Engineering Mathematics II

Prof. Dr. Yong-Su Na

(32-206, Tel. 880-7204)

Text book: Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 9th Edition, Wiley (2006)

Ch. 9 Vector Differential Calculus. Grad, Div, Curl

9.1 Vectors in 2-Space and 3-Space

9.2 Inner Product (Dot Product)

9.3 Vector Product (Cross Product)

9.4 Vector and Scalar Functions and Fields. Derivatives

9.5 Curves. Arc Length. Curvature. Torsion

9.6 Calculus Review: Functions of Several Variables

9.7 Gradients of a Scalar Field. Directional Derivative

9.8 Divergence of a Vector Field

9.9 Curl of a Vector Field

Ch. 9 Vector Differential Calculus. Grad, Div, Curl

9.1 Vectors in 2-Space and 3-Space

9.2 Inner Product (Dot Product)

9.3 Vector Product (Cross Product)

9.4 Vector and Scalar Functions and Fields. Derivatives

9.5 Curves. Arc Length. Curvature. Torsion

9.6 Calculus Review: Functions of Several Variables

9.7 Gradients of a Scalar Field. Directional Derivative

9.8 Divergence of a Vector Field

9.9 Curl of a Vector Field

9.2 Inner Product (Dot Product) (내적 (점곱))

▪ **벡터의 내적 a•b**

두 벡터의 **내적**(Inner Product)또는 **점곱**(Dot Product)은 두 벡터의 길이와 두 벡터가 이루는 사잇각의 코사인 값의 곱.

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \begin{cases} |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\gamma & (\mathbf{a} \neq \mathbf{0},\ \mathbf{b} \neq \mathbf{0}) \\ 0 & (\mathbf{a} = \mathbf{0} \text{ or } \mathbf{b} = \mathbf{0}) \end{cases}$$

• 성분에 의한 내적의 표기

$$\mathbf{a} = [a_1,\ a_2,\ a_3],\ \mathbf{b} = [b_1,\ b_2,\ b_3] \quad \rightarrow \quad \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

• **a•b**=0 → 벡터 **a**와 벡터 **b**는 직교(Orthogonal) → **a**와 **b**는 직교벡터

• 영벡터는 모든 벡터에 직교

9.2 Inner Product (Dot Product) (내적 (점곱))

- **직교성**

영벡터가 아닌 두 벡터 내적이 영이 될 필요충분조건은 두 벡터가 서로 직교하는 것.

- **길이와 각도**

- $\mathbf{a} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \gamma = 0^\circ \quad \rightarrow \quad \mathbf{a} \bullet \mathbf{a} = |\mathbf{a}||\mathbf{a}|\cos 0^\circ = |\mathbf{a}|^2 \quad \rightarrow \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \bullet \mathbf{a}}$
- $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\gamma \quad \rightarrow \quad \cos\gamma = \dfrac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \dfrac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}{\sqrt{\mathbf{a} \bullet \mathbf{a}}\sqrt{\mathbf{b} \bullet \mathbf{b}}}$

Example 1

9.2 Inner Product (Dot Product) (내적 (점곱))

▪ **내적의 일반적 성질**

임의의 벡터 **a**, **b**, **c**와 스칼라(실수) q_1, q_2에 대하여

1. $[q_1\mathbf{a} + q_2\mathbf{b}] \bullet \mathbf{c} = q_1\mathbf{a} \bullet \mathbf{c} + q_2\mathbf{b} \bullet \mathbf{c}$ — Linearity (선형성)
2. $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \mathbf{b} \bullet \mathbf{a}$ — Symmetry (대칭성)
3. $\begin{cases} \mathbf{a} \bullet \mathbf{a} \geq 0 & \\ \mathbf{a} \bullet \mathbf{a} = 0 & (\mathbf{a} = \mathbf{0}) \end{cases}$ — Positive-definiteness (양의 성질)
4. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \bullet \mathbf{c} = \mathbf{a} \bullet \mathbf{c} + \mathbf{b} \bullet \mathbf{c}$ — Distributivity (분배법칙)
5. $|\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ — **Cauchy-Schwarz inequality**
6. $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ — **Triangle inequality (삼각부등식)**
7. $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 2\left(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2\right)$ — **Parallelogram equality (평행사변형 등식)**

9.2 Inner Product (Dot Product) (내적 (점곱))

PROBLEM SET 9.2

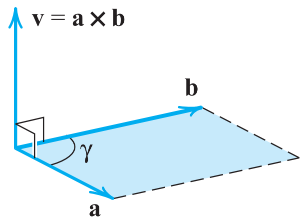
HW: 4, 5, 22, 34, 41, 42 (e), (f)

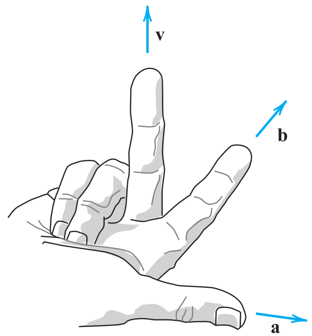
9.3 Vector Product (Cross Product) (외적 (벡터곱))

● 벡터의 외적 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$

- $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$가 같은 방향 또는 반대 방향이거나,두 벡터 중 하나가 영벡터 : $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}$
- 그 이외의 경우

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{cases} \text{크기} : |\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\gamma \\ \text{방향} : \text{오른손 법칙에 의하여 결정(} \mathbf{a},\mathbf{b}\text{와 동시에 수직인 벡터)} \end{cases}$$





❖ 성분에 의한 내적의 표기

$$\mathbf{a}=[a_1,\ a_2,\ a_3],\ \mathbf{b}=[b_1,\ b_2,\ b_3] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = [a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1]$$

Example 1, 2

9.3 Vector Product (Cross Product) (외적 (벡터곱))

- 벡터곱의 일반 성질

1. $(l\mathbf{a})\times\mathbf{b} = l(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{a}\times(l\mathbf{b})$

2. $(a)\ \mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b}) + (\mathbf{a}\times\mathbf{c})$
   $(b)\ (\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c} = (\mathbf{a}\times\mathbf{c}) + (\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ (분배법칙을 만족) **Prove!**

3. $\mathbf{b}\times\mathbf{a} = -(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ (교환법칙을 만족하지 않고 반교환법칙(Anticommutative)을 만족)

4. $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \neq (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ (결합법칙을 만족하지 않음)

Vector product의 적용: Example 3, 5

9.3 Vector Product (Cross Product) (외적 (벡터곱))

● 스칼라 삼중적

세 벡터 $\mathbf{a}=[a_1,\ a_2,\ a_3]$, $\mathbf{b}=[b_1,\ b_2,\ b_3]$, $\mathbf{c}=[c_1,\ c_2,\ c_3]$의 스칼라 삼중적(Scalar Triple Product)

$$: \quad (\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}) = \mathbf{a}\bullet(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Prove!

● 삼중적의 성질과 응용

- 내적연산과 외적연산을 서로 바꾸어도 불변이다.

$$(\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}) = \mathbf{a}\bullet(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\bullet\mathbf{c}$$

Prove!

- 기하학적 해석(Geometric Interpretation)

절대값 $|(\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c})|$는 벡터 **a, b, c**에 의하여 결정되는 평행육면체의 체적이다. **Prove!**

- 일차독립성(Linear Independence)

R^3공간상의 세 벡터가 일차독립일 필요충분조건은 이 벡터들의 스칼라 삼중적이

영이 아닌것이다.

9.3 Vector Product (Cross Product) (외적 (벡터곱))

PROBLEM SET 9.3

HW: 8, 24 (13), (15), 34, 36, 40

9.4 Vector and Scalar Functions and Fields. Derivatives (벡터 및 스칼라함수와 장. 도함수)

- 임의의 점 P에서의 **벡터함수**(Vector Function) : $\mathbf{v} = \mathbf{v}(P) = [v_1(P),\ v_2(P),\ v_3(P)]$
- 임의의 점 P에서의 스칼라함수(Scalar Function) : $f = f(P)$
- 함수의 정의역 ⇒ 공간내의 영역: 3차원 공간, 곡면, 곡선
- **벡터장**(Vector Field) ⇒ 주어진 영역에서의 벡터함수: 곡면, 곡선
- **스칼라장**(Scalar Field) ⇒ 주어진 영역에서의 스칼라함수: 온도장, 기압장
- 벡터함수와 스칼라함수의 기호 표기

$$\mathbf{v}(x,\ y,\ z) = [v_1(x,\ y,\ z),\ v_2(x,\ y,\ z),\ v_3(x,\ y,\ z)]$$

9.4 Vector and Scalar Functions and Fields. Derivatives (벡터 및 스칼라함수와 장. 도함수)

- 수렴(Convergence)
  - 벡터열 $\mathbf{a}_{(n)}$은 수렴(Converge)한다

    : 무한수열 $\mathbf{a}_{(n)}, n=1, 2, \cdots$에 대하여 한 벡터 $\mathbf{a}$가 존재하여 $\lim_{n\to\infty}\left|\mathbf{a}_{(n)}-\mathbf{a}\right|=0$이 성립할때

    극한벡터(Limit Vector) : $\mathbf{a}=\lim_{n\to\infty}\mathbf{a}_{(n)}$
  - $\lim_{t\to t_0}\mathbf{v}(t)=\mathbf{l}$ (벡터함수 $\mathbf{v}(t)$는 t가 t_0로 접근할 때 극한 $\mathbf{l}$을 갖는다.)

    $\Leftrightarrow$ t_0부근(t_0는 제외되어도 무방함)에서 정의된 실변수 t의 벡터함수 $\mathbf{v}(t)$에 대하여

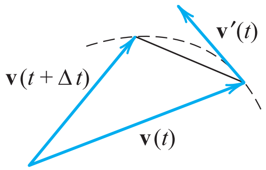
    $\lim_{t\to t_0}\left|\mathbf{v}(t)-\mathbf{l}\right|=0$이 성립
- 연속성
  - 벡터함수 $\mathbf{v}(t)$는 $t=t_0$에서 연속(Continuous)이다

    $\Leftrightarrow$ $\mathbf{v}(t)$가 t_0부근(t_0자신을 포함하여도 무방함)에서 정의되고 $\lim_{t\to t_0}\mathbf{v}(t)=\mathbf{v}(t_0)$을 만족
  - $\mathbf{v}(t)=[v_1(t),\ v_2(t),\ v_3(t)]$가 t_0에서 연속 $\Leftrightarrow$ 성분함수 $v_1(t),\ v_2(t),\ v_3(t)$가 t_0에서 연속

9.4 Vector and Scalar Functions and Fields. Derivatives (벡터 및 스칼라함수와 장. 도함수)

- 벡터함수의 도함수

벡터함수 $\mathbf{v}(t)$가 t에서 미분가능(Differentiable) $\Leftrightarrow$ $\mathbf{v}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}$ 가 수렴



$\mathbf{v}'(t) = [v_1'(t),\ v_2'(t),\ v_3'(t)]$: $\mathbf{v}(t) = [v_1(t),\ v_2(t),\ v_3(t)]$의 도함수

- 벡터미분공식

1. $(c\mathbf{v})' = c\mathbf{v}'$ (c는 상수)

2. $(\mathbf{u} + \mathbf{v})' = \mathbf{u}' + \mathbf{v}'$

3. $(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \bullet \mathbf{v} + \mathbf{u} \bullet \mathbf{v}'$

4. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}'$

5. $(\mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ \ \mathbf{w})' = (\mathbf{u}'\ \ \mathbf{v}\ \ \mathbf{w}) + (\mathbf{u}\ \ \mathbf{v}'\ \ \mathbf{w}) + (\mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ \ \mathbf{w}')$

9.4 Vector and Scalar Functions and Fields. Derivatives (벡터 및 스칼라함수와 장. 도함수)

- 벡터함수의 편도함수

$$\mathbf{v} = [v_1,\ v_2,\ v_3] = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t_l} = \frac{\partial v_1}{\partial t_l}\mathbf{i} + \frac{\partial v_2}{\partial t_l}\mathbf{j} + \frac{\partial v_3}{\partial t_l}\mathbf{k}, \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t_l \partial t_m} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial t_l \partial t_m}\mathbf{i} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial t_l \partial t_m}\mathbf{j} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial t_l \partial t_m}\mathbf{k}$$

9.4 Vector and Scalar Functions and Fields. Derivatives (벡터 및 스칼라함수와 장. 도함수)

PROBLEM SET 9.4

HW: