그대로 남아있게 된다.

2.2 흐름제어

MATLAB에서는 다른 프로그래밍 언어와 마찬가지로, 다양한 흐름제어를 사용할 수 있다.

2.2.1 for 순환문

고정된 명령들을 미리 결정된 시간의 수 동안 반복한다.

for 변수=시작값:증가분:최종값

< 실행문 >

end

ex) 1~10사이의 정수 n에 대해 $\sin(n\pi/10)$ 구하기

```
for n=1:10                % n이 1부터 10까지 1씩 증가할때마다
    x(n) = sin(n*pi/10);   % 행벡터 x에 sin(nπ/10)을 저장한다.
end                        % end of for n=1:10
```

2.2.2 while 순환문

while 순환문은 주어진 조건을 만족시키는 동안 명령들을 반복 실행한다.

while 조건문

< 실행문 >

end

ex) 1부터 10까지의 정수의 합 구하기

```
x=0; sum=0;
while x<10    % x가 10보다 작을 경우에 실행
    x = x+1;
    sum = sum+x;
end
```

2.2.3 if-else-end 구문

많은 경우 명령어들은 주어진 조건에 참과 거짓에 따라 조건적으로 실행되어야 한다. MATLAB에선 if-else-end 구문으로 이러한 문제를 해결할 수 있다.

if 조건문

< 실행문 >

end

조건문이 참일 때 실행문을 행한다. 여기서 '참' 이란 조건문이 '0' 이 아닌 수이거나 임의의 조건을 만족할 때이다.

if 조건문1

< 실행문1 >

elseif 조건문2

< 실행문2 >

elseif 조건문3

< 실행문3 >

else

< 실행문4 >

end

위와 같이 'elseif'를 사용하여 여러 조건에 대하여 실행문을 분리할 수 있다.

ex) n의 부호 판별

```
if n > 0
    disp('Positive')    % disp( ) = display the given string/array
elseif n < 0
    disp('Negative')
else
    disp('Zero')
end
```

2.3 Script M file의 응용

- Script M file을 이용한 간단한 프로그램 예제1

ex1.m

```
A = [1 2 3;4 5 6;7 8 9];
B = [1 1 1;2 2 2;3 3 3];
```

```
C = A-B % 행렬 A와 B의 차인 행렬 C를 출력
D = A.*B      % 행렬 A와 B의 원소 대 원소 곱인 행렬 D를 출력
```

결과)

```
>> ex1
```

```
C =
```

```
    0    1    2
    2    3    4
    4    5    6
```

```
D =
```

```
    1    2    3
    8   10   12
   21   24   27
```

- Script M file을 이용한 간단한 프로그램 예제2

ex2.m

```
for n=1:3
    for m=1:3
        C(n,m) = A(n,m)-B(n,m); % 행렬 A와 B의 차인 행렬 C의 원소를 구한다.
        D(n,m) = A(n,m)*B(n,m); % 행렬 A와 B의 원소 대 원소 곱인 행렬 D의 원소를 구한
    다.
    end
end
C      % 행렬 C를 출력
D      % 행렬 D를 출력
```

결과)

```
>> ex2
```

```
C =
```

```
    0    1    2
    2    3    4
    4    5    6
```

```
D =
```

```
    1    2    3
    8   10   12
   21   24   27
```

예제 1과 2는 3×3 행렬로 정의된 A 행렬과 B 행렬의 차와 원소 대 원소 곱을 구하여 출력하는 예제이다. 예제 1에서는 행렬 연산을 이용하여 계산하였고, 예제 2에서는 중첩된 for 순환문을 이용하여 계산했다. 두 예제의 결과가 같음을 확인 할 수 있다.

3. 그래프

3.1 그래프 명령어 사용하기

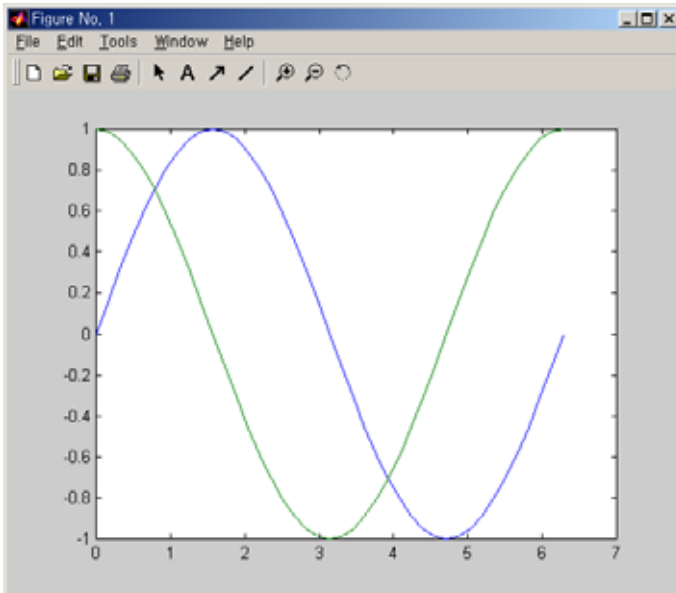
3.1.1 plot 명령어

2차원 데이터를 그리는 가장 흔한 명령은 **plot** 명령어이다. 이 다양한 용도의 명령어는 적당한 축에 데이터 배열들을 그리고, 점들을 직선으로 연결한다.

명령의 형태는 **plot(x1,y1,S1,x2,y2,S2, ...)**이며, 여기서 (x_n, y_n) 은 자료 집합이고, S_n 은 색상, 표시기호, 또는 선의 형태를 나타내는 하나 또는 그 이상으로 이루어진 문자열이며 선택사항이다.

ex) $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 $\sin(x)$ 와 $\cos(x)$ 그리기

```
>> x=0:0.05*pi:2*pi;  
>> y=sin(x);  
>> z=cos(x);  
>> plot(x,y,x,z)
```



이 예제는 구간 $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 0.05π 간격의 데이터를 생성하여 그래프의 수평축인 x벡터를 구성하고, $\sin(x)$ 와 $\cos(x)$ 값인 또 다른 벡터 y와 z를 생성한다. plot 명령어는 그림창 (Figure Window)을 열고, 데이터에 맞게 축을 자동으로 조정하고, 점들을 그리고, 직선으로 점을 연결한다.

이 예제에서는 색상, 표시기호, 또는 선의 형태를 나타내는 S_n 이 생략되었고, plot 명령어는 자동적으로 화면상에서 두 번째 곡선을 다른 색으로 표현한다.

plot 명령어의 데이터 배열 이후에 세 번째 인자인 S_n 을 입력하면, 색상, 표시, 선의 형태를 지정할 수 있다. S_n 은 하나 또는 그 이상으로 구성된 문자열이며, 다음의 표에 설명되어 있다.

(1) 가능한 선의 색상

Matlab에서의 symbol	Color (RGB)	Matlab에서의 symbol	Color (RGB)
c	cyan	g	green
m	magenta	b	blue
y	yellow	w	white
r	red	k	black

(2) 가능한 선의 형태

Matlab에서의 symbol	Style	Matlab에서의 symbol	Style
-	solid line	:	dotted line
--	dashed line	-.	dash-dot line
none	no line		

(3) 가능한 선의 표시

Matlab에서의 symbol	Marker Style	Matlab에서의 symbol	Marker Style
+	+	^	△
o	o	v	▽
*	*	>	▷
x	x	p	☆
s	□	h	☆
d	◇	none	no marker

다음은 선의 형태, 표시, 색상을 구분한 예제이다.

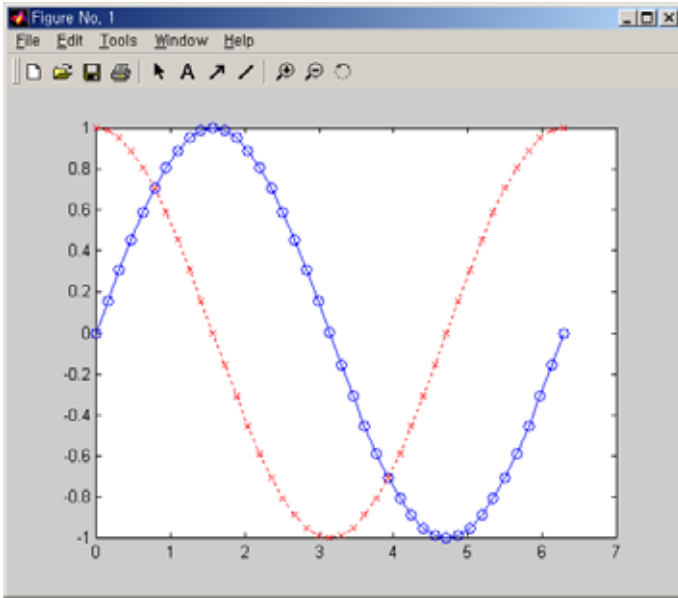
ex)

```
>> plot(x,y,'bo-',x,z,'rx:')
```

3.1.2 mesh 명령어

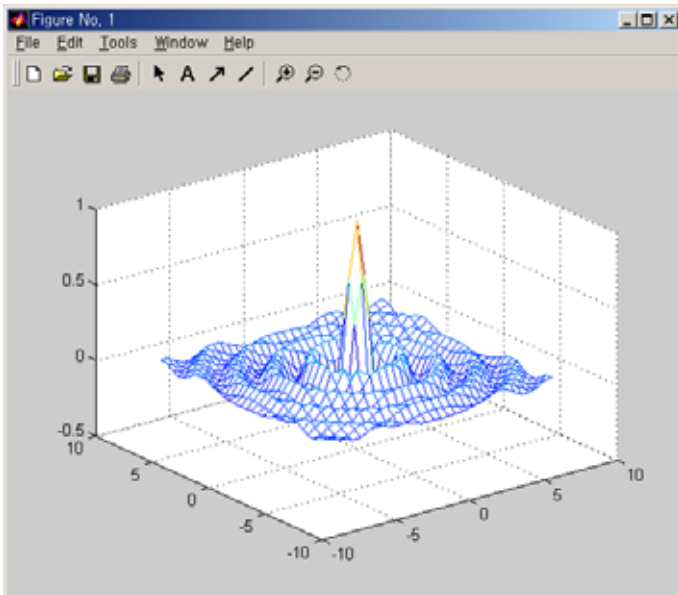
MATLAB은 x-y 평면상에서 직사각형의 격자(grid) 위 z축의 점으로 망사(mesh) 표면을 나타낼 수 있다. mesh 함수는 인접한 지점과 직선을 연결하여 3차원상의 망사 그래프를 작성한다. 망사 그래프는 거대 행렬을 보여주거나 두 개의 변수를 가진 함수를 도시하는 경우에 유용하다.

두 개의 변수를 가진 함수 $z=f(x,y)$ 의 망사 그래프를 그리는 첫 번째 단계로, meshgrid 함수를 사용하여 x-y 평면에 생성되는 사각형의 격자를 생성한다. $[X,Y] = \text{meshgrid}(x,y)$ 는 벡터 x의 복사본을 행들에 위치시킨 행렬 Y를 생성한다. X 및 Y는 x-y 평면에서 각 지점들의 직사각형 격자를 나타내는 한 쌍의 행렬이다. 함수 $z=f(x,y)$ 는 이러한 점들을 사용하여 생성할 수 있다.



ex) 3차원 sinc 함수 그리기

```
>> x=-7.5:0.5:7.5;
>> y=x;
>> [X,Y]=meshgrid(x,y); % x-y 평면에 데이터 생성
>> R=sqrt(X.^2+Y.^2); % 원점으로부터의 거리
>> Z=sinc(R); % sinc(R) = sin(R)/R
>> mesh(X,Y,Z)
```



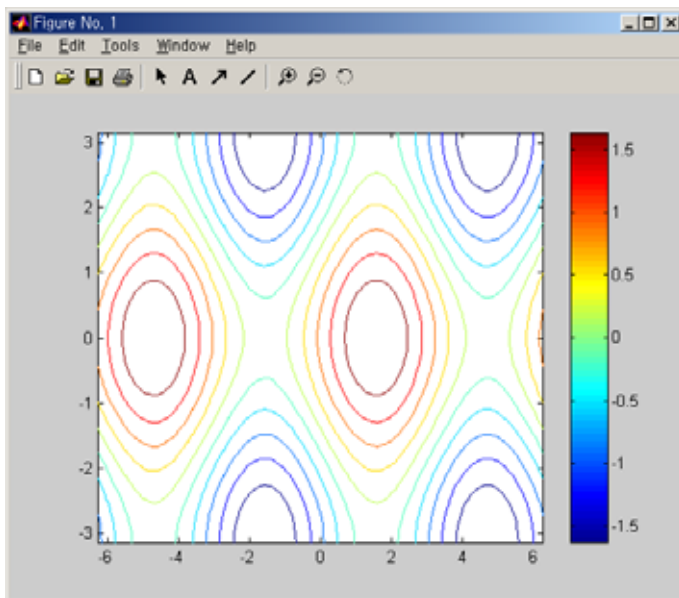
3.1.3 contour 명령어

같은 값을 가진 점들을 선으로 연결한 등고선 그래프는 **contour** 명령어로 생성한다. 이 함

수의 일반적인 형태로 `contour(X,Y,Z,n,S)`를 사용하며, 여기서 X와 Y는 x축과 y축을 나타내는 벡터이며, Z는 자료의 값을 나타내는 행렬이다. n은 그리고자 하는 등고선의 개수를 나타내는 변수이고 선택 사항이다. S는 plot 명령어에서처럼 색 및 선의 형태를 나타내는 문자열이고, 선택 사항이다.

ex) $-2\pi \leq x \leq 2\pi$, $-\pi \leq y \leq \pi$ 일 때, $Z = \sin(x) + \cos(y)$ 그리기

```
>> x = -2*pi:0.02*pi:2*pi;
>> y = -pi:0.02*pi:pi;
>> [X,Y] = meshgrid(x, y);      % x-y 평면에 데이터 생성
>> Z = sin(X) + cos(Y);
>> cs = contour(x,y,Z,10);      % Z값에 따라 10개의 등고선 생성
>> colorbar('v')                % 수직 칼라 막대를 그림창에 추가
```



`colorbar` 함수는 수평 또는 수직 칼라막대를 그려진 그림창에 추가하여, 현재 축에 대한 칼라 사상을 보여준다. `colorbar('h')`는 칼라막대를 현재의 그래프 바로 밑에 수평하게 그려주며, `colorbar('v')`는 현재 그래프의 오른쪽에 수직의 칼라막대를 그려준다.

3.2 그래프 조작

수평과 수직축은 `xlabel`과 `ylabel`이라는 명령으로 라벨을 붙일 수 있다. `title` 명령은 한 줄의 텍스트를 그래프의 상단에 덧붙일 수 있는 명령이다. 3차원 그래프의 경우, `zlabel`이라는 명령으로 z축에 라벨을 붙일 수 있다. 또한 `contour` 명령어로 생성된 등고선 그래프는 `clabel(cs)`로 모든 등고선에 그 높이 값을 붙일 수 있다. 이때 cs는 `contour` 명령어로부터 반환된 등고선 구조이다.

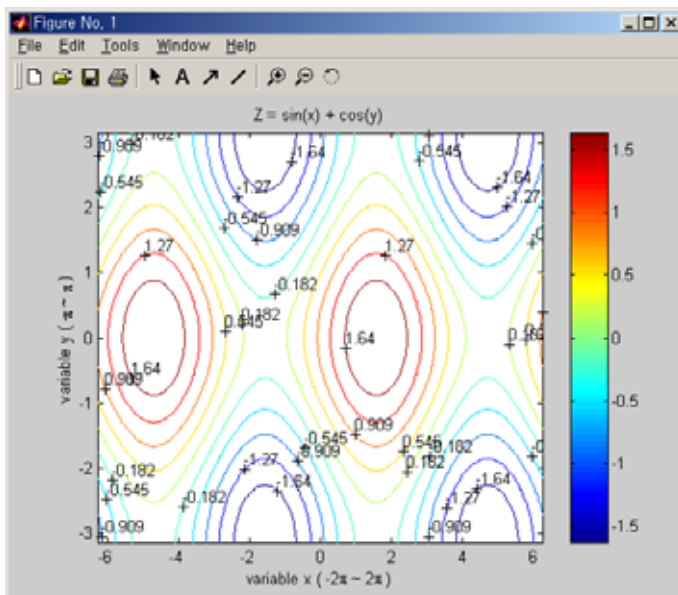
위의 예제로 다시 돌아가보도록 하자.

ex) $-2\pi \leq x \leq 2\pi$, $-\pi \leq y \leq \pi$ 일 때, $Z = \sin(x) + \cos(y)$ 그리기

```

>> x = -2*pi:0.02*pi:2*pi;
>> y = -pi:0.02*pi:pi;
>> [X,Y] = meshgrid(x, y); % x-y 평면에 데이터 생성
>> Z = sin(X) + cos(Y); % Z값에 따라 10개의 등고선 생성
>> cs = contour(x,y,Z,10); % 수직 칼라 막대를 그림창에
>> colorbar('v') % 추가
>> xlabel('variable x ( -2Wpi ~ 2Wpi )'); % x축에 label 추가
>> ylabel('variable y ( -Wpi ~ Wpi )'); % y축에 label 추가
>> clabel(cs); % 등고선에 label 추가
>> title('Z = sin(x) + cos(y)'); % 그래프 위에 제목을 붙인다.

```



legend 명령은 주어진 텍스트에 대하여 그래프의 우측 상단에 기호 설명 상자를 만들어준다. 기호 설명을 옮기고 싶으면, 마우스로 클릭하여 드래그하면 된다. `legend off`는 기호 설명을 지운다.

axis 명령을 통해 수직이나 수평축에 대하여 비율이나 외관에 대한 완전한 제어를 할 수 있다. 그 중 흔히 쓰이는 명령중 하나인 `axis([xmin xmax ymin ymax])`은 현재의 그래프의 비율을 주어진 값으로 설정한다.

ex) $0 \leq x \leq 2\pi$ 에서 $\sin(x)$ 와 $\cos(x)$ 그리기

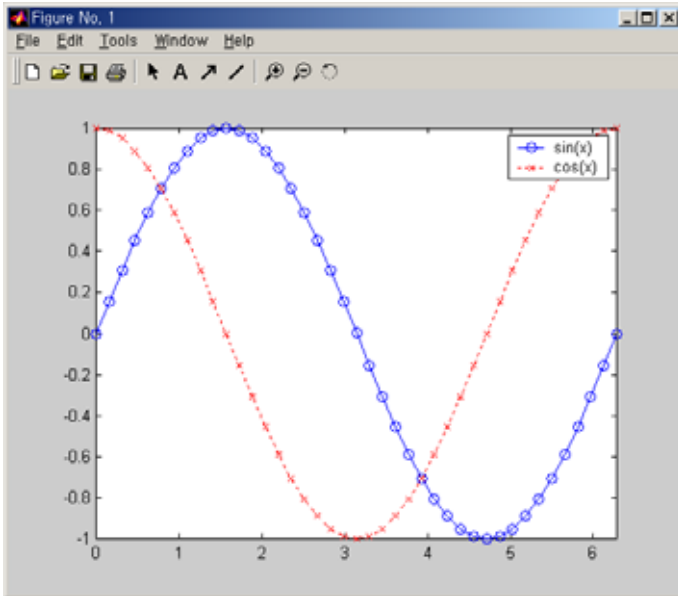
```

>> x=0:0.05*pi:2*pi;
>> y=sin(x);
>> z=cos(x);
>> plot(x,y,x,z)
>> legend('sin(x)', 'cos(x)') % 기호 설명 상자를 생성

```



```
>> axis([0 2*pi -1 1])           % x와 y축의 범위를 지정한다.
```



3.3 그래프의 저장

MATLAB에는 **작업디렉토리(working directory)**의 개념이 존재하는데, 이미 만들어진 m file 을 불러올 때나, 프로그램 실행 결과를 저장할 때에 쓰이는 공간이다. 명령창에서 **cd** 명령어로 작업디렉토리의 위치를 확인 할 수 있다.

```
>> cd
```

```
C:\MATLAB\work
```

cd 명령어는 DOS환경에서와 마찬가지로 'cd ..'를 통해 상위디렉토리로 이동하거나, 특정 디렉토리로 이동할 수 있다.

MATLAB의 명령창에서 또는 Script M file을 통해 그래프를 그림 file(.jpg, .bmp 등)로 저장할 수 있다. 이때, 사용자가 지정한 파일은 작업디렉토리에 저장되게 된다.

```
>> print -djpeg100 filename.jpg % 작업디렉토리에 100% 퀄리티로 filename.jpg로 저장
```

```
>> print -dbitmap filename.bmp % 작업디렉토리에 bitmap 형식으로 저장
```

```
>> print % 현재 그래프를 PC에 연결된 프린터로 출력한다.
```

1차원 경계치 미분방정식의 유한차분해법

1. 목적

경계치 미분방정식의 수치해석적인 해를 구하는 방법 중 유한차분법(FDM, Finite Difference Method)에 관하여 알아본다.

2. 유한차분법의 유도

식 (1)과 같이 주어진 미분방정식이 식 (2)와 같은 경계치 조건을 갖는 문제가 있다고 가정하면 식 (1)은 미분의 정의로부터 식 (3)과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 0, 0 < x < d \dots\dots\dots (1)$$

$$V(0) = 0, V(d) = V \dots\dots\dots (2)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{V(x + \Delta x) - 2V(x) + V(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

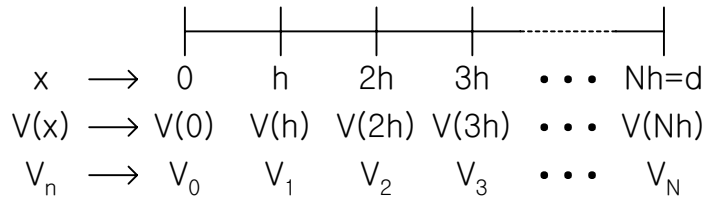


그림 1. 1차원 유한차분법의 좌표 표현

식 (3)으로부터 수치적인 해를 구하기 위해 미분방정식의 해당구간을 그림 1과 같이 N개의 영역으로 나누면 식 (3)으로부터 수치해석적인 해를 구하기 위한 근사식을 아래와 같은 유한차분(Finite Difference)의 형태로 쓸 수 있다.

$$\frac{V_{n+1} - 2V_n + V_{n-1}}{h^2} = 0 \dots\dots\dots (4)$$

이 때 $h = \frac{d}{N}$, $x_n = nh$, $V_n = V(x_n)$, $n = 0, \dots, N$ 이라하면 식 (5)와 같은 연립방정식을

세울 수 있다.

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_{N-1} \\ V_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots (5)$$

한편 경계치 조건에 의해 $V_0=0$, $V_N=V$ 인 관계가 성립하며, 이 조건을 이용하여 식 (5)를 다음의 식 (6)과 같이 변형할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ \vdots \\ V_{N-2} \\ V_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -V_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -V_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -V \end{pmatrix} \dots\dots\dots (6)$$

따라서 V의 근사해는 식 (6)에서 개수들로 이루어진 행렬의 역행렬을 양쪽에 곱하므로써 직접 구할 수 있다.

3. 고찰

- (1) $d=1$, $V=2$ 인 경우에 대해 식 (1)을 해석적으로 풀고 결과를 그리시오.
- (2) $d=1$, $V=2$, $N=10$ 인 경우 식 (1)에 대한 근사해를 유한차분법을 이용하여 풀고 결과를 그리시오.
- (3) $d=1$, $V=2$, $N=20$ 인 경우 식 (1)에 대한 근사해를 유한차분법을 이용하여 풀고 결과를 그리시오.
- (4) (1), (2), (3)의 결과에 어떠한 차이가 있는가? 그 이유를 설명하시오.

참고문헌

[1] Matthew N. O. Sadiku, *Numerical Techniques in Electromagnetics*, CRC Press, 2001.
 [2] Laurene N. Fausett, *Applied Numerical Analysis using MATLAB*, Prentice Hall, 1999.

2차원 Laplace 방정식의 유한차분해법

1. 목적

유한차분법을 이용한 반복 계산에 의해 2차원 Laplace 방정식의 근사해를 구하는 방법에 관하여 알아본다.

2. 2차원 구조의 유한차분법 모델링

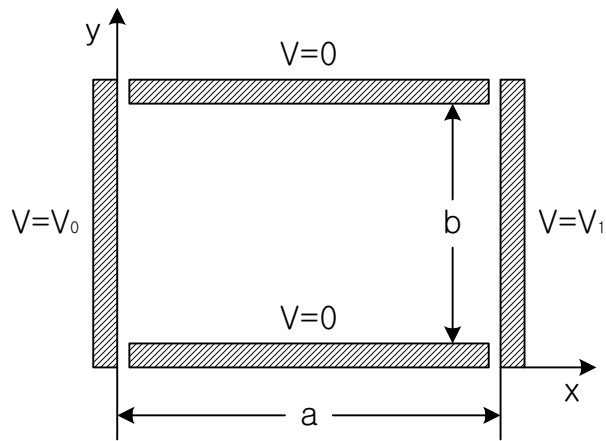


그림 1. 2차원 유한차분법 반복 계산을 위한 구조물의 단면도

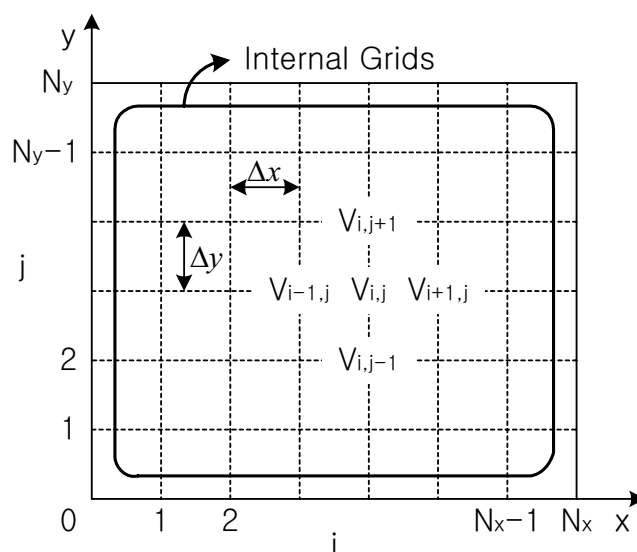


그림 2. 2차원 유한차분법 계산을 위한 격자구조

그림 1과 같은 구조에 대하여 유한차분법을 이용한 Laplace 방정식의 근사해를 구하기 위해서는 그림 1을 그림 2와 같은 격자 구조로 표현해야 한다. 그림 2와 같이 격자 사이의 간격이 Δx , Δy 인 경우 x축 방향과 y축 방향 격자의 개수를 각각 $N_x + 1$, $N_y + 1$ 이라고 하면, 유한차분법에 의한 미지수의 개수는 경계치 조건에 의해 값이 주어진 외부 격자를 제외하고 내부 격자에 포함되어 있는 $(N_x - 1) \cdot (N_y - 1)$ 개가 된다.

이 경우 격자의 개수가 비교적 적은 경우, 예를 들어 $N_x = N_y = 31$ 이라 가정하더라도 Direct Method에 의한 개수 행렬의 크기는 $30^2 \times 30^2$ 이 되어 역행렬에 의한 연산을 수행하기가 매우 어려워진다. 이러한 이유 때문에 반복 계산에 의한 근사해 계산이 일반적으로 사용된다.

아래의 식 (1)은 그림 1의 구조에 해당하는 2차원의 Laplace 방정식이다.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

식 (1)의 Laplace 방정식으로부터 1차원 유한차분법에서와 마찬가지로 식 (2)와 같은 2차원의 유한차분 방정식을 유도할 수 있다.

$$\frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

유도된 유한차분 방정식을 $V_{i,j}$ 에 대하여 정리하면 아래의 식 (3)과 같이 고쳐 쓸 수 있다.

$$V_{i,j} = \frac{(\Delta y)^2 V_{i+1,j} + (\Delta y)^2 V_{i-1,j} + (\Delta x)^2 V_{i,j+1} + (\Delta x)^2 V_{i,j-1}}{2[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]} \dots\dots\dots (3)$$

식 (3)을 반복적으로 계산함으로써 Laplace 방정식의 근사해를 반복적으로 구할 수 있다.

3. 고찰

(1) 그림 1의 구조에 대하여 아래 조건의 경우 식 (3)에 해당하는 근사해를 유한차분법 반복 계산(1회, 10회, 100회, 1000회)으로 계산하고 결과를 그리시오.

$$V_0=2, V_1=0, a=3, b=2, N_x=60, N_y=40$$

- (2) $V_0=2$, $V_1=0$, $a=3$, $b=2$, $N_x=30$, $N_y=20$ 인 경우에 대해서 (1)번을 반복하시오.
- (3) (1), (2)의 결과중 1000회 반복 계산값을 참값으로 가정하고 각 반복 계산 단계 1,2, 3, ..., 100회에 대하여 오차의 평균 (V_{iter}^{err})을 아래의 식으로 계산하고 결과를 그리시오.
(오차 계산시 경계면은 제외)

$V_{i,j}^{iter}$: 반복 계산 단계별 격자값 i, j 에서의 계산값

$V_{i,j}^{true}$: 격자값 i, j 에서의 주어진 참값(1000회 반복 계산값)

$$V_{i,j}^{err}(\%) = \frac{|V_{i,j}^{iter} - V_{i,j}^{true}|}{V_{i,j}^{true}} \times 100$$

$$V_{iter}^{err}(\%) = \frac{1}{(N_x - 1) \cdot (N_y - 1)} \sum_{i=1}^{N_x-1} \sum_{j=1}^{N_y-1} V_{i,j}^{err}$$

$\xrightarrow[\text{CODE}]{\text{MATLAB}}$ $mean(mean(V_{i,j}^{err}))$

- (4) 그림 3과 같은 구조의 Stripline에 대하여 다음과 같은 조건이 주어졌을 때 내부의 전개 분포를 유한차분법 반복 계산(1회, 10회, 100회, 1000회)으로 계산하고 결과를 그리시오.

$$V\left(\pm \frac{a}{2}, y\right)=0, \quad V(x, 0)=V(x, b)=0$$

$$a=8, \quad b=2, \quad W=2 \quad N_x=160, \quad N_y=40$$

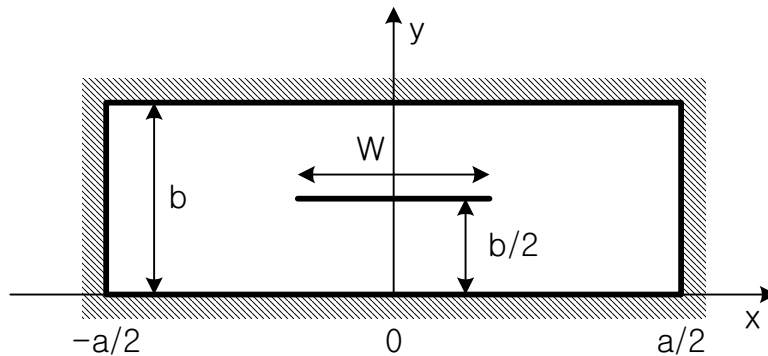


그림 3. Stripline의 단면도

참고문헌

- [1] David K. Cheng, *Field and Wave Electromagnetics*, Addison wesley, 1989.
[2] David M. Pozar, *Microwave Engineering*, John wiley & sons, INC., 1998.

변수분리법에 의한 라플라스 방정식의 풀이

1. 목적

변수분리법(separation of variables)을 사용하여 라플라스 방정식의 해석적(analytic)인 해를 얻는다.

2. 용어의 정의

편미분방정식(partial differential equation)은 둘 이상의 독립변수를 가지는 다변수 함수의 편미분 항을 포함하는 방정식이다. 어떤 편미분방정식이 다변수함수와 그 편도함수의 1차인 항만을 포함하면(즉 제곱이나 세제곱 항을 포함하지 않음), 선형(linear) 편미분방정식이라 한다. 그리고 선형 편미분방정식이 어떤 다변수함수에 대해서 만족될 때, 그것에 임의의 상수를 곱한 다변수함수에 대해서도 만족되면, 제차(homogeneous) 편미분방정식이라 한다.

어떤 편미분방정식이 정의되는 독립변수의 범위를 정의역(domain)이라고 하며, 정의역을 둘러싸는 점들로 이루어진 영역을 경계(boundary)라고 한다. 그리고 경계에서 주어지는 조건을 경계조건이라고 한다. 그리고 경계조건이 어떤 다변수함수에 의해서 만족될 때, 그것에 임의의 상수를 곱한 다변수함수에 대해서도 만족되면, 이러한 경계조건을 제차 경계조건(homogeneous boundary condition)이라 한다. 경계에서의 함수 값이 0으로 주어지는 것, 경계에서의 함수의 미분값이 0으로 주어지는 것 등이 제차 경계조건의 예이다.

3. 변수분리법에 의한 라플라스 방정식의 풀이 절차

라플라스 방정식은 정전기(electrostatic) 문제를 해결하는데 쓰이며, 물리적으로 중요한 선형, 제차 편미분방정식이다.

Dirichlet	V 의 값이 주어진다.
Neumann	법선 벡터 \vec{n} 에 대해, $\vec{n} \cdot \nabla V$ 의 값이 주어진다.
Mixed	상수 a, b 에 대해 $aV + b\vec{n} \cdot \nabla V$ 의 값이 주어진다.

표 1 경계조건의 분류

경계조건이 표 1과 같이 주어지고, 영역의 모양이 적합한 경우 변수분리법을 이용하여 라플라스 방정식을 풀 수 있다.

변수분리법을 이용해서 2차원 라플라스 방정식을 푸는 절차는 다음과 같다.

- (1) 변수분리를 하여 2개의 상미분방정식을 얻는다.
- (2) 2개의 상미분방정식 중에 제차 경계조건만을 가지는 상미분방정식을 우선 풀어서 분리해와 분리상수 값을 얻는다.
- (3) 아직 풀지 않은 상미분방정식의 제차 경계조건으로부터 분리해를 얻는다.
- (4) 마지막으로 비제차 경계조건으로부터, 푸리에 전개 과정을 통해, 상수 계수의 값을 얻는다.

2차원 직교 좌표계에서 라플라스 방정식의 풀이

1. 목적

2차원 직교좌표계에서 라플라스 방정식을 풀어서 정전기 문제의 해석적 해를 얻고, 얻은 해를 MATLAB으로 확인한다.

2. 직교 좌표계에서의 라플라스 방정식의 풀이

직교 좌표계에서 2차원 라플라스 방정식은

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0 \quad (1-1)$$

이 된다. 변수분리법을 이용하여 해를 구하기 위해 $V(x, y) = X(x)Y(y)$ 로 놓는다. 변수 분리된 형태의 해를 가정하고 원래의 식 (1-1)에 넣어서 정리하면

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} \quad (1-2)$$

이 된다. 이 때 식 (1-2)에서 좌변은 x 만의 함수이고 우변은 y 만의 함수이므로, 식 (1-2)의 값은 x 와 y 에 무관한 상수가 되어야 한다. 따라서 분리상수를 λ 라고 하면

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = \lambda \quad (1-3)$$

가 얻어진다. 따라서 2차원 라플라스 방정식은 x 방향과 y 방향의 두 개의 상미분방정식으로 분리된다.

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - \lambda X = 0 \quad (1-4)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \lambda Y = 0 \quad (1-5)$$

여기서 $k = \sqrt{|\lambda|}$ 라 하면, λ 의 값에 대응하는 상미분방정식 (1-4), (1-5)의 해, 즉 분리해는 표 2와 같다.

λ	$X_\lambda(x)$	$Y_\lambda(y)$
0	$A_0x + B_0$	$C_0y + D_0$
+	$A_k \sin kx + B_k \cos kx$	$C_k \sinh ky + D_k \cosh ky$
-	$E_k \sinh kx + F_k \cosh kx$	$G_k \sin ky + H_k \cos ky$

표 2 분리상수의 값에 따른 식 (1-4), 식 (1-5)의 해

표 2에서 가장 왼쪽 열의 +는 $\lambda > 0$ 인 경우를 나타내고, -는 $\lambda < 0$ 인 경우를 나타낸다.

만약 x 방향의 제차 경계조건이 주어지면 표 2에서 $\lambda \geq 0$ 의 경우만 고려하면 되고, y 방향의 제차 경계조건이 주어지면 $\lambda \leq 0$ 인 경우만 고려하면 된다.

x 방향으로 모두 제차 경계조건이 주어진 경우, 라플라스 방정식을 푸는 절차는 다음과 같다. 우선 x 방향의 제차 경계조건으로부터 분리상수 λ 가 가질 수 있는 값과 상수 곱을 포함한 분리해 $X(x)$ 를 얻는다. 다음으로는 분리상수의 값과 y 방향의 제차 경계조건으로부터 상수 곱을 포함한 분리해 $Y(y)$ 를 얻는다. 이 때에 전체 해는, 라플라스 방정식이 선형 편미분방정식이므로

$$V(x, y) = \sum_{\lambda} X_{\lambda}(x)Y_{\lambda}(y) \quad (6)$$

으로 주어진다. 식(6)의 각 항들은 제차 경계조건을 만족하므로 식(6) 역시 모든 제차 경계조건을 만족한다. 이제 정해지지 않은 상수 계수를 남은 y 방향의 비제차 경계조건으로부터 구한다. 이렇게 하여 얻어진 라플라스 방정식의 해는, 주어진 경계조건을 만족하는 라플라스 방정식의 해가 유일하므로, 유일한 해가 된다.

3. 예제

그림 1에 주어진 구조와 그 아래 주어진 경계조건을 생각한다.

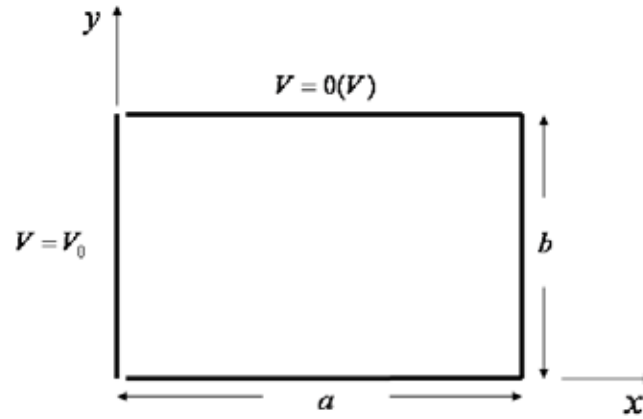


그림 1 2차원 직사각형 구조

경계조건 (a) : $V(x,0) = 0$, $V(x,b) = 0$

경계조건 (b) : $V(0,y) = V_0$, $V(a,y) = 0$

(가) 변수분리법을 이용하여, 영역 내의 전위(potential) $V(x,y)$ 의 급수(series) 해를 구하시오.

(나) MATLAB을 이용하여 주어진 영역에서 등전위선을 그리시오. (contour 명령어 이용) 이 때, 등전위선의 개수는 10개로 하고, 급수 해에서 더하는 0이 아닌 항의 개수는 50개로 하며, $a = 3(m)$, $b = 2(m)$, $V_0 = 1(V)$ 의 값을 이용한다.

4. 문제해결 및 고찰

그림 2는 마이크로스트립 라인의 단면이다. 경계조건은 아래와 같이 주어진다. 경계조건에서 알 수 있듯이, 스트립 위에 균일한 전하가 분포하고 있는 문제이다.

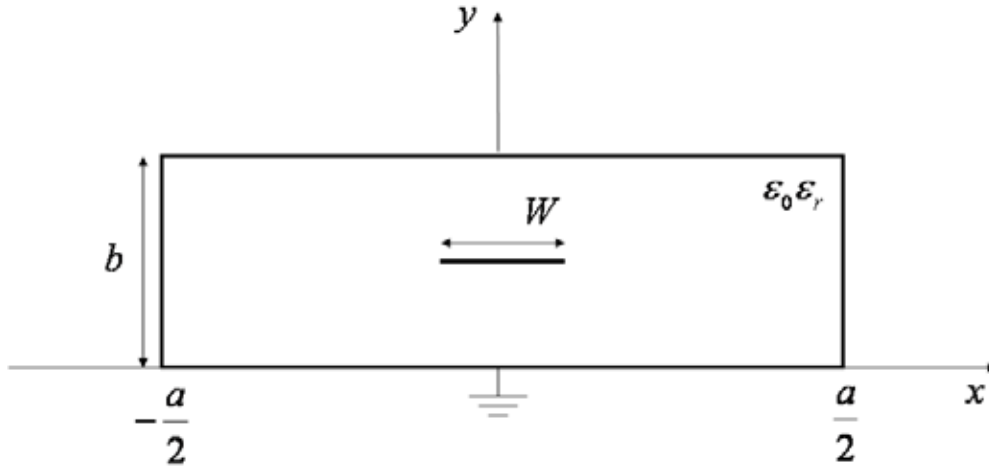


그림 2 마이크로스트립 라인의 단면

경계조건 (a) : $V(-a/2, y) = 0, V(a/2, y) = 0$

경계조건 (b) : $V(x, 0) = 0, V(x, b) = 0$

경계조건 (c) : $V(x, y)$ 는 $-a/2 \leq x \leq a/2, 0 \leq y \leq b$ 에서 연속(continuous)

$$\rho_s(x, b/2) = \begin{cases} \rho \text{ (C/m}^2\text{)} & \text{for } |x| \leq W/2 \\ 0 \text{ (C/m}^2\text{)} & \text{for } W \geq |x| > W/2 \end{cases}$$

(1) 변수분리법을 이용하여, 영역 내의 전위 $V(x, y)$ 의 급수 해를 구하시오. 문제를 풀 때에 스트립 라인을 중심으로 영역을 둘로 나누어, 각각의 영역에서 경계조건 (a)와 (b)를 이용하여 라플라스 방정식을 풀 뒤, 경계조건 (c)를 이용하여 계수를 결정한다.

(2) MATLAB을 이용하여 등전위선을 그리시오. 이 때, 등전위선의 개수는 10개로 하고, 급수 해에서 더하는 0이 아닌 항의 개수는 50개로 하며, $a = 6(\text{mm})$, $b = 2(\text{mm})$, $W = 2(\text{mm})$, $\rho = 1(\mu\text{C/m}^2)$, $\epsilon_r = 2.5$ 의 값을 이용한다.

(3) z 방향으로 단위길이 당 커패시턴스의 급수 해를 구하시오. z 방향으로 단위길이 당 커패시턴스(F/m)를 구하려면, 단위길이 당 전하량을 전위차로 나누어주면 된다. (전위차는 $V(0, b/2) - 0 = V(0, b/2)$ 에서 구한다.)

(4) 문제 (3)에서 얻은 급수 해를 가지고 다음 표를 완성하시오. 단, $a = 6(mm)$, $b = 2(mm)$, $W = 2(mm)$, $\rho = 1(\mu C/m^2)$, $\epsilon_r = 2.5$ 의 값을 이용한다.

0이 아닌 더한 항의 수	50	100	150	200	250	300
계산된 단위길이당 커패시턴스						

(5) 위 문제를 풀 때에 경계조건 (c)에서 스트립 위의 전하가 균일하게 분포한다고 가정하였다. 그러나 실제로는 스트립 위에서 전위가 일정하게 유지되며, 스트립위에서 전하가 균일하게 분포하지는 않는다. 이 때에, 실제로는 전하분포가 어떻게 될 것인지 예상해보자. 전하가 스트립의 중간과 모서리 중에 어디에 더 많이 위치하겠는가?

경계조건 (c) 대신 예상한 전하분포를 이용하여 (4)를 반복하시오. (4)에서 얻은 커패시턴스의 값과 새로운 전하분포를 이용하여 얻은 커패시턴스의 값을 비교해보시오. 어느 것이 실제의 값에 더 가까운가? 이 문제의 경우, 실제의 단위길이 당 커패시턴스의 값은 $C = 130 pF/m$ 정도이다.

2차원 극 좌표계에서 라플라스 방정식의 풀이

1. 목적

2차원 극 좌표계에서 라플라스 방정식을 풀어서 정전기 문제의 해석적 해를 얻고, 얻은 해를 MATLAB으로 확인한다.

2. 극 좌표계에서의 라플라스 방정식의 풀이

극 좌표계에서 2차원 라플라스 방정식은

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0 \quad (2-1)$$

이 된다. 변수분리법을 이용하여 해를 구하기 위해 $V(x, y) = R(r)\Phi(\phi)$ 로 놓는다. 변수 분리된 형태의 해를 가정하고 원래의 식 (2-1)에 넣어서 정리하면

$$\frac{1}{R} r^2 \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) = - \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} \quad (2-2)$$

이 된다. 이 때 식 (2-2)에서 좌변은 r 만의 함수이고 우변은 ϕ 만의 함수이므로, 식 (2-2)의 값은 r 와 ϕ 에 무관한 상수가 되어야 한다. 따라서 분리상수를 λ 라고 하면

$$\frac{1}{R} r^2 \left(\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \right) = - \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = \lambda \quad (2-3)$$

가 얻어진다. 따라서 2차원 라플라스 방정식은 r 방향과 ϕ 방향의 두 개의 상미분방정식으로 분리된다.

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - \lambda R = 0 \quad (2-4)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + \lambda \Phi = 0 \quad (2-5)$$

상미분방정식 (2-4)는 오일러 방정식이라 부른다. 여기서 $k = \sqrt{|\lambda|}$ 라 하면, λ 의 값에 대응하는 상미분방정식 (2-4), (2-5)의 해, 즉 분리해는 표 3와 같다.

λ	$R_\lambda(r)$	$\Phi_\lambda(\phi)$
0	$A_0 \ln r + B_0$	$C_0 \phi + D_0$
+	$A_k r^k + B_k r^{-k}$	$C_k \sin k\phi + D_k \cos k\phi$
-	$E_k \sin(k \ln r) + F_k \cos(k \ln r)$	$G_k \sinh k\phi + H_k \cosh k\phi$

표 3 분리상수의 값에 따른 식 (2-4), 식 (2-5)의 해

만약 ϕ 방향의 제차 경계조건이 주어지면 표 3에서 $\lambda \geq 0$ 의 경우만 고려하면 되고, r 방향의 제차 경계조건이 주어지면 $\lambda \leq 0$ 인 경우만 고려하면 된다. 만약 ϕ 방향으로 주기적인 경계조건이 주어지면, ϕ 방향으로 제차 경계조건이 주어진 것이다.

3. 예제

그림 3에 주어진 구조와 그 아래 주어진 경계조건을 생각한다.

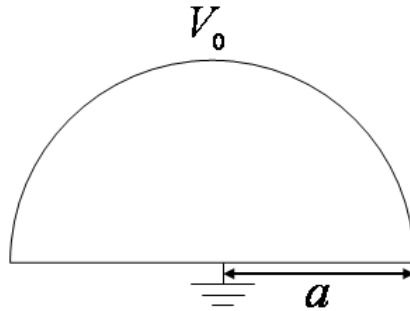


그림 3 반원형의 단면

경계조건 (a) : $V(r, 0) = V(r, \pi) = 0$

경계조건 (b) : $V(0, \phi) = \text{finite}$, $V(a, \phi) = V_0$

(1) 변수분리법을 이용하여, 영역 내의 전위 $V(r, \phi)$ 의 급수 해를 구하시오

(2) MATLAB을 이용하여 등전위선을 그리시오. 이 때, 등전위선의 개수는 10개로 하고, 급수 해에서 더하는 0이 아닌 항의 개수는 50개로 하며, $a = 1(\text{cm})$, $V_0 = 1(\text{V})$ 의 값을 이용한다. 또한 좌표 변환을 통해 (x, y) 평면에서 등전위선을 그린다.

4. 문제해결 및 고찰

그림 4에 주어진 구조와, 그 아래의 경계조건을 생각한다. 경계조건 (c)에서 금속판이 없는 부분에서 전위가 각에 비례해서 변한다고 가정을 하였다.

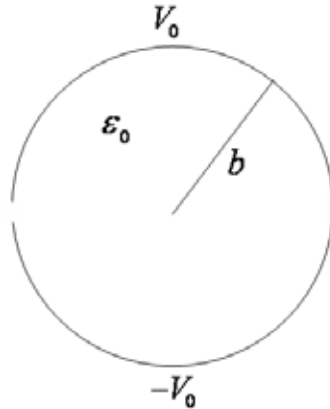


그림 4 원통의 단면

경계조건 (a) : $V(r, \phi) = V(r, \phi + 2m\pi), \quad m=1,2,3\dots$

경계조건 (b) : $V(0, \phi) = \text{finite}$

경계조건 (c) :
$$V(b, \phi) = \begin{cases} \frac{V_0}{c} \phi & 0 \leq \phi \leq c \\ V_0 & c < \phi \leq \pi - c \\ -\frac{V_0}{c} \phi + \frac{V_0}{c} \pi & \pi - c < \phi \leq \pi \end{cases}$$

$V(b, \phi) = -V(b, -\phi) \quad -\pi \leq \phi \leq 0$

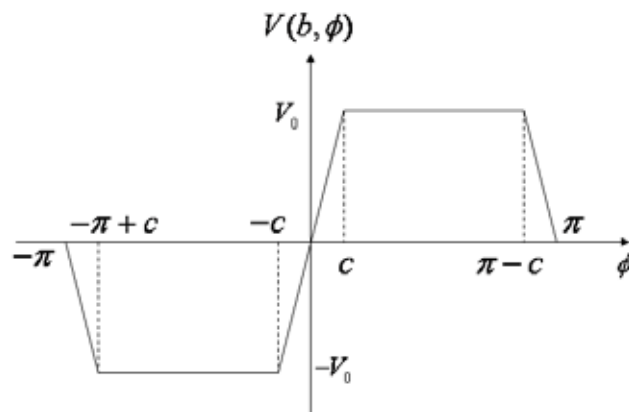


그림 5 경계조건 (c)의 그림

(1) 변수분리법을 이용하여, 전위 $V(r, \phi)$ 의 급수 해를 구하시오

(2) MATLAB을 이용하여 $r < 2b$ 에서 등전위선을 그리시오. 이 때, 등전위선의 개수는 10개로 하고, 급수 해에서 더하는 0이 아닌 항의 개수는 50개로 하며, $b = 2(mm)$, $c = \pi/10$, $V_0 = 1(V)$ 의 값을 이용한다. 또한 좌표 변환을 통해 (x, y) 평면에서 등전위선을 그린다.

(3) z 방향으로 단위길이 당 커패시턴스의 급수 해를 구하시오. z 방향으로 단위길이 당 커패시턴스(F/m)를 구하려면, 단위길이 당 전하량을 전위차로 나누어주면 된다. 한편, 단위길이 당 전하량은 원통 윗면의 안, 밖에서 전하밀도를 적분하여 구한다.

(4) 문제 (3)에서 얻은 급수 해를 가지고 다음 표를 완성하시오. 단, $b = 2(mm)$, $c = \pi/10$, $V_0 = 1(V)$ 의 값을 이용한다.

0이 아닌 더한 항의 수	50	100	150	200	250	300
계산된 단위길이당 커패시턴스						

(5) 다른 조건은 동일하며, $c = \pi/20$, $c = \pi/40$ 인 경우에 대해 (4)를 반복하시오. 그리고 $c \rightarrow 0$ 으로 갈 때에 커패시턴스의 값을 구하시오.

유한요소법(Finite Element Method)의 개념

설계자가 기계요소를 설계할 때 설계하고자하는 기계요소 또는 시스템이 작동환경하에서 어떠한 상태로 동작할 것인가를 예측하는 공학해석 분야에서 가장 많이 쓰이고 있는 해석방법이 유한 요소법(Finite Element Method)이다. 유한요소법은 컴퓨터상에서 가상으로 기계요소를 생성하여 힘, 열, 진동 등의 입력에 대해서 체계적으로 기계요소/시스템의 반응을 예측할 수 있게 해준다. 유한요소법의 수학적 배경은 수세기 전부터 알려져 있었지만 이의 발달은 대규모의 계산이 가능하게 된 컴퓨터의 출현과 함께 급속히 발전하였다. 유한요소법은 구조해석분야에서부터 발전하였으며 60년대 NASA의 대규모 프로젝트는 유한요소법의 기초와 테크닉을 확립하는 계기가 되었다고 할 수 있다.

유한요소법의 수학적배경은 가장 간단한 보 구조물의 경우를 보면 가해진 힘에 비례하여 변위가 늘어난다는 Hook의 법칙으로부터 시작한다. 유한요소법은 공학해석 대상이 되는 물체를 정형화된 "유한"한 크기의 수 많은 요소로 나누고 각 요소에 Hook의 법칙같은 수식을 적용하고 각 요소간의 관계식을 고려하여 물체 전체에 대한 식을 구성한 다음 선형 방정식을 풀어 물체의 변위, 응력, 진동 등을 해석하는 것이다. 여기서 "유한(finite)"라는 것이 아주 중요한 개념으로 미분방정식을 유도해 낼 때 쓰이는 무한히 작은(infinitesimal) 요소라는 개념에 대가 되는 것이다. 유한요소법은 유한하게 자른 요소내에서 해석하고자하는 변수를 보간함수(shape function)의 개념을 도입하여 근사(approximation)하여 최종 대수 방정식을 고집어내지만 요소의 크기를 계속 작게 나누어 가면 미분방정식을 해석적으로 풀었을 때의 해에 수렴한다는 보장이 있다

유한요소법(Finite Element Method)의 개념은 해석하고자 하는 대상을 유한요소로 분할하여 각 요소를 해석한 후 그것들을 취합하여 해석대상 전체의 근사값을 찾고자 하는 것이다. 이와 같은 개념을 이용한 최초의 시도는 고대 이집트와 중국에서 있었던 원주율 π 값을 찾기 위한 원의 다각형으로의 분할이었다고 생각된다. 그들은 원주를 3,072개의 등간격의 직선으로 분할하여 $\pi=3.1416$ 을 얻었고, 보다 세밀하게 요소를 분할한 12,288개 요소에서는 $\pi=3.1415926$ 의 값을 얻었다. 이것은 오늘날 전자계산기로 계산한 $\pi=3.14159265$ 의 값과 비교하면 소수점이하 7자리까지 맞는 매우 근사한 수치이다.

오늘날 유한요소법의 개념은 잘게 쪼갠 요소내에서 응력의 평형방정식, 변형률-변위 관계식, 응력-변형률 관계식을 기본적으로 충족하고 적합성(Compatibility), 완전성(Completeness), 연속성(Continuity)을 만족하도록 수식화를 하여야 한다. 이와 같이 만들어진 각 요소의 평형방정식을 모두 취합하여 해석대상 구조물 전체의 평형방정식을 구성한 후 구조물의 경계조건을 대입하고 방정식의 해를 구한다는 개념이다.

모든 해석대상은 연속체(continuum)이고 공간에서 line, surface, volume의 차원(dimension)을 갖고 있다. 요소를 분할하여도 line element, surface element, volume element로 각각 자신의 차원과 연속체의 성질을 그대로 유지한다. 따라서 요소내에서의 연속체적인 특성을 요소경계의 절점(nodal point)으로 이관시켜야 해석대상과 사용요소의 차

원에 관계없이 구조물을 하나의 동일한 형태인 절점에 관한 방정식으로 구성할 수 있다.

상기와 같은 개념으로 구조해석에서의 유한요소법은 단위 요소 내에서 변위나 응력 또는 변형률을 연속함수로 가정하고 이것을 요소경계조건을 이용하여 미지의 절점성분으로 치환하게 된다. 미지의 절점성분으로 치환된 변위성분을 탄성론에 근거하여 정식화하면 요소내의 평형방정식은 절점에서의 미지의 변위성분으로 다원 1차 연립방정식 형태로 구성된다. 이들 요소전체를 취합하면 구조물전체에 대한 평형방정식이 다원 1차 연립방정식 형태로 형성되고 이 방정식을 풀기 위해 computer의 도움을 필요로 하는 것이다.

따라서 유한요소법에서 해의 정확도는 사용하는 유한요소의 정확도에 기인한다고 할 수 있다. 즉 요소내에서 요소의 거동을 묘사하는 연속함수로의 가정을 얼마만큼 정확하게 정식화시킨 요소인가가 구하고자하는 해의 정확도를 좌우한다는 것이다. 지금까지 발표된 유한요소법에 관한 많은 논문들이 대부분 보다 정확한 요소의 개발을 위한 연구들이었고 요소의 정확도는 유한요소법에서 그만큼 중요한 위치를 차지하고 있다.

1. 유한요소해석의 역사

확립된 기법으로서 많은 사람으로부터 신뢰를 얻고 있는 '그 기법'은 Turner, Clough, Martin, Topps 등의 논문에서 그 원점을 볼 수 있다. 여기에 항공기 산업의 영향이 있다. 당시 Turner는 보잉사의 기사(技師)로 일하고 있었고, Martin은 시애틀의 항공대학 공학부에 있었다. Clough는 캘리포니아 버클리 대학의 토목 공학부의 교수로 재직하고 있었으며, 항공우주분야가 아니었기에, 이 시점의 주요 멤버는 아니었다. '유한요소법'이라고 하는 말은 1960년에 그의 논문에 사용되었다. 이 때는 누구도 그것이 그만큼 중요하다고 생각하지 않았지만, 나중에 Clough의 이름이 역사에 남게 된것도 여기부터 이다.

또한 독일의 슈트가르트 대학의 Argyris에 대해서도 언급할 필요가 있다. 그는 1960년에 Keisey와 함께 1954년부터 1955년의 Aircraft Engineering Journal에 발표된 것을 기초로, 책을 출간했다. 이것은 앞에서 설명한 Turner의 논문과 동시기였지만, 유한요소라고 하는 말을 세상에 널리 전했다.

1947년에는 이미 이론이 확립되어, Wisconsin 대학의 R. D. Cook교수는 유한요소해석에 대해서, 교과서를 저술했다. 여기에는 유한요소에 대해 많은 정보가 적혀 있다. 그의 역사적 고찰에 의하면 실제, 그 아이디어는 1943년에 수학자 R.Courant에 거슬러 올라간다고 한다. Courant는 연속체 문제를 적은 3각형 영역의 집합으로 나타낼 것을 제안하였다. 기술적 및 기법적인 발상은 보다 이전에도 존재했다. 몇 명의 선구자들이 그것을 이어받아, 각각 독자적으로 확립해 온 것이다.

유한요소법은 초기에는 복잡한 구조물의 응력해석을 위해 개발되었으나, 그후 발전을 거듭

하여 연속체 역학(Continuum Mechanics)분야등 광범위한 분야에서 사용되고 있다. 구조물에 대해 요소의 공통되는 점, 선 및 면 등에서 여러 가지 경계조건을 사용하여 수식을 만들고, 이를 이용해 구조물 전체에 대한 연립 대수 방정식을 만들어 해를 구한다. 공통되는 점이나, 선, 면이 많아질수록 연립방정식이 커지게 되어 해를 구하는데 많은 계산이 필요하게 되었고, 이러한 특징으로 인하여 유한요소법은 컴퓨터의 발전속도와 비례하여 발전하였다.

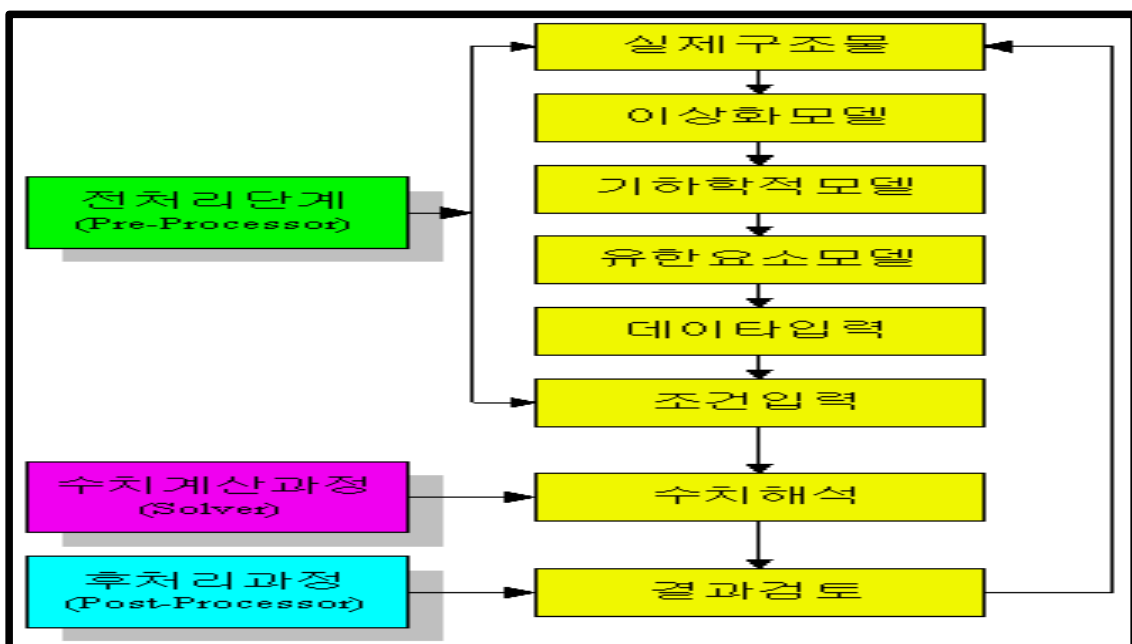
실제로 유한 요소법의 해석은 많은 분야에 적용되어, 다종다양한 문제를 푸는데 이용되고 있다. 근 25 ~ 30년간 다양한 소프트웨어 제품의 개발이 이루어져, 각종 산업에 사용되어 왔다. 사용하지 않으면 안 될 상황이 몇 가지 있었다. 원자력 산업이 그 한 가지이다. 자동차 산업에서는 1970년대 초에 적극적으로 받아들였다. 무역경쟁에 있어서 품질관리, 오일쇼크(Oil-Shock)의 영향에 의한 경제성 향상 및 안전 요소면에서의 설계검토에 있어서도, 실험하는 것보다 효율적이었던 것이다.

유한요소법에 있어서, 앞으로 발전이 기대되는 분야로는 정보여객기 외부의 유체흐름, 즉 유동현상에 대한 유한요소법의 적용이 있다. 보다 일반적인 유동해석은 상당히 복잡한 비선형성을 가지고 있어 아마도 현재의 슈퍼컴퓨터보다 더 빠른 것을 기다려야 할 것 같다.

마지막으로 유한요소해석이 이 만큼 보급된 원인으로는 컴퓨터의 발달이 예상보다 훨씬 빠르게 진행 되었으며 낮은 가격이 유한요소해석의 수요를 폭발적으로 만들어 냈기 때문이라고 말할 수 있다.

2. 유한요소해석의 단계

유한요소해석 단계는 위 그림과 같이 정리될 수 있으며 각각의 단계에 대해 간단히 설명하면 다음과 같다.



2.1 유한요소 모델링(preprocessor) : 유한요소 해석을 위해서는 해석 대상이 되는 물체를 유한한 크기의 요소로 나누어야 하며(meshing) 물체의 물성값, 하중상태, 경계조건 등을 결정해야한다. 이러한 작업을 모델링이라 부르며 이와 같은 작업을 손쉽게 해주기 위하여 만들어진 소프트웨어가 전처리 프로그램(preprocessor)이다. 메쉬 작업은 대상물체의 기하학적 형상을 얼마나 잘 표현할 수 있는지가 가장 중요한 일이기 때문에 보통은 CAD 프로그램과 연계하여 CAD 데이터로부터 기하학적 형상을 읽어들이는 다음 사용자 또는 자동 메쉬 기능을 이용하여 작업이 행해진다. 유한요소 모델링 작업은 전체 유한요소해석의 90%이상의 시간이 필요하며 세부형상의 근사여부, 경계조건의 결정, 하중의 결정 등 많은 엔지니어의 공학적 판단이 필요하게 되어 유한요소해석의 가장 중요한 단계이다.

2.2 유한요소해석(solution) : 유한요소 해석 프로그램의 핵심적인 부분이며 전처리 프로그램으로부터 모델링된 메쉬, 하중조건, 물성값 등을 넘겨 받아 실질적으로 풀 수 있는 대수방정식을 구성하고 해를 구하는 과정이다. 유한요소법 프로그램의 신뢰성은 이 부분을 담당하는 SOLVER의 성능에 따라서 평가되며 SOLVER를 기본이 되는 알고리즘을 이해하는 것이 유한요소해석 결과를 이해하는데 아주 중요한 경우가 많기 때문에 유한요소 해석시 사용되는 소프트웨어의 요소의 특징, 해법 등을 기본기식으로 알아두는 것이 좋다. 대수방정식은 문제의 성격에 따라 선형과 비선형으로 나눌 수 있으며 비선형 문제의 경우 반복적인 계산이 필요하다.

2.3 해석결과 후처리(Postprocessing) : 보통 유한요소의 수는 대단히 많기 때문에 해석결과를 한눈으로 알아 볼 수 있는 프로그램이 필요한데 이 것이 해석 후처리 프로그램(postprocessor)이다. 후처리 프로그램은 엔지니어가 원하는 해석결과를 컴퓨터 그래픽을 이용하여 화면 또는 유사 출력장치에 출력하여 주어 엔지니어가 해석결과를 일목요연하게 파악할 수 있도록 해준다. 그러나 해석결과 분석은 전적으로 해석 엔지니어가 최종적으로 판단해야 할 문제이며 후처리 프로그램은 단지 보조 프로그램에 지나지 않는다는 것을 명심할 필요가 있다. 많은 유한요소 패키지들이 모델링 과정 및 SOLVER에서 점점 더 강건하게 만들어 지고 있지만 아직도 공학해석 결과의 타당성 여부는 엔지니어의 많은 경험이 필수적이다.

3. 유한요소법의 문제점

주로 해결되어야 할 과제는 재료선형과 기하학적 비선형이 조합된 문제에 집중되어 있다고 할 수 있는데, 이들은 비선형 해석 알고리즘, 계산시간, 요소의 문제, 구성방정식(constitutive equation)으로 요약할 수 있다.

비선형 해석 알고리즘과 계산시간은 상호 연관되어 있기도 한 문제인 데, 비선형 해석문제에서 요소수가 많아질 때에는 계산시간이 지나치게 소요된다는 것이다. 앞으로 보다 빠른 컴퓨터가 등장한다 하더라도 비선형 해석 알고리즘의 획기적인 개발이 수반되지 않고는 오늘날의 계산시간은 타파하기가 어렵다. 즉, 기존의 하중증분법(incremental load method)과 접선강성행렬(tangential stiffness matrix)의 접목으로 해를 찾아가는 방법은 반복을 통한

과정으로 요소수가 많을 때에는 그 한계성을 지니게 마련이다. 따라서 그 수학적 기초를 새로이 하는 비선형 해석 알고리즘의 개발만이 계산시간에 관한 문제를 본질적으로 해결할 수 있다고 생각한다.

다음으로 요소의 문제를 들 수가 있다. 이것은 선형, 비선형 문제 모두에 적용되는 것으로 요소분할(mesh generation)과 요소개발(element development)의 측면으로 나누어 생각 해볼 수 있다. 요소분할의 문제는 근래 선형해석분야에서 활발히 연구되고 있는 과제로 "어떻게 요소를 분할하는 것이 해의 정확도를 보장하는 최적의 방법인가?"에 관한 것이다. 지금까지는 해석기술자가 그 자신의 유한요소법에 대한 지식을 바탕으로 정성적으로 요소를 분할하였지만 앞으로는 정량적인 오차 평가(error estimation)를 통하여 프로그램내에서 자동으로 요소를 분할해 주는 날이 올 것이다. 이에 대한 방법으로 p-method, h-method, r-method의 세 가지 방법과 이들의 혼용적인 방법이 연구되고 있다. p-method는 요소내의 오차가 크면 그 부분의 가정된 변위함수의 차수를 높여주는 방법(요소 내 절점을 추가하는 방법)이고, h-method는 그 부분만 요소를 더 잘게 분할하는 방법이며, r-method는 절점의 위치를 이동시키는 방법이다. 지금 단계에서의 이들 세 가지 방법은 모두 최적화 알고리즘을 경유하여야 하기 때문에 그만큼의 계산시간과 최적화과정에서의 수렴성(convergence)이 문제로 남게 된다. 최근 이 문제에 대한 많은 연구가 진행되고 있으므로 조만간에 상업용 code에도 이와 같은 방법 등이 탑재되어 신뢰성 있는 해석결과를 제시하리라 생각된다.

요소개발의 측면에서는 이 문제가 유한요소법의 핵심이라고 할 수 있는 데 우수한 요소는 적은 요소 분할에서도 정확도를 보장하기 때문에 해석시간의 단축과 결과의 신뢰도를 함께 제공한다. 현재까지 개발된 요소는 truss, beam, plane, plate, shell, solid 요소의 일반적인 것들이 있고, 특화된 요소로 gap element, rigid element, axisymmetric element 등이 있다. 일반적인 요소에서도 곡선보(curved beam) 요소나 shell 요소 같이 곡률을 갖는 요소는 강성과잉현상(locking phenomena)문제가 심각하여 최근에는 이 문제가 해결 국면에 접어들었지만 아직까지 연구가 계속되고 있는 실정이다. 그리고 특화된 요소는 아직까지 불안정한 결과를 보이는 것들이 있는데 대표적인 것이 gap element이다. 접촉문제를 포함하는 요소, box channel 같은 문제를 위한 요소, 볼트 체결부를 위한 요소 등의 특수한 문제들을 해결하기 위한 새로운 요소의 개발이 필요한 시점이다.

유한요소법 자체가 내재하고 있는 문제로 대경계문제(large boundary problem)을 들 수 있다. 이것은 경계가 큰 문제를 해석할 때에도 유한요소법은 요소 분할을 전부 하여야 하는데 기인하는 것으로 최근 부분 구조합성법(sub-structure method)과 같은 방법이 사용되고 있지만 근본적인 해결책은 되지 못한다. 이와 같은 문제를 해결하는 데 효과적인 것으로 경계요소법(Boundary Element Method)을 들 수가 있다. 최근 유한요소법과 경계요소법의 접목으로 통하여 대 경계문제를 해결하려는 연구가 활발하게 이루어지고 있으므로 이에 대한 기대가 크다.

마지막으로 비선형 문제의 정확도는 해석 알고리즘과 요소의 정확도 이외에 구성방정식의 정밀도, 신뢰도에도 기인한다고 할 수 있다. 이것은 유한요소법 자체의 문제는 아니고 재료

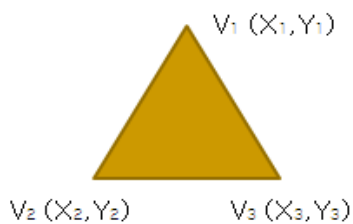
과학과 실험기술에 관계되는 문제이다. 재료비선형 문제에서 정밀한 응력-변형률 관계를 이용하여 해석하지 않으면, 아무리 훌륭한 비선형해석 알고리즘과 정확한 요소를 사용하여 해석하였다 하더라도 사용한 재료물성치의 정도 만큼 밖에는 정확하지 않을 것이다. 따라서 이와 같은 문제를 해석하는 유한요소 해석기술자들은 재료의 물성치에 대한 정밀도도 고려하여야 할 것이다.

FEM algorithm – Single element

- The most widely used elements are the linear node elements for which the potential inside a triangle can be approximated with a linear polynomial, (where a, b, c are three unknown coefficients)

$$V^{(e)}(x, y) = a + bx + cy$$

- If there is a element(triangle) and 3 node potentials(V_1, V_2, V_3) are given, we can figure out unknown coefficients,



$$V^{(e)}(x, y) = V_j (j = 1, 2, 3)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

$$V^{(e)}(x, y) = [1 \ x \ y] \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

FEM algorithm – Single element (contd.)

- The total energy of the ensemble of all elements in the mesh can be calculated as just being the **sum** of the energy of each of the individual elements

$$W = \sum_e W^{(e)}$$



FEM algorithm – Multiple elements

- We also need to know the procedure for adding a new element to the existing elements in the mesh

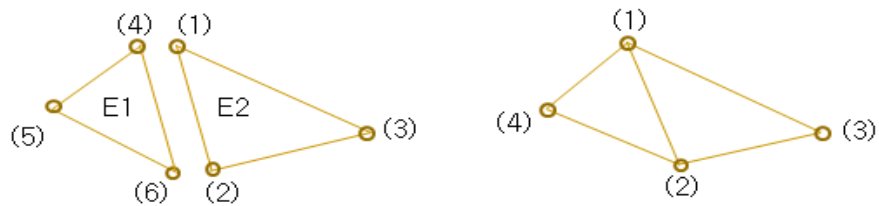


Fig. 1 (a) Decoupled elements

(b) Coupled elements



FEM algorithm – Multiple elements(contd.)

- Boundary Conditions: $V_1 = V_4$ and $V_2 = V_6$, and we also renumber the other node for convenience as $V_4 = V_5$ after coupling.
- The decoupled potentials can be written as a column matrix. The transpose of this matrix is

$$[V]_d = [V_1, V_2, V_3, V_4, V_5, V_6]_d^T$$

where, the subscript d means “decoupled.”

- If the S-matrices of the two elements are $[S^{(1)}] = [S_{i,j}](i, j = 1, 2, 3)$ and $[S^{(2)}] = [S_{i,j}](i, j = 4, 5, 6)$ then the global S-matrix of the decoupled system is the following block-diagonal square matrix:

$$[S^{(e)}]_d = \begin{bmatrix} [S^{(1)}] & [0] \\ [0] & [S^{(2)}] \end{bmatrix}$$

FEM algorithm – Multiple elements(contd.)

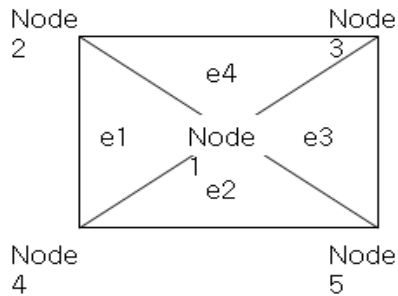
- We also introduce the column matrix of the coupled potentials.

$$[V] = [V_1, V_2, V_3, V_4]^T$$

- The boundary conditions from Fig. 1 can be written using a special rectangular coupling matrix. In this case, we obtain

$$[S^{(e)}] = \begin{bmatrix} S_{1,1}^{(1)} + S_{4,4}^{(2)} & S_{1,2}^{(1)} + S_{2,6}^{(2)} & S_{1,3}^{(1)} & S_{4,5}^{(2)} \\ S_{2,1}^{(1)} + S_{6,4}^{(2)} & S_{2,2}^{(1)} + S_{6,6}^{(2)} & S_{2,3}^{(1)} & S_{6,5}^{(2)} \\ S_{3,1}^{(1)} & S_{3,2}^{(1)} & S_{3,3}^{(1)} & 0 \\ S_{5,4}^{(2)} & S_{5,6}^{(2)} & 0 & S_{5,5}^{(2)} \end{bmatrix}$$

FEM algorithm – Multiple elements(contd.)



$$S^{(e1)} = \begin{pmatrix} S_{11}^{(e1)} & S_{12}^{(e1)} & S_{13}^{(e1)} \\ S_{21}^{(e1)} & S_{22}^{(e1)} & S_{23}^{(e1)} \\ S_{31}^{(e1)} & S_{32}^{(e1)} & S_{33}^{(e1)} \end{pmatrix} \quad S^{(e2)} = \begin{pmatrix} S_{11}^{(e2)} & S_{13}^{(e2)} & S_{14}^{(e2)} \\ S_{31}^{(e2)} & S_{33}^{(e2)} & S_{34}^{(e2)} \\ S_{41}^{(e2)} & S_{43}^{(e2)} & S_{44}^{(e2)} \end{pmatrix}$$

$$S^{(e3)} = \begin{pmatrix} S_{11}^{(e3)} & S_{14}^{(e3)} & S_{15}^{(e3)} \\ S_{41}^{(e3)} & S_{44}^{(e3)} & S_{45}^{(e3)} \\ S_{51}^{(e3)} & S_{52}^{(e3)} & S_{55}^{(e3)} \end{pmatrix} \quad S^{(e4)} = \begin{pmatrix} S_{11}^{(e4)} & S_{12}^{(e4)} & S_{15}^{(e4)} \\ S_{21}^{(e4)} & S_{22}^{(e4)} & S_{25}^{(e4)} \\ S_{51}^{(e4)} & S_{55}^{(e4)} & S_{55}^{(e4)} \end{pmatrix}$$

$$S = S^{(e1)} + S^{(e2)} + S^{(e3)} + S^{(e4)} \longrightarrow S = \begin{pmatrix} S_{11} & \cdots & S_{15} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{51} & \cdots & S_{55} \end{pmatrix}$$

FEM algorithm – Multiple elements(contd.)

$$S = \begin{pmatrix} S_{11} & \cdots & S_{15} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{51} & \cdots & S_{55} \end{pmatrix} \quad \text{에서 계산에 필요한 } S_{uu}, S_{uk} \text{ 행렬을 뽑아낸다.}$$

Tip: 계산의 편의를 위해 unknown node를 1번 node에서부터 위치시킨다.

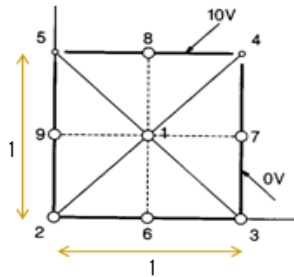
ex) unknown: 1,2 known: 3,4,5

$$S_{uu} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}, S_{uk} = \begin{pmatrix} S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ S_{23} & S_{24} & S_{25} \end{pmatrix}$$

$$[V]_u = -[S]_{u,u}^{-1} [S]_{u,k} [V]_k \equiv [F] [V]_k$$

의 계산을 통해 unknown node의 potential값을 얻는다.

FEM example (3)



- Find the potential in the point 1 using the FEM.

(Here, $V_2 = V_3 = 0$, $V_4 = V_5 = 5V$)

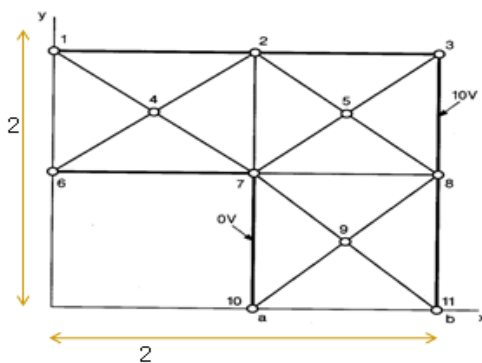
- Solution

$$\begin{aligned} S_{uu} &= S_{11}(a) + S_{11}(b) + S_{11}(c) + S_{11}(d) = 4S_{11} \\ S_{uk} &= [S_{12}(a) + S_{12}(b), S_{13}(b) + S_{13}(c), \\ &\quad S_{14}(c) + S_{14}(d), S_{15}(d) + S_{15}(a)] \\ &= [2S_{12} \ 2S_{13} \ 2S_{14} \ 2S_{15}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_k &= [V_2 \ V_3 \ V_4 \ V_5] = [0 \ 0 \ 5 \ 5] \\ V_u &= -S_{uu}^{-1} S_{uk} V_k = [2.5] \end{aligned}$$

So, $V_1 = 2.5(V)$

Experiment



- Find the potentials in the points 4, 5, 9

(Here, $V_1 = V_2 = V_3 = V_8 = V_{11} = 10V$,
 $V_6 = V_7 = V_{10} = 0V$)

FDTD(Finite difference time domain) method

1. FDTD method

1966 년 Kane Yee 에 의해서 처음 도입된 FDTD method 는 미분형 맥스웰 방정식을 시간과 공간에 대하여 풀어준 식이다. 3 차원 공간을 공간격자 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 로 나누고 그에 따라 시간 격자 Δt 를 결정한다. 안정조건에 의해 시간 간격 $\Delta x, \Delta t$ 는 다음과 같이 결정된다.

$$\Delta x \leq \frac{\lambda}{10} \quad \text{and} \quad \Delta t = \frac{\min(\Delta x, \Delta y, \Delta z)}{2 \times c_0}, \quad \text{where } c_0 = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

3 차원 공간상의 필드의 분포 구조는 그림 1 과 같다. 필드는 인접한 4 개의 필드에 의해 둘러싸여 있고, 필드는 인접한 4 개의 필드로 둘러싸여 있다. 따라서 필드와 필드가 서로 영향을 주면서 시간에 따라 공간상에 퍼져나가게 된다. 또한, 필드와 필드는 공간상에서 1/2 셀 만큼 어긋나 있으므로 동시에 업데이트 하지 않고, 순차적으로 와 필드를 계산한 후, 필드를 계산하게 된다.

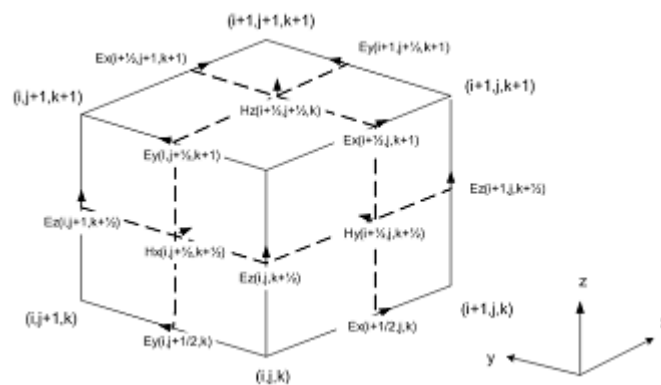


그림 1 FDTD cell

2. 1 차원 FDTD method

1 차원 FDTD method 는 다음의 미분형 맥스웰 방정식에서 1 차원 성분 E_x, H_y 만 고려하기로 한다. 위의 식을 좌표축과 시간축에 대한 FDTD method 의 기본식으로 변환하면 다음과 같다. H 에 대한 식도 같은 방식으로 풀이된다.

free space 에서 맥스웰 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \times H \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times E$$

→ E_x and H_y 만 고려

$$\frac{E_x^{n+1/2}(k) - E_x^{n-1/2}(k)}{\Delta t} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{H_y^n(k+1/2) - H_y^n(k-1/2)}{\Delta x}$$

$$\frac{H_y^{n+1}(k+1/2) - H_y^n(k+1/2)}{\Delta t} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{E_x^{n+1/2}(k+1) - E_x^{n+1/2}(k)}{\Delta x}$$

계산편이를 위해 $E \rightarrow \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E$ 로 치환하면,

$$E_x^{n+1/2}(k) = E_x^{n-1/2}(k) - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\Delta t}{\Delta z} (H_y^n(k+1/2) - H_y^n(k-1/2))$$

$$H_y^{n+1}(k+1/2) = H_y^n(k+1/2) - \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{\Delta t}{\Delta z} (E_y^{n+1/2}(k+1) - H_y^{n+1/2}(k))$$

$$E_x^{n+1/2}(k) = E_x^{n-1/2}(k) - \frac{1}{2} (H_y^n(k+1/2) - H_y^n(k-1/2))$$

← $\Delta t = \frac{\Delta z}{2c_0}$ 로 가정

$$H_y^{n+1}(k+1/2) = H_y^n(k+1/2) - \frac{1}{2} (E_y^{n+1/2}(k+1) - H_y^{n+1/2}(k))$$

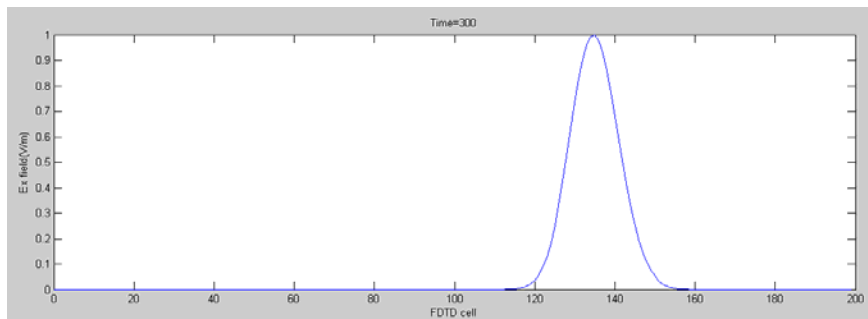
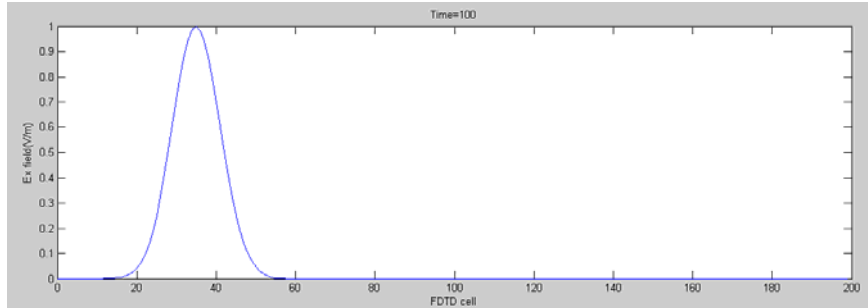
위의 결과를 MATLAB code로 바꾸면,

$$\text{ex}[k] = \text{ex}[k] + 0.5 * (\text{hy}[k-1] - \text{hy}[k]);$$

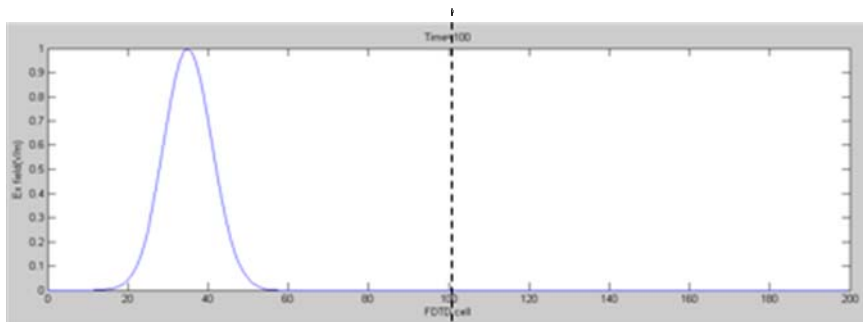
$$\text{hy}[k] = \text{hy}[k] + 0.5 * (\text{ex}[k] - \text{ex}[k+1]);$$

3. Wave propagation

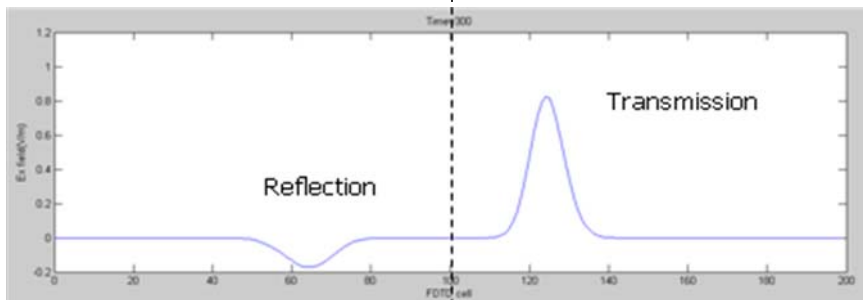
- Free space



- Dielectric material



→ Epsilon=4



→ Epsilon=4

4. MATLAB code (free space)

```
clc; clear;

SIZE = 200;    % total cell size

ex = zeros(1, SIZE);    % Ex-field array
hy = zeros(1, SIZE);    % Hy-field array

nsteps = 1;    % the number of time step for iteration
T = 0;        % total time step

inc_pos = SIZE/2;    % the position of gaussian pulse source
t0 = 40; spread = 12;    % parameters for gaussian pulse source

while( nsteps > 0 )
    nsteps = input('NSTEPS -> ');

    for m = 1:nsteps
        T = T + 1;

        % Calculate the Ex field
        for k = 2:SIZE
            ex(k) = ex(k) + 0.5 * ( hy(k-1) - hy(k));
        end

        % Put a Gaussian pulse int the middle
        pulse = exp( -0.5 * ((t0 - T) / spread)^2);
        ex(inc_pos) = pulse;

        % Calculate the Hy field
        for k = 1:SIZE-1
            hy(k) = hy(k) + 0.5 * (ex(k) - ex(k+1));
        end
    end
    T
    subplot(2,1,1); plot(ex); title('Ex'); axis([5 SIZE -1.2 1.2]);
    subplot(2,1,2); plot(hy); title('Hy'); axis([5 SIZE -1.2 1.2]);
end
```


5. 실험 내용

- 예비보고서 및 퀴즈

앞에서 설명한 2. 1차원 FDTD method 의 내용 (free space 에서의 E-field,H-field 식)을 참고로 하여 dielectric material에
서의 E-field,H-field 식을 유도하시오

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \nabla \times H \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times E$$

→ E_x and H_y

.....

for (n = 1; n < nsteps; n++)

.....

- 결과보고서

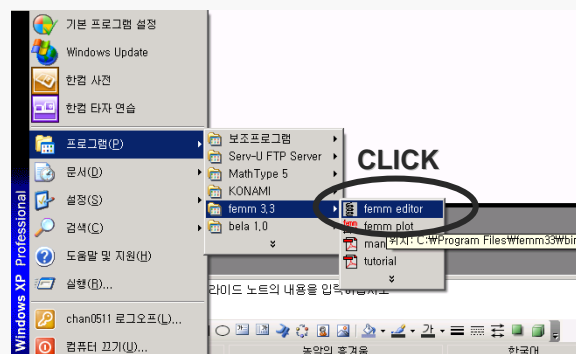
예비보고서를 참고하여 Dielectric material에 대한 모의실험
결과를 제시하시오

FEMM 이란?

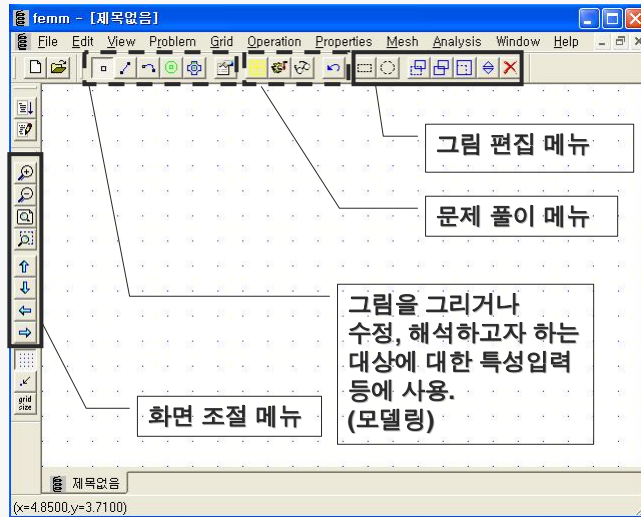
- ◇ FEMM : Finite Element Method Magnetics
 - ◇ Finite Element Method (유한요소법)
 - ◆ 편미분 방정식을 풀기 위한 technique 중의 하나.
 - ◆ 해석 대상을 유한 개의 영역(요소)으로 나누어, 그 영역의 접점을 정한 다음, 그 접점의 지배 방정식을 연립 1차 방정식에 근사시켜 푸는 방법
 - ◇ Pre-processor → Solver → Post-processor
(요소 분할) (방정식을 품) (결과를 graphics로)
- ☺ 무료
☹ 2차원 해석만 가능. 모델링이 약간 귀찮다.

FEMM 열기

FEMM을 실행시키기 위해서는 femm editor를 click.
(manual이나 tutorial 을 참고할 것.)

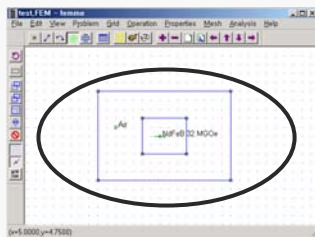


초기 화면

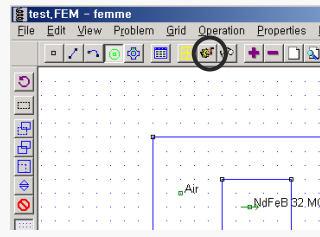


실행 순서

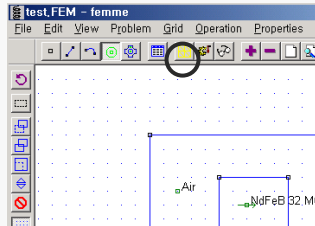
1. 해석할 대상을 그리고, 조건을 정해준다.



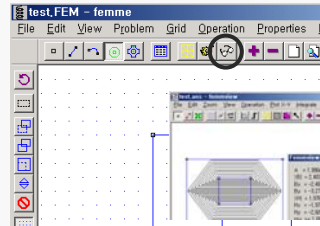
3. 방정식을 풀어준다.



2. 해석할 대상을 유한 요소로 분할한다.

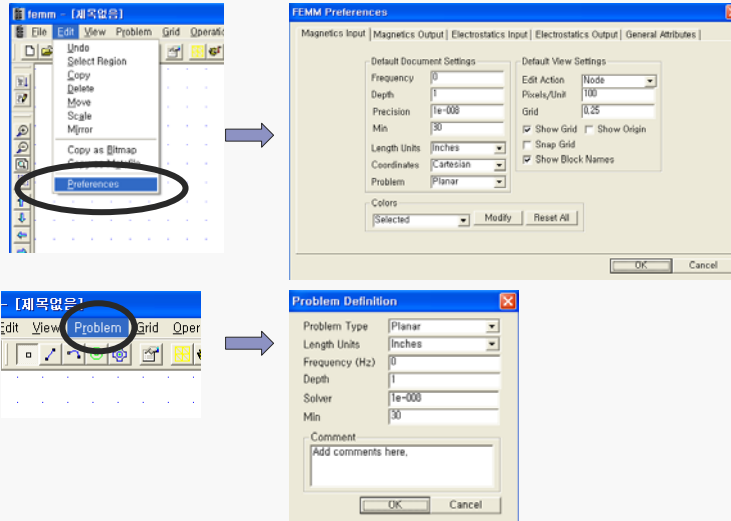


4. 결과를 본다.

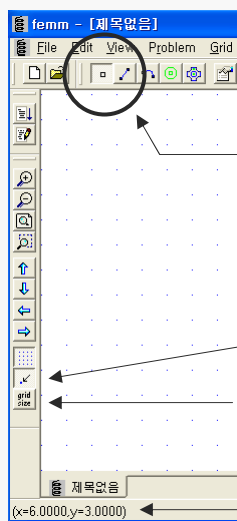


환경설정

Menu → Edit → Preference 또는 Menu → Problem 에서 설정



그리기 메뉴 - 점 찍기



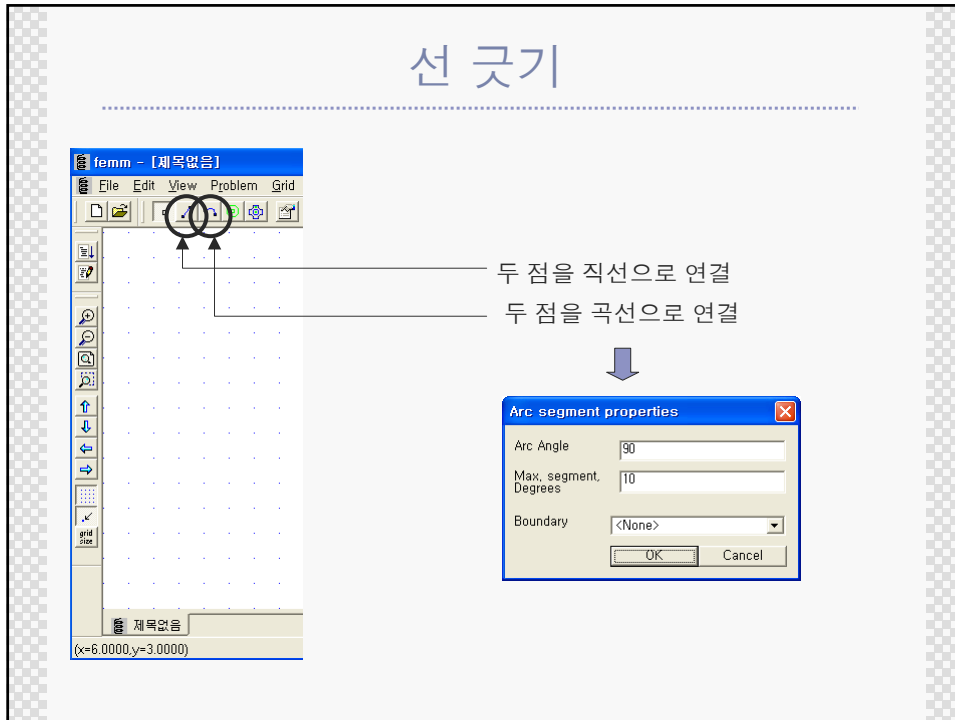
점 찍기(Point) → Left Click or TAB key
 점 선택(Select) → Right Click
 → 한번 더 Right click 하면 선택해제

Snap to grid → grid 상에만 점을 찍고 싶을 때

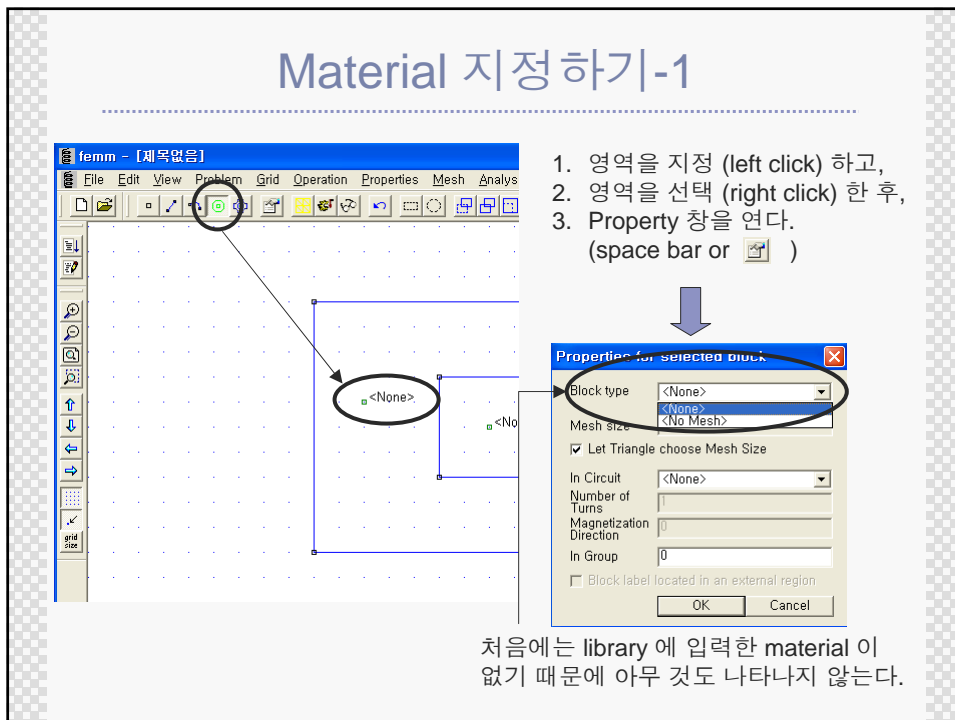
Grid size 변경하고 싶을 때

Mouse pointer 좌표

선 긋기



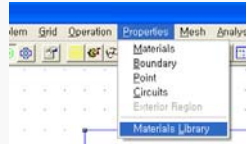
Material 지정하기-1



Material 지정하기-2

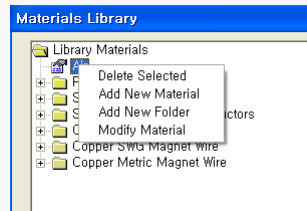
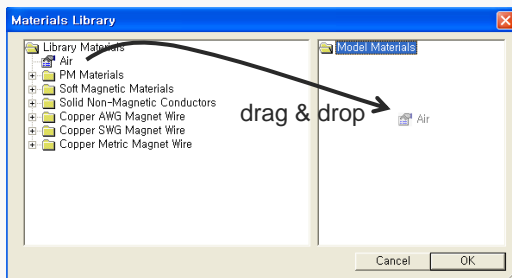
Material Library 에서 우리가 사용할 Material 을 선택

1. MENU → Properties → Materials Library 선택



Air → 공기
 PM Materials\NdFeB Magnets\NdFeB 32MGOe → 자석
 Soft Magnetic Materials\Silicon Iron\M-19 → 자석
 Solid Non-Magnetic Conductors\Copper → 구리

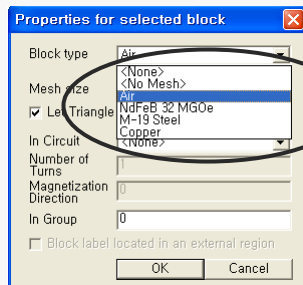
2. Material 추가



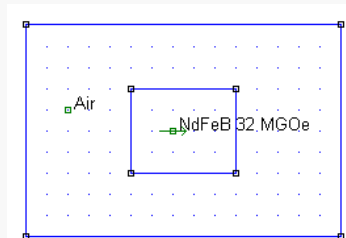
오른쪽 클릭으로 material Library 편집 메뉴를 불러낼 수 있다.

Material 지정하기 - 3

다시 영역을 선택하고 property 창을 열면 추가한 material 이 보임.
 원하는 material 선택.

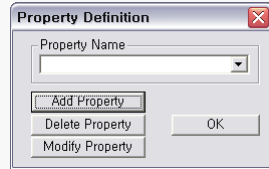


※ 자석을 선택한 경우,
 영역 index 에 화살표가 나타난다.
 (S → N)



Material 지정하기 - 4

- materials 에서 새로 추가



Material 지정하기 - 5

Block Property dialog box:

- Name: PB40
- B-H Curve: Nonlinear B-H Curve
- Linear Material Properties: Relative μ_x , Relative μ_y , ϕ_{hx} . deg, ϕ_{hy} . deg
- Nonlinear Material Properties: Edit B-H Curve
- Coercivity: H_c . A/m
- Electrical Conductivity: σ . MS/m
- Source Current Density: J, MA/m²
- Special Attributes: Lamination & Wire Type (Not laminated or stranded)
- Lam thickness, Lam fill factor, Number of, Strand dia, mm

Annotations:

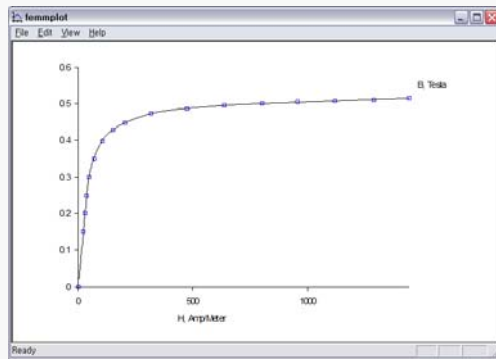
- Nonlinear B-H curve 선택 (points to B-H Curve dropdown)
- Nonlinear B-H curve 선택 (points to Edit B-H Curve button)
- B-H 특성을 지정 (*.txt) (points to Read B-H points from text file button)

Material 지정하기 - 5

- B-H curve data

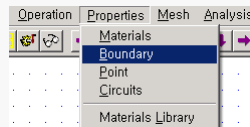
B (T)	H (A/m)
0	0
0.15001	23.519
0.20096	30.552
0.24814	37.6
0.29814	47.046
0.35004	68.533
0.39817	104.49
0.42934	152.57
0.44729	203.1
0.47283	318.66
0.48707	472.83
0.49566	636.65
0.50142	800.48
0.50434	954.69
0.50726	1118.5
0.51019	1284.8
0.51406	1439

- B-H curve plot

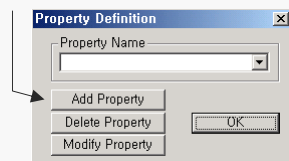


경계 조건 주기-1

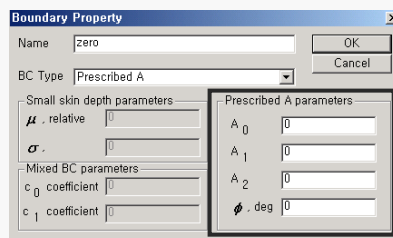
1. Property → boundary를 선택



2. Add property 선택



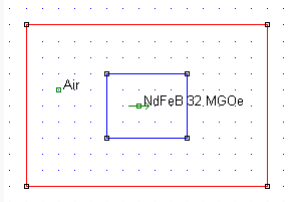
3. Name, BC type 선택 → OK



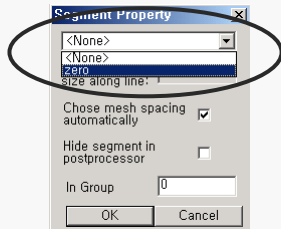
일반적으로 해석공간을 둘러싼 Air의 경계는 0으로 줍니다.

경계 조건 주기-2

1. 경계조건은 line에 주는 것 → 선 굵기 메뉴 선택
2. 경계 line 선택 (붉은 색으로 표시됨)

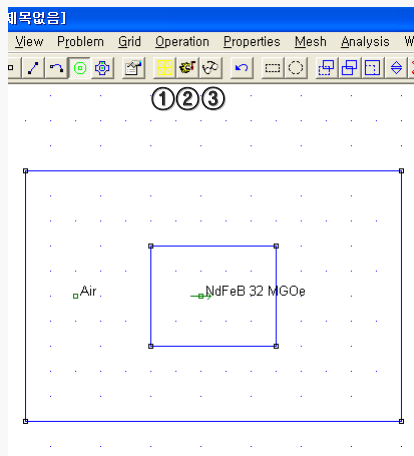


3. Property 창을 열어서 경계조건을 정해준다.



4. 방금 만들었던 zero라는 경계조건을 입력.
→ OK.

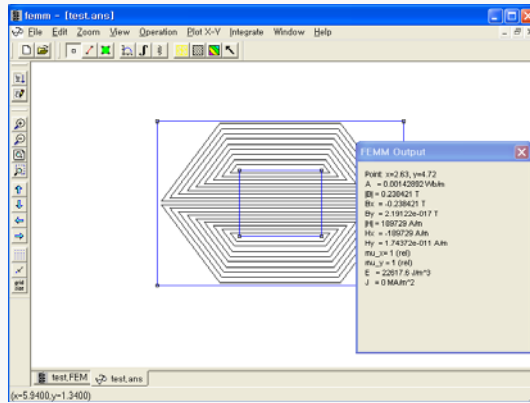
Solve



1. 영역을 분할하고
2. 방정식을 푼 다음,
3. 결과를 본다.

[주의] 저장을 하지 않으면
영역분할이 되지 않음.

결과보기 – femm view



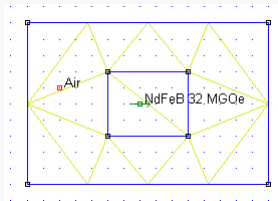
결과치를 알고 싶은
부분을 클릭하면
output 창이 뜬다.

선은 flux line 을 의미

Mesh size 조정하기-1

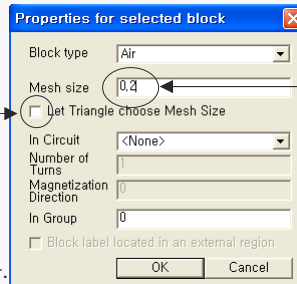
Air 의 mesh size 를 조정하려면?

1. Air 영역을 선택



2. Air 의 Property 를 변경
→ OK

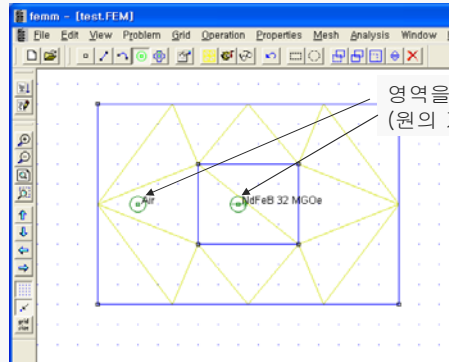
자동 mesh 선정을 해제



원하는 값을 넣는다.

3. 자석도 같은 방법으로 바꿔준다.

Mesh size 조정하기-2

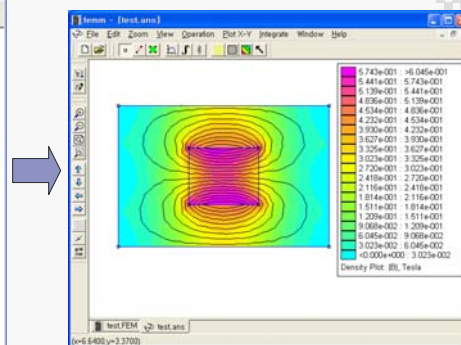
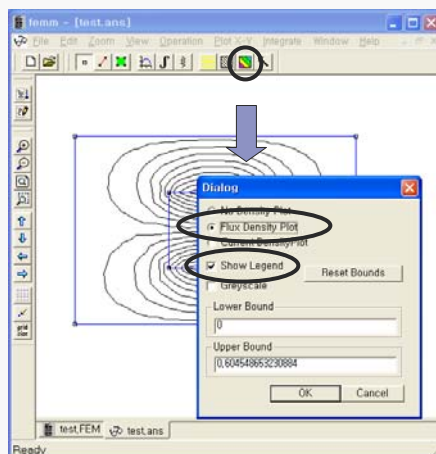


영역을 나타내는 점이 동그라미로 바뀜.
(원의 지름이 삼각형의 한 변의 크기를 결정)

삼각형이 작을수록 해석결과가 정확해지나, 계산속도는 느려짐.
(가능하면, 영역을 분할한 다음, node 의 개수가 10000 개가 넘지 않도록 한다.
시간이 많이 걸림.)

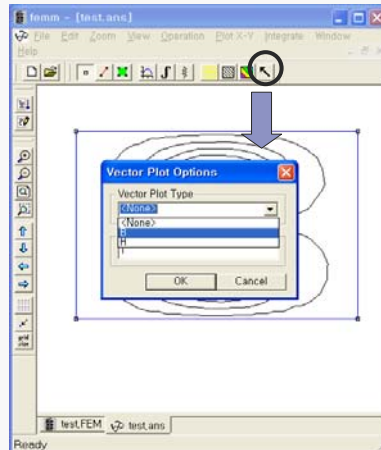
결과 자세히 보기

자장 분포를 컬러로 보려면?



결과 자세히 보기

Flux 방향을 보려면?



B를 선택하고 OK를 누르면 flux의 방향이 표시됨.

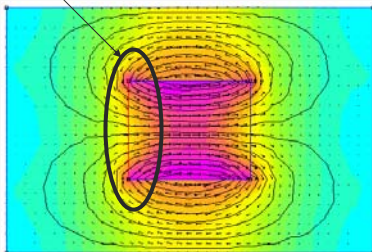
결과 자세히 보기

결과를 plot 으로 보려면?



1. Line menu 를 선택

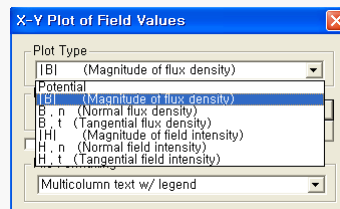
2. 결과를 보고자 하는 부분을 그림



5. Femplot 창이 뜨면서 그래프를 볼 수 있다.

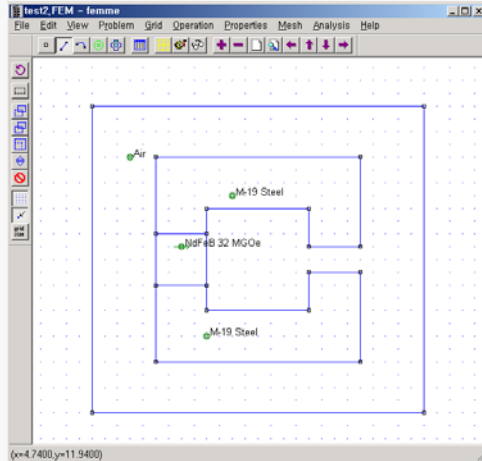
3. 그래프 모양의 menu 선택

4. Plot 하고자 하는 값을 결정 → OK



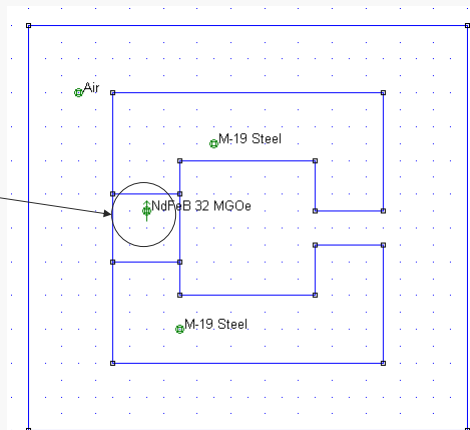
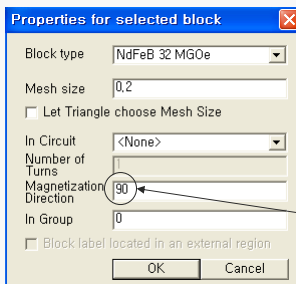
다른 예제

자석을 그냥 공기 중에 두지 않고, flux가 잘 통과할 수 있는 길을 만들어 주면, flux 형태가 어떻게 될까요?

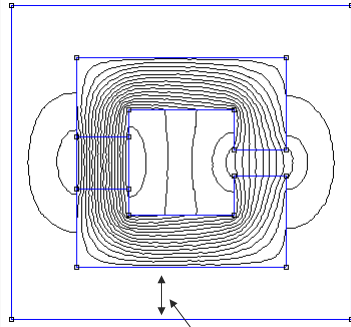


다른 예제

자석의 magnetization direction 이 조정하여, flux 가 metal 을 따라 흐르도록 조정한다.



다른 예제

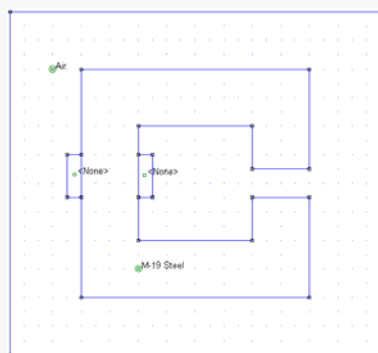


자석에서 발생하는 flux가 거의 steel을 따라 흐르고 있습니다. 하지만 steel 외부로 약간씩 새고 있는데요, 이것을 leakage flux라고 부릅니다.

Steel이 꺾이는 부분을 잘 보시면 바깥쪽 코너보다 안쪽 코너에서 flux가 많이 지나감을 볼 수 있습니다. 이것은 안쪽이 바깥쪽을 도는 것보다 길이가 짧기 때문에 저항이 작아져서 안쪽으로 flux가 많이 몰리는 것입니다.

예제를 보이기 위해 그리다 보니 이 공간이 작는데 사실 넉넉하게 하는 것이 좀 더 정확한 해석이 됩니다.
물론 문제에 따라 다르게 결정될 것이지만....

전자석 만들기



전자석을 만들어주기 위한 전류는 어떻게 설정할까?

1. Material properties 에서 서로 다른 방향의 전류밀도를 가지는 copper 를 정의하여 사용하는 방법과,
2. Copper에 흐르는 전체 전류를 circuit 항목을 정의해주는 방법이 있다.

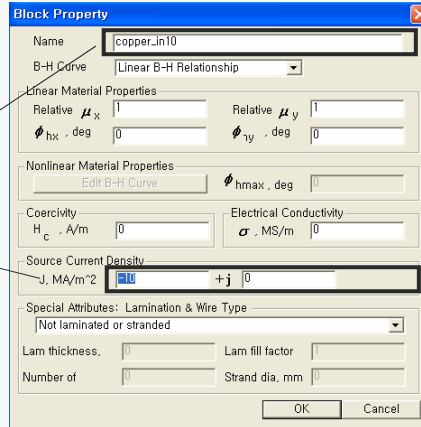
전류 - 1

- Material properties 에서 서로 다른 방향의 전류밀도를 가지는 copper 를 정의하여 사용하는 방법

- Properties → Materials
- Add Property 선택

이름은 알맞게 수정(예:copper_in10)
Source current density의 real부분에
-10을 줌.

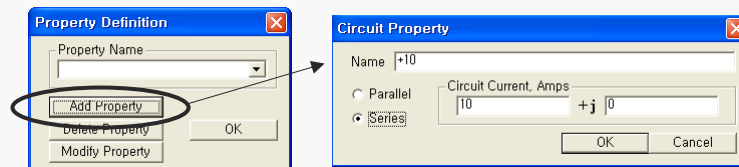
같은 방법으로 copper_out10을 만들고,
전류밀도 값에 10을 넣어줌.



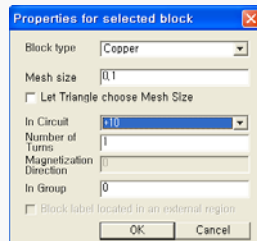
전류 - 2

- Copper에 흐르는 전체 전류를 circuit 항목을 정의해주는 방법

- 전류가 흐를 부분의 material 을 copper 로 선택
- Properties → Circuits 에서, 전류크기를 정의 (+10, -10)

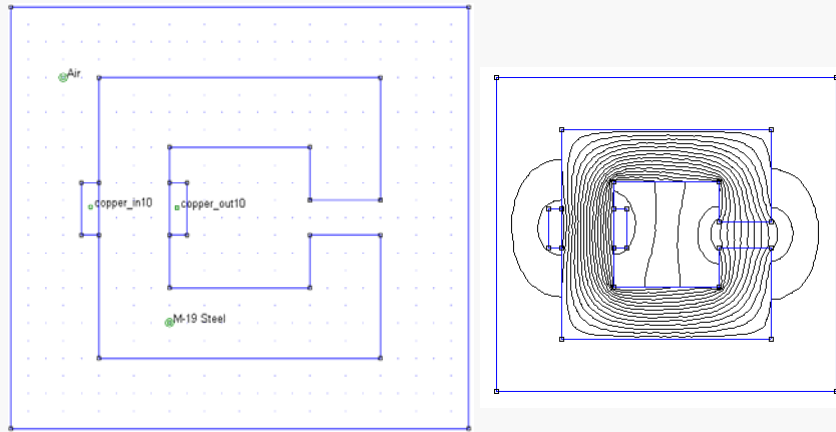


- Properties 에서 In Circuit 을 +10, -10 으로 선택해준다.

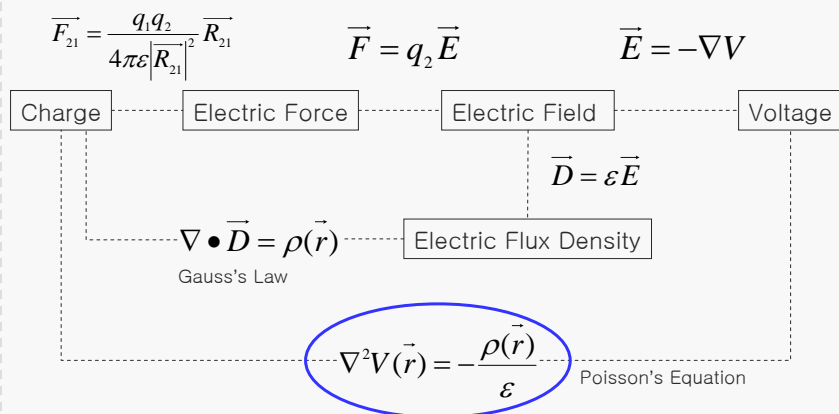


전자석 만들기

만든 물질을 그림과 같이 설정하고 풀면 결과는 자석을 사용한 경우와 비슷하게 나옵니다. 전류의 방향에 따라 flux의 방향이 결정될 것입니다.



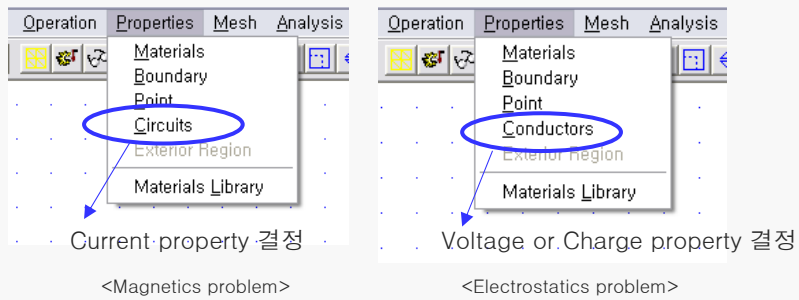
전자장 이론



→ 주어진 전하분포에 대한 2차 미분 방정식을 풀면, 전위분포를 구할 수 있다.

Tool 사용법

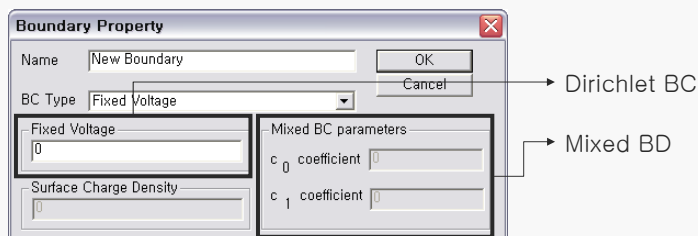
- ◆ 전기장을 해석하려면?
FEMM 4.0 → File → New → Electrostatics Problem
- ◆ Magnetics Problem과 비교할 때 달라진 점은?



경계조건

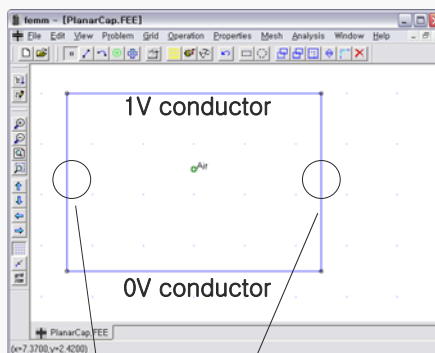
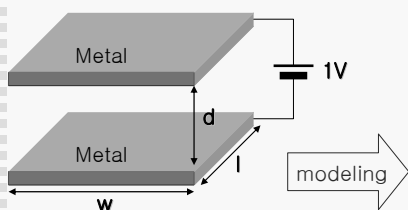
경계 조건의 종류

1. Dirichlet BC : $V = \text{constant}$
2. Neumann BC : $\frac{\partial V}{\partial n} = \text{constant}$ → 경계조건을 정해주지 않으면 $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$ 인 Neumann BC 가 적용된다.
3. Mixed BC : $\frac{\partial V}{\partial n} + c_0 V + c_1 = 0$



[예제] planar capacitor

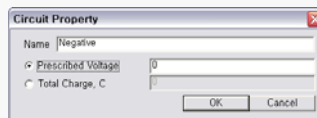
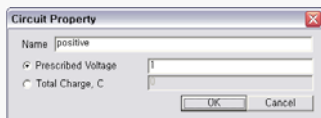
1) Metal 에 일정전압이 걸려있을 때



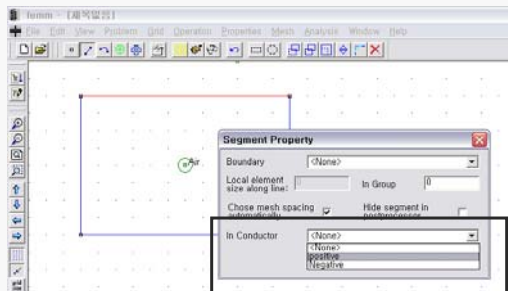
경계설정 안함 → 자연경계

Fixed voltage conductor 설정

우선, Properties → Conductors → Add property 에서, 원하는 전압특성을 가지는 Conductor 를 추가한다.

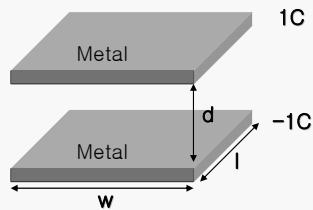


경계부분의 property 창을 열어 (line select → space key) 추가한 conductor 를 선택한다.

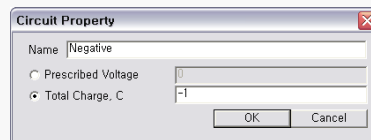
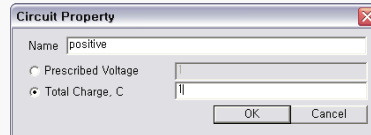


Total charge conductor 설정

2) Metal 에 total charge 량이 정해져 있을 때



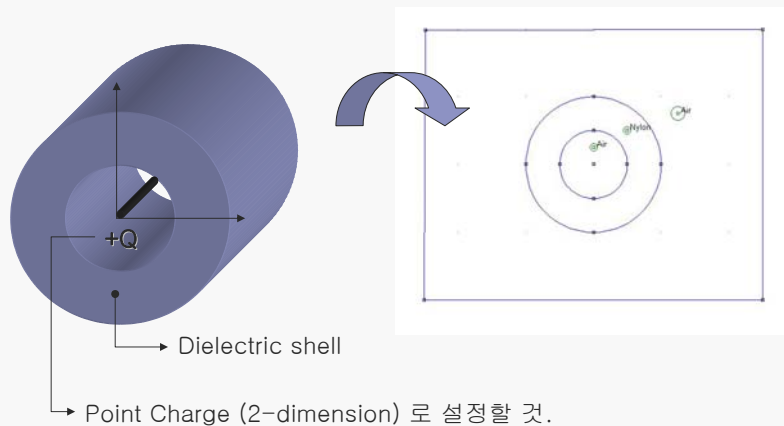
Properties → Conductors → Add property 에서, 1C, -1C 의 Conductor 를 추가한다.



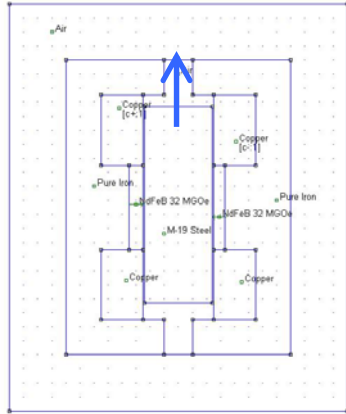
※ Total charge 량을 정해줄 경우, depth를 변경해주면 voltage 가 바뀌는 것을 볼 수 있다. ($Q=CV$)

[Test-1 : 전계] Coaxial Structure

Cheng 책 example 3-12 (figure 3-21)



[Test -2 : 자계] 차단기

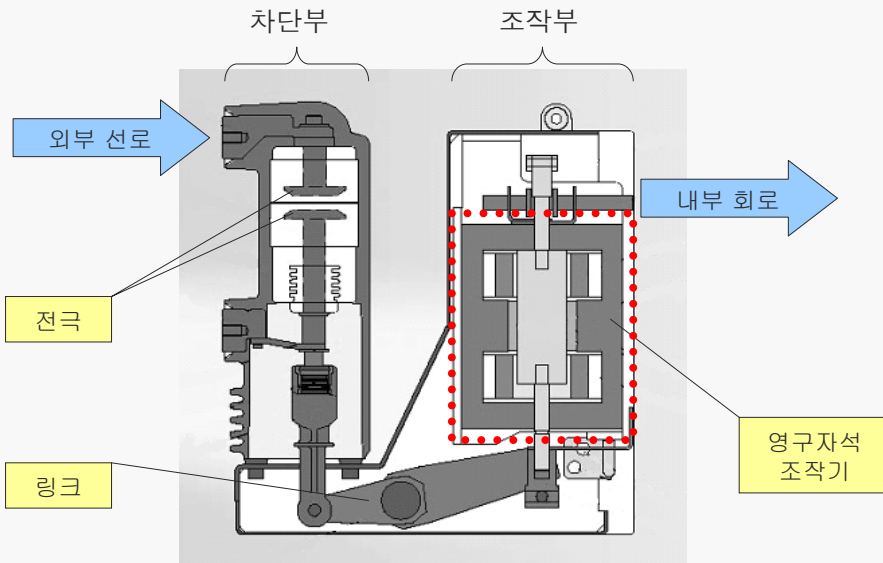


▶ 원치 않는 외부의 서지(surge)로부터 내부의 회로를 보호하기 위해 순간적으로 전류를 차단해야 한다. 왼쪽 그림은 영구자석을 이용한 조작기의 단면도이다. 조작기 내의 운동자의 질량(조작부 링크포함)이 18kg, 차단부-조작부 간 링크의 비가 1:20이며, 차단부의 전극 질량(차단부 링크포함)이 30kg이라고 할 때, 전극을 떼어주기 위해 필요한 힘과 인가해주어야 할 전류를 구하라.

※ 마찰, 저항 등으로 인한 손실은 없고, $g=10\text{m/s}$ 로 계산한다.

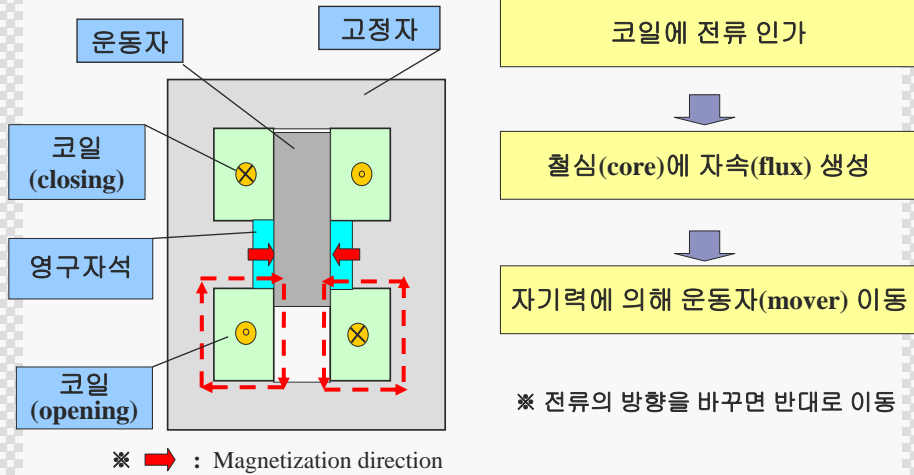
※ 설계시 조작기의 두께(depth)는 100mm로 설정한다.

[차단기] Circuit Breaker 구조



[차단기] 영구자석형 조작기

◇ Permanent Magnet Actuator



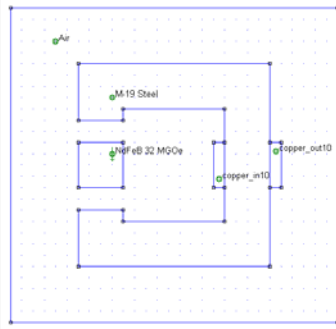
Test 항목들

- ◇ 그림은 잘 그리는지(깔끔하게)
- ◇ 경계조건을 잘 주었는지(경계조건을 0으로 주지 않으면 자속이 퍼지게 됩니다. 자주 겪는 실수 중에 하나죠)
- ◇ 원하는 단면의 자속분포 등의 그래프는 그릴 수 있는지
- ◇ 자속 방향을 화살표로 나타내기
- ◇ 자장 분포를 컬러로 또는 회색조로 나타내기
- ◇ 전류를 넣을 줄 아는지
- ◇ 자석의 방향을 고칠 수 있는지
- ◇ 해석 물질과 경계 사이는 넉넉하게 공간을 두었는지
- ◇ 메쉬 크기를 조절할 수 있는지
- ◇ 해석 영역의 단위를 고칠 수 있는지(inch, mm, m, cm)
- ◇ Etc.

[과제-1]

다음과 같이 전류방향을 결정해주면, 자석에 의한 flux와 전류에 의한 flux의 방향이 서로 반대가 된다.

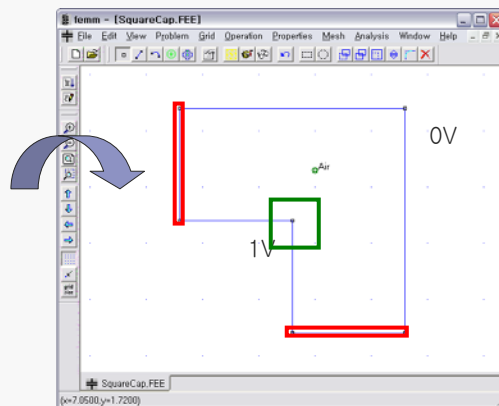
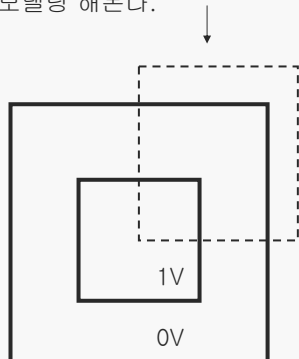
이 때, M-19내부의 flux가 거의 모두 상쇄되도록 두 가지 방법 중 한가지 방법으로 COPPER에 전류를 흐르도록 설정하고, 구해진 전류값을 통해 나머지 한가지 방법으로도 전류를 설정할 때 필요한 값을 계산하여 같은 결과가 나오는 것을 보시오.



[과제-2] □형 Capacitor

□자 형태의 capacitor의 전압을 simulation 해볼 것.

좌우대칭형이므로 1사분면만 모델링 해본다.

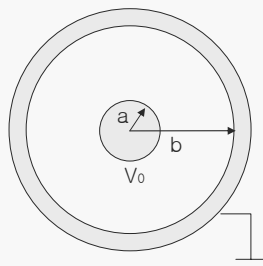


[과제-2] (계속)

- 대칭 조건이 주어진 경우, 시스템 전체를 모델링할 필요없이 앞에서와 같이 1사분면만 모델링을 하면 된다. 이 경우, Red box로 표시한 경계에서 경계조건을 어떻게 설정해야 하는지, 그리고 그 경계조건의 (수학적 or 물리적인) 의미에 대해서 설명하시오. 더불어 Test-1도 대칭 조건을 이용하여 간단하게 모델링하시오.
- Green box로 표시한 부분과 평행축전판 부분의 전기장 크기를 비교하고, 그 차이의 원인에 대해서 논하시오.
- 이를 바탕으로 피뢰침의 원리에 대해 설명하고, 간단하게 피뢰침을 설계하여 전기장 분포와 전위분포를 구하시오.
(상하부 경계를 각각 10,000V, 0V 로 설정)

[과제-3]

radius 가 $a=4\text{mm}$, $b=10\text{mm}$ 인 두 conductor 로 이루어진 매우 긴 coaxial cable이 있다. 외부 conductor 는 접지되어 있고, 내부는 $V_0=10\text{V}$ 의 전위 값을 가질 때,



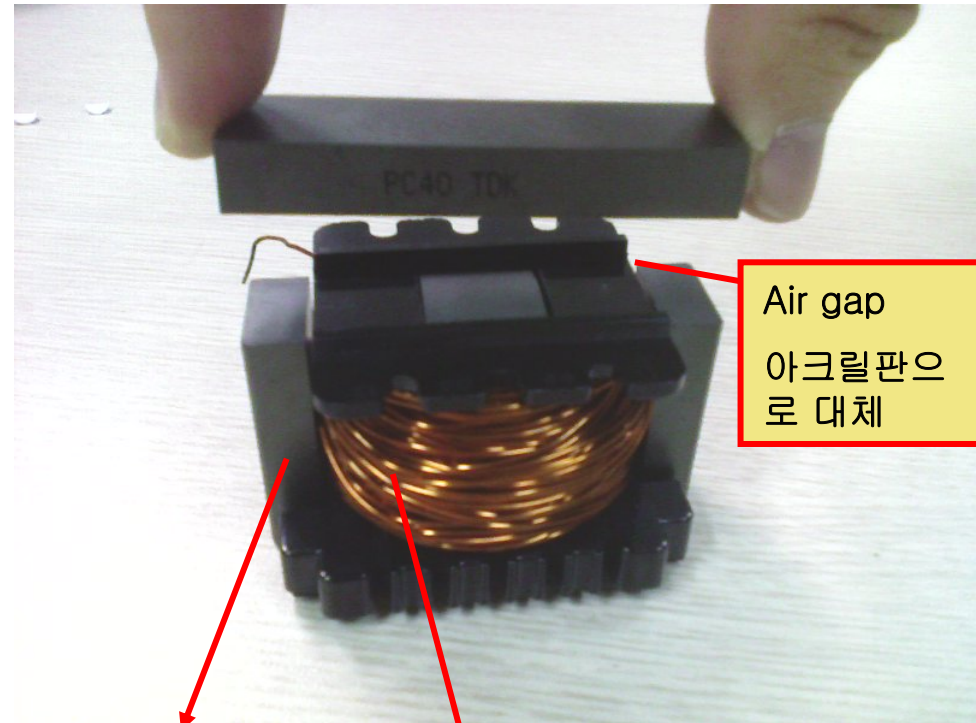
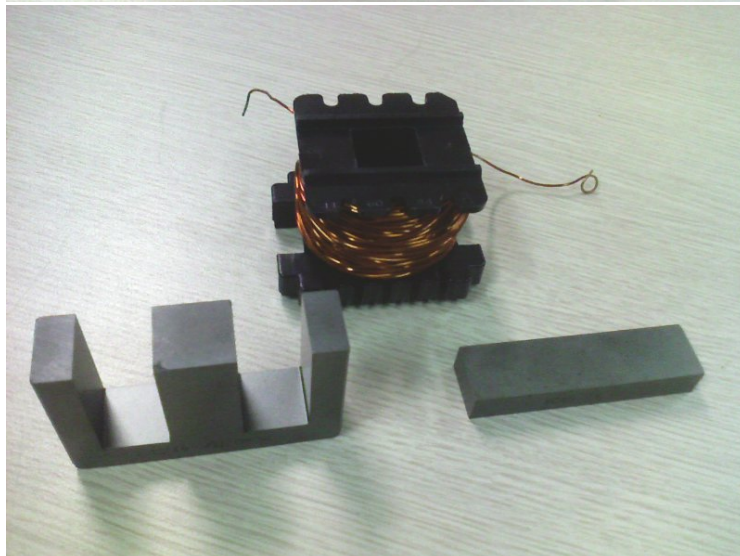
Cheng 책, example4-8 참고하여

1. Simulation 한 후, 전체 전위 분포 graph 와 $0 < r < b$ 의 전위분포 plot 을 그린다.
2. Simulation 결과에서 $r=4\text{mm}$ 에서 10mm 까지 1mm 간격으로 전위 값을 읽고, 수식과 일치하는지 비교한다.

[Hint] Grid 좌표 조정메뉴와 tab key 를 적절히 사용한다.



기본 실험 장비



Air gap
아크릴판으로 대체

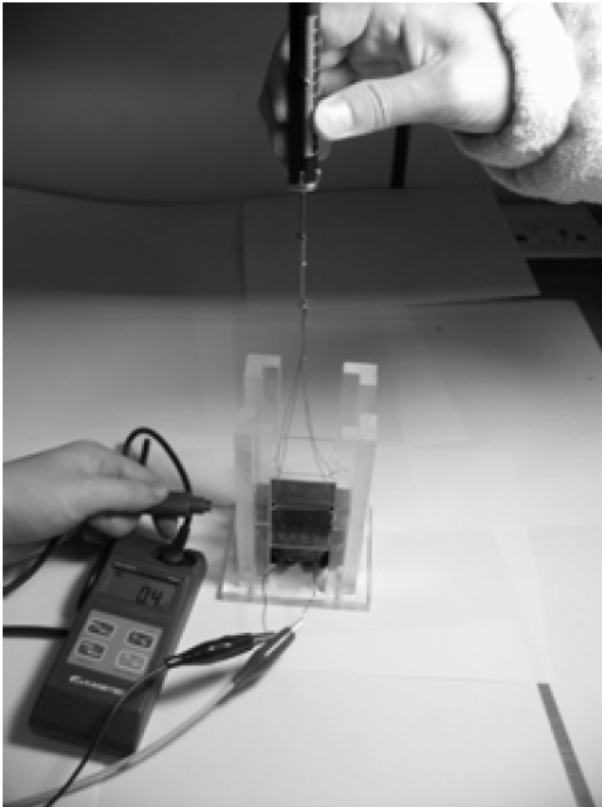
PC40

Coil : 250 번 감기

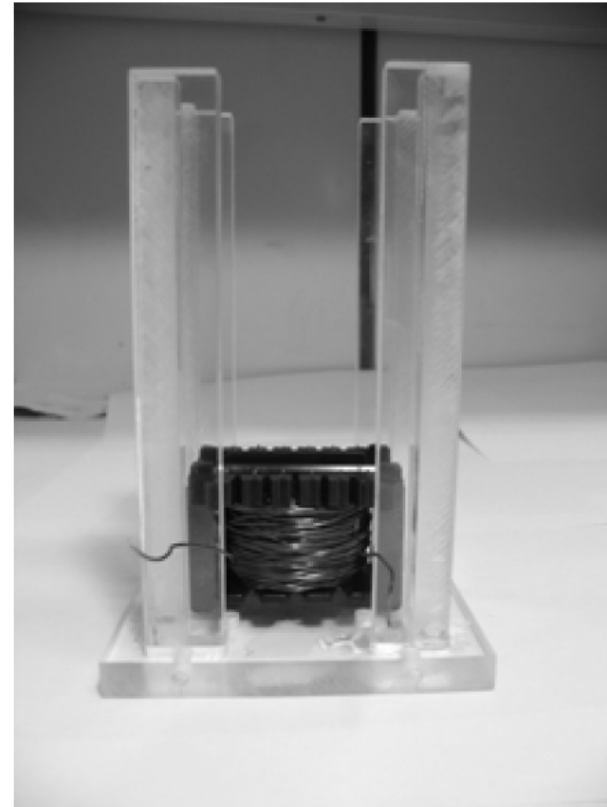




기본 실험 세팅



<실험 모습>



<티코어와 아크릴 세트>





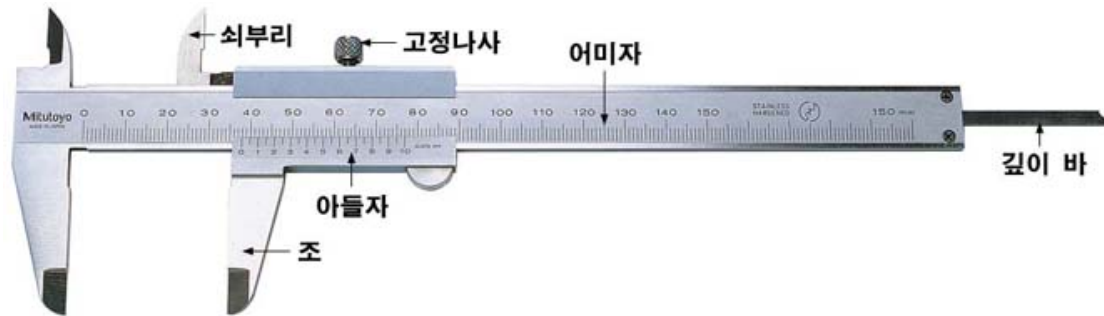
실험 방법



- ① 그림과 같이 장비를 설치한다.
- ② 자성체에 코일을 일정한 턴 수 (250)로 감는다
- ③ 직류 전원장치를 이용하여 도선에 일정한 전류를 흐르게 하고 그때의 값을 기록한다.
- ④ 두 개의 자성체 사이를 일정 (6mm, 실제 측정값사용)하게 유지하고 두 자성체 사이의 흡인력을 용수철 게이지를 이용하여 측정하여 기록한다.
 - ✓ 공극은 아크릴판을 활용/ 상단 아크릴 판에 실을 연결
 - ✓ 용수철 게이지 측정
- ⑤ 가우스 미터를 이용해 공극(air gap)사이의 자속밀도(B_g)를 측정하여 기록한다.
 - ✓ 가우스 미터는 수직방향 측정 가능한 것 사용
 - ✓ 반도체 방향 뒤집어졌을 시 측정이 안됨.
 - ✓ 가운데를 측정할것
- ⑥ 측정과정을 3회 반복한다.



Air-Gap 측정-버니어 캘리퍼스



- ❖ 물체의 바깥 지름, 안 지름, 두께, 홈의 깊이 등을 1/20mm(0.05mm)까지 정밀하게 측정할 수 있다
- ❖ 어미자의 한 눈금이 1mm이며, 아들자 한 눈금의 크기는 어미자의 19눈금을 20등분하여 19/20mm로 되어 있다.
- ❖ 어미자와 아들자의 한 눈금 차이는 1/20mm가 되어 1/20mm(0.05mm)까지 정확하게 측정할 수 있다.



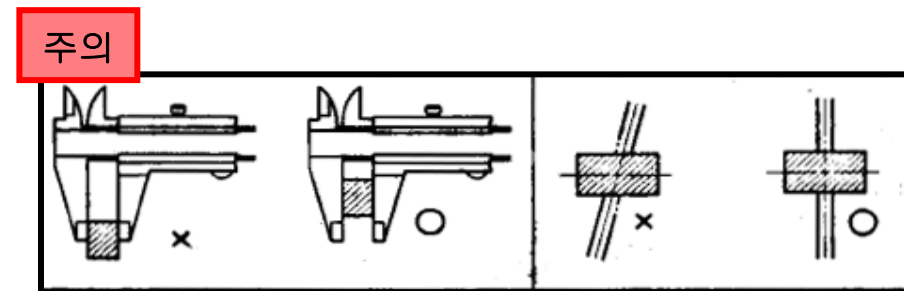


버니어 캘리퍼스 사용법



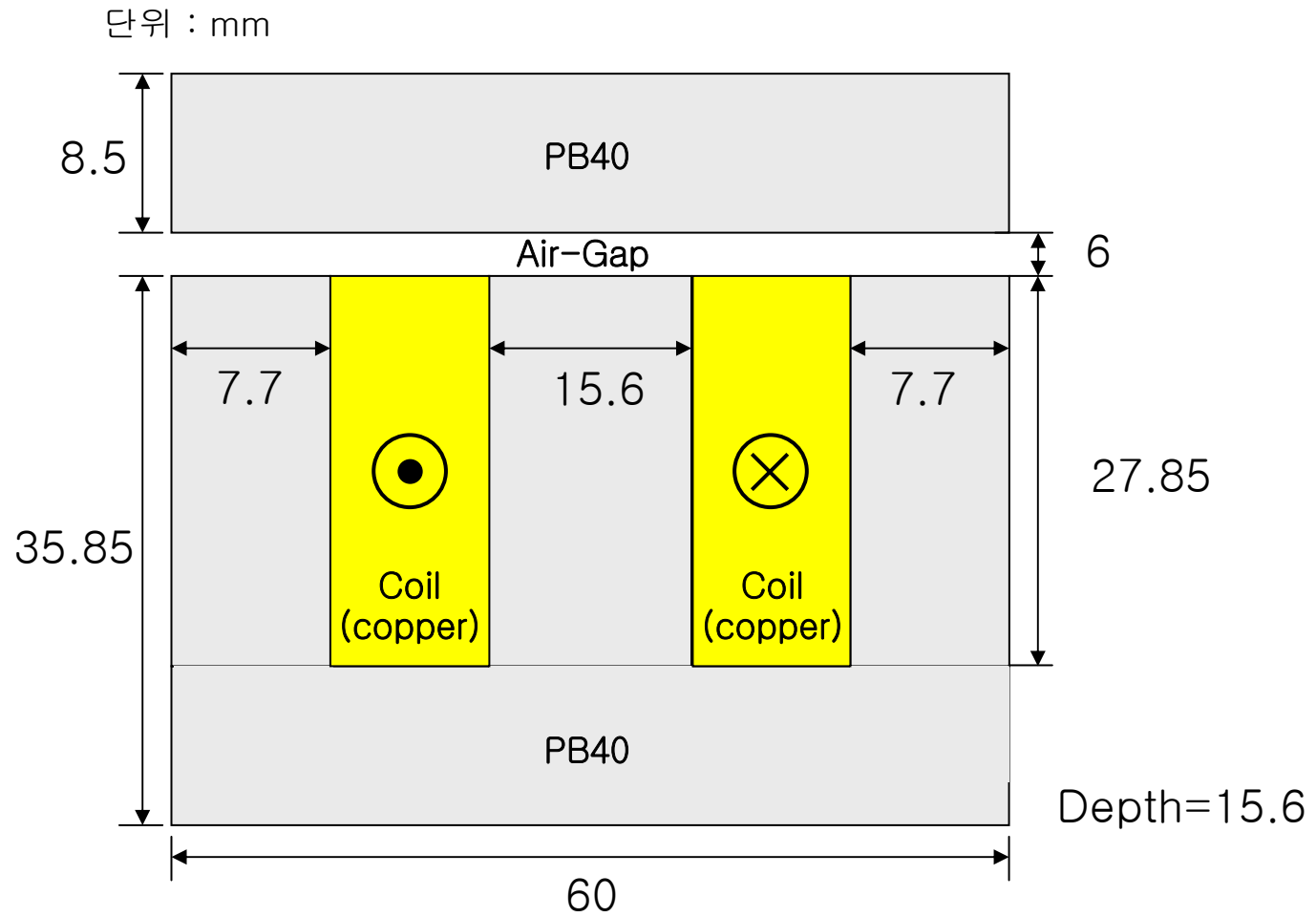
❖ 눈금 읽는 방법.

- 아들자 눈금 0이 어미자와 만난 곳 11mm를 읽는다.
- 아들자와 어미자 눈금이 일치하는 곳의 아들자 눈금 0.55(화살표 있는 곳, 소수점 이하)를 읽는다.
- 또는 아들자의 눈금이 11번째이므로 $11 \times 0.05 = 0.55\text{mm}$ 로 읽어도 된다.
- 버니어 캘리퍼스의 눈금은 $11 + 0.55 = 11.55\text{mm}$ 이다.





FEMM- Model 치수

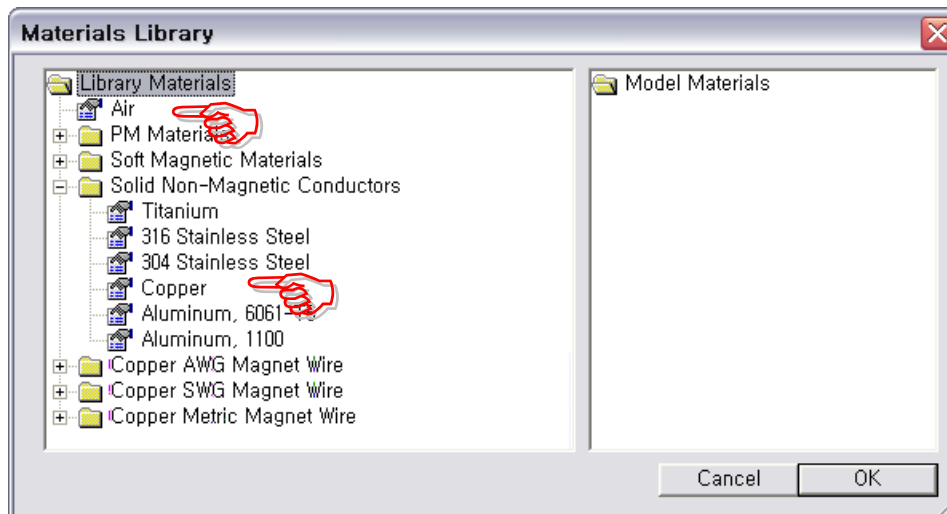




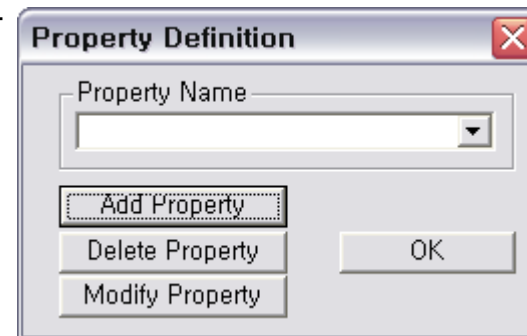
FEMM



- ❖ Air, Copper ; materials library 에서 추가



- ❖ PB40 ; materials 에서 새로 추가





FEMM- PB40



Block Property

Name: PB40

B-H Curve: Nonlinear B-H Curve

Linear Material Properties

Relative μ_x : 1 Relative μ_y : 1

ϕ_{hx} . deg: 0 ϕ_{hy} . deg: 0

Nonlinear Material Properties

Coercivity

H_c . A/m: 0

Electrical Conductivity

σ . MS/m

Source Current Density

J, MA/m²: 0 + j 0

Special Attributes: Lamination & Wire Type

Lam thickness: 0 Lam fill factor

Number of: 0 Strand dia, mm

Nonlinear B-H curve 선택

Nonlinear B-H curve 선택

B-H Curve Data

B-H Curve for:
PB40

B.	H.

B-H 특성파일 읽어오기 (*.txt)
→ 전자장 실험 게시판 참조





FEMM-자속 측정



The screenshot displays the FEMM software interface with a magnetic field simulation. The main window is titled "test.ans - femmview" and contains a menu bar (File, Edit, Zoom, View, Operation, Plot X-Y, Integrate, Help) and a toolbar. The simulation area shows a cross-section of a magnetic core with field lines. A yellow callout box points to the "Point mode" icon in the toolbar and contains the text: "Pointer를 X: 중심, Y: Air 에 위치한 후 Mouse click". Another yellow callout box labeled "자속값 확인" points to the "By" value in the "Femmview Output" window. The output window lists the following values: A = 9.996e-007 Weber/m, |B| = 5.901e-002 Tesla, Bx = -1.925e-006 Tesla, By = 5.901e-002 Tesla, |H| = 4.696e+004 Amp/m, Hx = -1.532e+000 Amp/m, Hy = 4.696e+004 Amp/m, mu_x = 1.000e+000 (relative), mu_y = 1.000e+000 (relative), E = 1.386e+003 Joules/m^3, and J = 0.000e+000 MA/m^2. The coordinate "(x=30.0000,y=36.0000)" is circled in red at the bottom left of the simulation area.

test.ans - femmview

File Edit Zoom View Operation Plot X-Y Integrate Help

Point mode

Pointer를
X: 중심, Y: Air 에 위치한 후
Mouse click

자속값 확인

Femmview Output

A = 9.996e-007 Weber/m
|B| = 5.901e-002 Tesla
Bx = -1.925e-006 Tesla
By = 5.901e-002 Tesla
|H| = 4.696e+004 Amp/m
Hx = -1.532e+000 Amp/m
Hy = 4.696e+004 Amp/m
mu_x = 1.000e+000 (relative)
mu_y = 1.000e+000 (relative)
E = 1.386e+003 Joules/m³
J = 0.000e+000 MA/m²

(x=30.0000,y=36.0000)





FEMM-force 측정



The screenshot shows the FEMM software interface with a magnetic field simulation. A callout box labeled '1. 적분영역 설정' points to a green rectangular region on the top part of the simulation. Another callout box labeled '2. Integrate menu 선택' points to the 'Integrate' menu in the top toolbar. A third callout box labeled '3. Force via ... 선택' points to the 'Force via Weighted Stress Tensor' option in the 'Block Integrals' dialog box.

1. 적분영역 설정

2. Integrate menu 선택

3. Force via ... 선택

Block Integrals

- A, J
- A, J
- A
- Magnetic field energy
- Hyst. and/or Laminated eddy current losses
- Resistive losses
- Block cross-section area
- Total losses
- Total current
- Integral of B over block
- Block volume
- Lorentz force ($J \times B$)
- Lorentz torque ($r \times J \times B$)
- Magnetic field coenergy
- Force via Weighted Stress Tensor**
- Torque via Weighted Stress Tensor

A = 9,967e-007 Weber/m
|B| = 5,898e-002 Tesla
Bx = -3,845e-007 Tesla
By = 5,898e-002 Tesla
|H| = 4,693e+004 Amp/m
Hx = -3,060e-001 Amp/m
Hy = 4,693e+004 Amp/m
mu_x = 1,000e+000 (relative)
mu_y = 1,000e+000 (relative)
E = 1,384e+003 Joules/m³
J = 0,000e+000 MA/m²

For Help, press F1





결과정리(1)-실제 측정



1) 공극길이 6 mm

	1회		2회		3회		평균	
	자속밀도	흡인력	자속밀도	흡인력	자속밀도	흡인력	자속밀도	흡인력
1.4[A]								
1.2[A]								
1.0[A]								
0.8[A]								
0.7[A]								





결과정리(2)-시뮬레이션



1) 공극길이 3 mm, 6 mm, 12 mm

	1회		2회		3회		평균	
	자속밀도	흡인력	자속밀도	흡인력	자속밀도	흡인력	자속밀도	흡인력
1.4[A]								
1.2[A]								
1.0[A]								
0.8[A]								
0.7[A]								

❖ 서로 다른 Air-Gap으로 시뮬레이션 수행





검토사항



- ❖ 이론에서 보여준 기본적인 수식관례를 바탕으로 본 실험에서의 이론적인 자속밀도 값과 흡인력을 계산해 본다.
- ❖ 전류의 크기와 공극 길이에 따른 전자력과 자속밀도의 관계가 이론에 보여준 수식 관계와 잘 일치하는가? 잘 일치하지 않았다면 그 이유는 무엇인가?
- ❖ 시뮬레이션 값/ 실제값을 비교해본다.





Theory (자기장으로부터 힘 구하기)

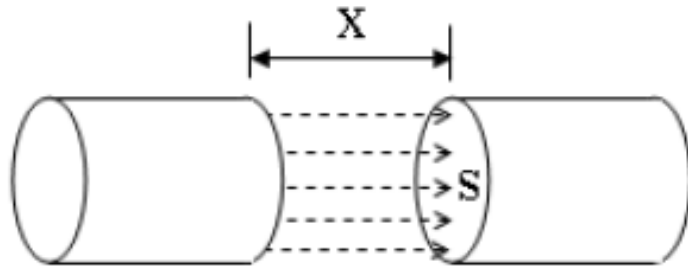


그림 1. 평행 강자성체

그림 1과 같은 평행 강자성체면간의 흡인력은 다음과 같이 구해질 수 있다.
공극(air gap)의 자기저항(reluctance)은 다음과 같고,

$$R = \frac{x}{\mu S} = \frac{1}{P} \quad x : \text{공극의 길이}, S : \text{강자성체의 단면적}, \mu : 4\pi \times 10^{-7} \left[\frac{\text{Wb}}{\text{AT} \cdot \text{m}} \right]$$

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{\mu S}{x^2} \quad F = \frac{1}{2} U^2 \frac{dP}{dx} = -\frac{1}{2} U^2 \frac{\mu S}{x^2} = -\frac{1}{2} B_g^2 \frac{S}{\mu}$$

위 식에서 공극 자속 밀도(air gap flux density)는 다음과 같이 구해질 수 있고

$$B_g = \frac{U}{x} \mu$$

따라서 평행 강자성체면간의 흡인력은 다음과 같다.

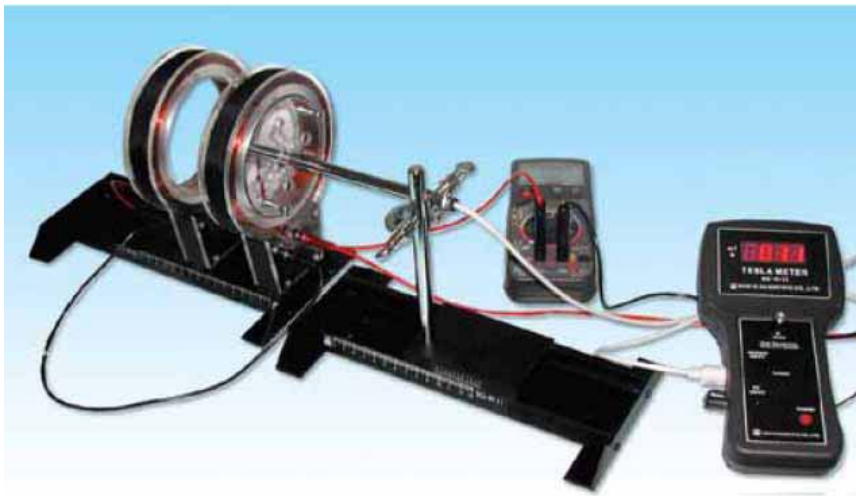
$$F = -\frac{10^7}{8\pi} B_g^2 S \text{ [N]} \quad F = \frac{1}{2} I^2 \frac{\partial L(x)}{\partial x} \text{ [N]} \quad \text{where } L = \frac{N^2}{R}$$



헬름홀츠 코일 실험 (Helmholtz Coil System)

1. 목적

두 코일의 거리를 변화 시키며 코일 내의 자기장을 테슬라 메타로 측정하여 헬름홀츠 코일의 배치 (D=R) 원리를 이해하고 코일내의 자기장의 공간적인 분포를 이해한다.



2. 기본 원리

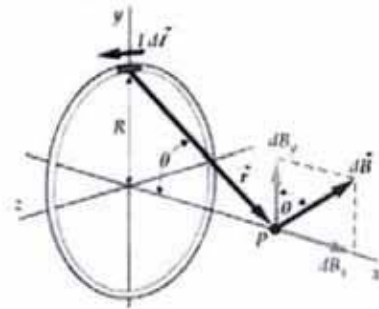


그림 1. 원형 도선에서의 자기장

반경 R의 원형도선에 전류 I가 흐를 때, 중심 축의 임의의 점 P에서 자기장의 세기 B를 계산해 보자. 도선 요소 dl에 의한 벡터 dB는 비오-사바르의 법칙에 의해

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \times r}{r^3} \quad (1)$$

이고, 벡터 dl 과 r 은 수직이므로

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \sin 90}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2} \quad (2)$$

이다. 벡터 dB 는 dB_x 와 dB_y 성분으로 나눌 수 있고 dB_y 성분은 대칭성으로부터 환선 전체에 대해 합하면 0이 될 것이다. 따라서 x 축 방향의 성분만 고려하면 $B = \int dB_x = \int dB \sin \theta$ 이다. 그러므로 이식에 위의 식 dB 를 대입하고 $\sin \theta = R/r$ 을 대입하면 도선의 x 축 방향으로 일정거리 x 만큼의 거리에서 자기장 값은 다음과 같다.

$$B(x) = \frac{\mu_0 IR^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} \quad (3)$$

여기서 μ_0 는 진공의 투자율이고 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [\text{Wb/m}^2]$ 이다.

감은 수가 N 번 감긴 코일의 경우 구조적인 형태를 무시하고 근사적으로 계산하면 식 (3)에 N 을 곱함으로써 얻을 수 있다. 즉 다음과 같이 주어진다.

$$B(x) = \frac{Ng\mu_0 IR^2}{2(R^2 + x^2)^{3/2}} \quad (4)$$

감은 수가 같고 반경 R 이 같은 코일이 x 축 상에 그림 에서와 같이 거리 a 만큼 떨어져 있다면 그때의 코일 내부 공간에서의 자기장의 세기는 다음과 같다.

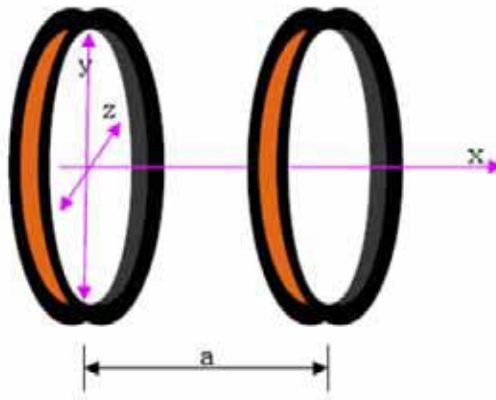


그림. 2 두 코일의 배치

$$B(x) = \frac{Ng\mu_0 IR^2}{2} \left[\frac{1}{(R^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{1}{(R^2 + (a-x)^2)^{3/2}} \right] \quad (5)$$

두 코일 중심 지점에서의 자기장은

$$B\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{Ng\mu_0 IR^2}{2} \left[\frac{1}{(R^2 + (\frac{a}{2})^2)^{3/2}} + \frac{1}{(R^2 + (a - \frac{a}{2})^2)^{3/2}} \right] = Ng\mu_0 IR^2 \frac{1}{(R^2 + (\frac{a}{2})^2)^{3/2}} \quad (6)$$

이 된다.

그림에서 보는 것과 같이 두 코일의 거리가 코일에 반경 R 과 같은 거리에 배치되어 있으면 코일

중심에 넓은 영역에 일정한 자기장이 형성되는데 이러한 코일배치를 헬름홀츠 코일이라 하고 코일 중심에서의 자기장은 다음과 같다.

$$B = \frac{NI\mu_0}{R} g \frac{8}{5^{1.5}} \quad (7)$$

헬름홀츠 코일은 솔레노이드와 비교하면 같은 권선수와 같은 전류에 대하여 낮은 자기장이 생성된다. 그러나 일반적으로 솔레노이드보다는 넓은 범위에서 균일한 자기장이 생성된다. 따라서 낮고 넓은 공간 범위에서의 균일한 자기장을 생성하고자 할 경우 유용하다.

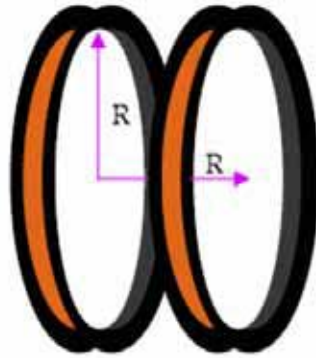


그림 4. 헬름홀츠 코일의 배치

본 실험에 쓰이는 규격을 정리하면 다음과 같다.

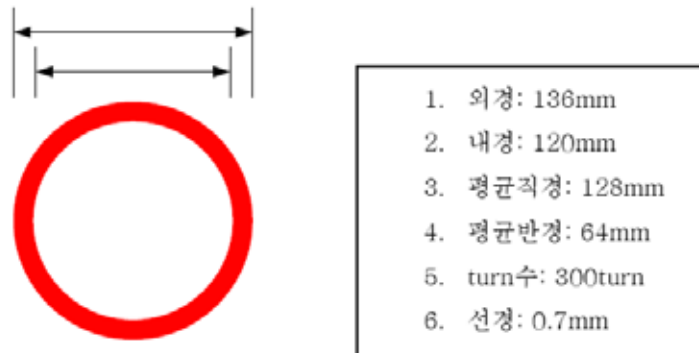


그림 5. 헬름홀츠 코일의 규격

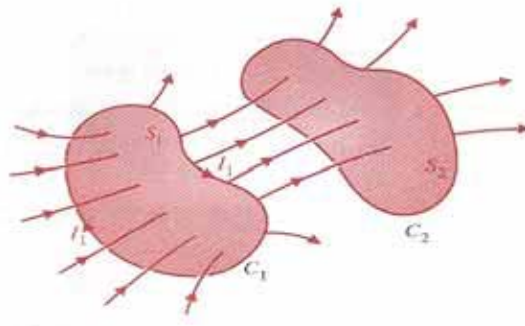


그림 6. 자기적으로 연결된 두 개의 loop

두개의 이웃한 폐루프를 가정하자. 전류 I_1 이 폐 루프 C_1 에 흐르게 되면 자기장 B_1 이 형성되게 된다. B_1 에 의한 자속(magnetic flux) 중 일부는 C_2 에 쇄교하게 되고 따라서 상호 자속 Φ_{12} 을 정의할 수 있다.

$$\Phi_{12} = \int_{S_2} B_1 \cdot ds_2 \quad (8)$$

비오-사바르의 법칙으로부터 B_1 은 직접적으로 I_1 에 비례한다는 것을 알 수 있고 따라서 우리는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\Phi_{12} = L_{12}I_1 \quad (9)$$

여기서 비례 상수 L_{12} 를 상호 인덕턴스 (mutual-inductance) 라고 정의한다. 그리고 쇄교 자속 λ_{12} 는 다음과 같고

$$\lambda_{12} = N_2\Phi_{12} \quad (10)$$

위의 식(9)는 다음과 같이 일반화될 수 있다.

$$\lambda_{12} = L_{12}I_1 \quad (11)$$

$$L_{12} = \frac{\lambda_{12}}{I_1} \quad (12)$$

한편 B_1 에 의한 자속(magnetic flux) 중 일부는 C_1 에 쇄교하게 되는데, 이에 따른 전체 쇄교 자속 λ_{11} 을 다음과 같이 생각할 수 있다.

$$\lambda_{11} = N_1\Phi_{11} \quad (13)$$

그리고 폐 루프 C_1 의 자기 인덕턴스 (self-inductance)는 “단위 전류 당 쇄교자속의 수” 로 정의 될 수 있다.

$$L_{11} = \frac{\lambda_{11}}{I_1} \quad (14)$$

3. 실험 방법

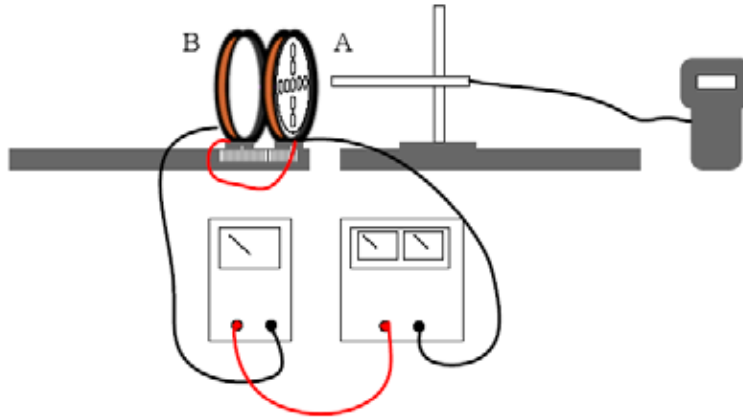


그림 7. 헬름홀츠 코일 실험

3.1 코일의 거리변화 따른 자기장의 변화

- 1) 그림 7.과 같이 설치한다.
- 2) 측정용 좌표를 코일에 끼우고 코일의 간격을 반경(64[mm])의 절반(32[mm])에 배치시킨다. (코일상단에 지시 표시와 좌표의 y축을 일치시킨다.)
- 3) 테슬라 메타와 축 방향 센서를 그림 6.과 같이 설치하고 센서이동 트랙을 120[mm]에 맞추고 센서가 코일A의 중앙 (코일의 두께는 아크릴을 포함 30[mm]이므로 센서가 15[mm] 정도 들어가면 된다.)에 오게 맞추고 센서 이동 트랙의 눈금을 170[mm](코일 A 중심에서 50[mm])로 밀어 측정 준비한다.
- 4) 테슬라 메타의 전원을 키고 범위조정 스위치를 이용하여 측정범위를 20[mT] 로 설정하고 영점 조절 다이얼을 이용하여 영점을 잡는다.
- 5) 직류 전원 장치를 조정하여 도선에 일정 전류(200[mA] 정도)를 흐르게 하고 그때의 전류 값을 기록한다.
- 6) 테슬라 메타를 이용하여 10[mm] 간격으로 센서를 이동시켜 그때의 자기장 값을 기록한다. (이때 두 코일의 중심(센서 트랙 눈금 104[mm])값도 함께 측정해 기록한다.
- 7) 3회 이상 반복하여 평균값을 구한다.
- 8) 기록된 값들을 이용하여 그래프를 그리고 앞서 제시된 그래프와 비교한다.
- 9) 코일중심에서의 자기장 값과 식 6에 의한 값과 비교하여 이론 값과 실험 값을 비교한다.
- 10) 코일의 간격을 반경(64[mm])만큼 벌린다.
- 11) 센서이동 트랙을 140[mm]에 맞추고 센서가 코일A의 중앙 (코일의 두께는 아크릴을 포함

30[mm]이므로 센서가 15[mm] 정도 들어가면 된다.)에 오게 맞추고 센서 이동 트랙의 눈금을 170[mm](코일 A 중심에서 30[mm])로 밀어 측정 준비한다. 3)~9)를 반복한다.

12) 코일의 간격을 반경의 1.5배(96[mm])만큼 벌린다.

13) 센서 이동 트랙을 150[mm]에 맞추고 센서가 코일A의 중앙(코일의 두께는 아크릴을 포함 30[mm]이므로 센서가 15[mm] 정도 들어가면 된다.)에 오게 맞추고 센서 이동 트랙의 눈금을 170[mm](코일 A 중심에서 20[mm])로 밀어 측정 준비한다. 3)~9)과정을 반복한다.

14) 측정된 그래프를 비교하여 가장 넓은 공간에 균일한 자기장이 분포하는 코일거리를 알아내 어라.

3.2 전류변화에 따른 자기장 변화

1) 그림 7 와 같이 설치한다.

2) 측정용 좌표를 코일에 끼우고 코일의 간격을 반경(64[mm]) 만큼 배치 시킨다. (코일 하단에 지시표시와 좌표의 y축을 일치시킨다.)

3) 코일 중앙에 센서를 위치시킨다. (측정좌표 중앙 Hall, 코일 A 중심에서 B쪽으로 32[mm])

4) 테슬라 메타의 전원을 키고 범위를 20[mT] 에 맞추고 영점조절 다이얼을 돌려 영점을 잡는다.

5) 직류 전원 장치의 전압을 올려 전류를 20[mA] 에 맞추고 그때의 자기장 값을 기록한다. 전류를 20[mA]씩 올리면서 140[mA]까지 측정하여라

6) 측정된 자기장 값을 식 7에 의한 이론 값과 비교한다.

3.3 전류 변화에 따른 인덕턴스 측정

1) 그림 7와 같이 설치한다.

2) 측정용 좌표를 코일에 끼우고 코일의 간격을 반경(64[mm])과 같게 배치시킨다.

3) 테슬라 메타의 전원을 키고 범위조정 스위치를 이용하여 측정범위를 20[mT] 로 설정하고 영점 조절 다이얼을 이용하여 영점을 잡는다.

4) 직류 전원 장치를 이용해 코일 A에 전류를 인가한다.

5) 전압을 올려 전류를 20[mA] 에 맞추고 코일 A의 중심부에서 테슬라 메타를 이용해 자속밀도를 측정한다. 전류를 20[mA]씩 올리면서 140[mA]까지 측정한다.

6) 같은 방법으로 코일 A에 전류를 인가한 후 전류를 변화시켜 가며 코일 B의 중심에서 자속밀도를 측정한다.

4. 결과 정리

1) 코일의 거리변화에 따른 자기장의 변화

(a) 두 코일의 거리가 코일반경의 절반($D=R/2=32[\text{mm}]$)

비고	1회		2회		3회		평균	
	측정거리	자기장	측정거리	자기장	측정거리	자기장	측정거리	자기장
	170		170		170		170	
	160		160		160		160	
	150		150		150		150	
	140		140		140		140	
	130		130		130		130	
coil A	120		120		120		120	
	110		110		110		110	
중점	104		104		104		104	
	100		100		100		100	
coil B	88		88		88		88	
	80		80		80		80	
	70		70		70		70	
	60		60		60		60	
	50		50		50		50	
	40		40		40		40	

전류: [mA]

두 코일 중심에서의 자기장 이론치: [mT] (식 6이용)

실험치: [mT]

오차율: %

(b) 두 코일의 거리가 코일반경($D=R=64[\text{mm}]$)

비고	1회		2회		3회		평균	
	측정거리	자기장	측정거리	자기장	측정거리	자기장	측정거리	자기장
	170		170		170		170	
	160		160		160		160	
	150		150		150		150	
coil A	140		140		140		140	
	130		130		130		130	
	120		120		120		120	
	110		110		110		110	
중점	108		108		108		108	
	100		100		100		100	
	90		90		90		90	
	80		80		80		80	
coil B	76		76		76		76	
	60		60		60		60	
	50		50		50		50	
	40		40		40		40	

학번	이름	실험2(100)	실험3(100)	실험4(100)	실험5(100)	실험6(100)
2000-14223	류준환	79	65	77	45	80
2001-12268	김우준	0	20	10	0	90
2001-12355	윤서영	100	85	71	94	82
2002-11651	강수민	89	30	67	88	73
2002-11709	김근하	92	65	52	95	89
2002-11749	김상범	92	40	98	98	92
2002-11851	김태호	100	100	83	91	80
2003-11954	김의현	90	85	73	95	80
2003-12035	안석기	84	45	55	92	89
2003-12036	안정호	84	35	43	89	40
2003-12038	안혁	68	40	35	84	80
2003-12042	염장헌	84	25	35	93	80
2004-11918	김영현	84	30	70	89	86
2004-11934	김진규	85	100	86	92	90
2004-11943	김판석	87	35	67	94	92
2004-11975	박진홍	84	55	67	92	75
2004-11992	송인욱	0	0	0	0	0
2004-12017	우경재	90	80	60	94	82
2004-12027	윤종순	95	90	60	93	61
2004-12055	이우영	97	85	65	92	90
2004-12063	이중현	85	55	58	94	96
2004-12096	주민수	93	90	55	93	82
2004-12125	한승호	95	70	63	94	87
2005-11695	김경현	95	85	55	94	81
2005-11715	김승용	100	90	73	99	80
2005-11718	김윤수	92	85	53	93	90
2005-11724	김정기	92	40	67	96	90
2005-11758	박민우	100	90	73	96	82
2005-11819	이광희	87	35	76	91	80
2005-11865	정민철	84	45	50	89	80
2005-11868	정상훈	97	45	70	89	86
2005-11874	조창민	100	85	55	94	55
2005-11876	지균철	92	100	60	93	94
2005-11878	채경훈	81	20	78	90	24
2005-11891	최형우	94	90	64	91	80
2005-11905	황영석	92	90	70	96	92
2005-11908	황인환	97	60	53	95	78
2006-11728	김지수	90	30	50	94	88
2006-11747	문영식	97	85	78	89	82
2006-11768	배우람	89	85	80	93	86
2006-11804	유승용	100	80	67	93	82
2006-11829	이재국	94	85	67	97	72

2006-12104	장승규	100	80	73	97	92
2006-15630	유장현	15	15	10	7	0
2007-11638	고휘석	97	85	98	90	76
2007-11641	권보준	92	80	73	96	86
2007-11642	권용원	84	100	68	92	74
2007-11644	길태호	94	60	71	92	84
2007-11648	김동권	97	85	85	97	94
2007-11650	김동수	97	90	85	96	82
2007-11653	김병헌	89	85	93	93	86
2007-11658	김수지	84	90	83	88	69
2007-11659	김영찬	92	80	61	95	84
2007-11660	김영휴	89	80	60	96	63
2007-11662	김우열	100	90	71	94	70
2007-11664	김윤직	100	85	60	100	85
2007-11669	김종호	94	75	65	94	78
2007-11670	김준석	84	65	45	93	82
2007-11672	김지윤	87	85	85	97	80
2007-11674	김채빈	94	45	62	92	74
2007-11677	김태훈	94	90	90	96	86
2007-11678	김한별	89	60	63	92	60
2007-11685	노관우	92	65	77	90	90
2007-11689	박경환	97	55	57	92	78
2007-11690	박기태	95	50	82	95	70
2007-11691	박동진	94	80	95	94	77
2007-11693	박민수	89	55	70	95	94
2007-11704	박홍종	86	75	47	80	56
2007-11705	박희천	94	90	96	94	80
2007-11711	변성호	97	80	93	96	94
2007-11716	선영석	89	70	76	91	80
2007-11721	송기윤	93	85	58	94	96
2007-11723	송승근	91	70	60	96	96
2007-11725	신다영	92	55	55	92	66
2007-11726	신보경	97	85	95	93	80
2007-11727	신상민	100	70	70	95	84
2007-11728	신성욱	94	75	78	92	91
2007-11729	신인모	92	45	83	94	92
2007-11732	안병용	100	75	73	94	82
2007-11734	안보영	92	55	63	92	76
2007-11735	안준영	91	80	55	88	74
2007-11746	오형석	84	80	80	90	78
2007-11753	유의상	97	80	92	95	94
2007-11756	윤용호	87	100	85	96	76
2007-11763	이득영	89	75	87	96	90

2007-11767	이민재	0	0	0	0	0
2007-11776	이영문	97	90	90	95	78
2007-11784	이재면	92	90	80	94	78
2007-11789	이주형	93	75	60	94	92
2007-11791	이준행	84	55	65	91	74
2007-11800	이태재	86	75	65	91	82
2007-11803	이흥민	88	75	67	94	100
2007-11806	임정우	0	0	0	0	0
2007-11808	전기연	89	90	78	93	94
2007-11810	정다원	89	50	52	93	90
2007-11812	정동석	90	90	8	81	58
2007-11815	정서빈	92	90	98	93	88
2007-11817	정은지	97	90	80	93	82
2007-11818	정재웅	92	90	73	90	92
2007-11821	조경훈	94	75	80	99	76
2007-11824	조성룡	92	85	63	93	82
2007-11825	조승훈	87	55	52	94	84
2007-11830	차영택	97	90	88	93	92
2007-11837	최윤주	92	55	84	92	76
2007-11840	최혁준	86	50	67	97	84
2007-11844	한상범	81	45	47	88	58
2007-11845	한승주	97	85	60	90	72
2007-11846	한아름	86	80	60	94	77
2007-11847	한용수	87	85	87	93	82
2007-11849	한정민	92	75	83	92	78
2007-11853	홍상현	77	55	78	94	68

평균

87.3893805 68.7610619 66.433628 88.486726 77.8230088

시험7(100)	총합(600)	환산점수(25)
80	426	17.75
97	217	9.04
100	532	22.17
80	427	17.79
100	493	20.54
90	510	21.25
80	534	22.25
80	503	20.96
78	443	18.46
90	381	15.88
77	384	16.00
80	397	16.54
88	447	18.63
80	533	22.21
80	455	18.96
80	453	18.88
0	0	0.00
90	496	20.67
90	489	20.38
80	509	21.21
80	468	19.50
90	503	20.96
80	489	20.38
90	500	20.83
90	532	22.17
90	503	20.96
80	465	19.38
80	521	21.71
80	449	18.71
80	428	17.83
80	467	19.46
80	469	19.54
90	529	22.04
60	353	14.71
90	509	21.21
80	520	21.67
90	473	19.71
90	442	18.42
80	511	21.29
77	510	21.25
80	502	20.92
80	495	20.63

80	522	21.75
60	107	4.46
100	546	22.75
77	504	21.00
90	508	21.17
75	476	19.83
100	558	23.25
80	530	22.08
75	521	21.71
80	494	20.58
90	502	20.92
100	488	20.33
77	502	20.92
90	520	21.67
75	481	20.04
70	439	18.29
80	514	21.42
80	447	18.63
80	536	22.33
80	444	18.50
75	489	20.38
90	469	19.54
90	482	20.08
75	515	21.46
77	480	20.00
80	424	17.67
90	544	22.67
80	540	22.50
80	486	20.25
80	506	21.08
90	503	20.96
90	450	18.75
80	530	22.08
90	509	21.21
80	510	21.25
90	496	20.67
90	514	21.42
90	468	19.50
80	468	19.50
100	512	21.33
80	538	22.42
90	534	22.25
80	517	21.54

0	0	0.00
90	540	22.50
80	514	21.42
100	514	21.42
100	469	19.54
93	492	20.50
80	504	21.00
0	0	0.00
90	534	22.25
87	461	19.21
80	407	16.96
80	541	22.54
90	532	22.17
78	515	21.46
77	501	20.88
85	500	20.83
100	472	19.67
80	540	22.50
80	479	19.96
90	474	19.75
80	399	16.63
80	484	20.17
77	474	19.75
90	524	21.83
80	500	20.83
90	462	19.25

81.920354 470.81416 19.61725664