Engineering Mathematics II

Prof. Dr. Yong-Su Na

(32-206, Tel. 880-7204)

Text book: Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 9th Edition, Wiley (2006)

Ch. 9 Vector Differential Calculus. Grad, Div, Curl

9.1 Vectors in 2-Space and 3-Space

9.2 Inner Product (Dot Product)

9.3 Vector Product (Cross Product)

9.4 Vector and Scalar Functions and Fields. Derivatives

9.5 Curves. Arc Length. Curvature. Torsion

9.6 Calculus Review: Functions of Several Variables

9.7 Gradients of a Scalar Field. Directional Derivative

9.8 Divergence of a Vector Field

9.9 Curl of a Vector Field

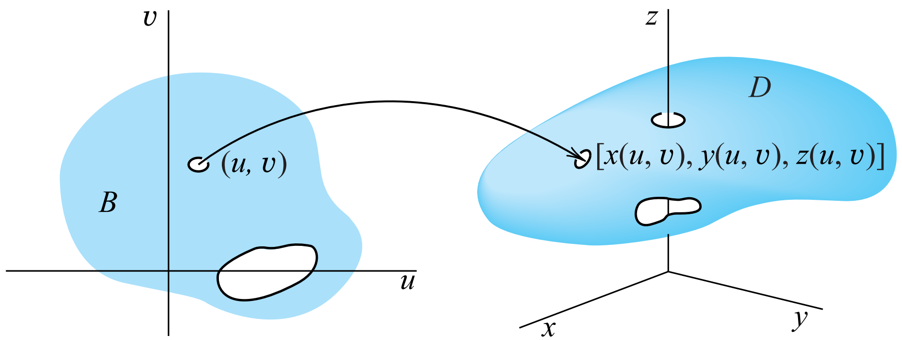
Ch. 9 Vector Differential Calculus. Grad, Div, Curl

9.6 Calculus Review: Functions of Several Variables. (미적분학의 복습: 다변수함수)

- Chain rules (연쇄법칙)

$$w = f\left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}, \qquad \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$



Example 1

Problem Set 7 풀기

9.6 Calculus Review: Functions of Several Variables. (미적분학의 복습: 다변수함수)

- 평균값의 정리(Mean Value Theorem)

함수 $f(x,y,z)$가 xyz공간 내의 정의역 D에서 연속이고, 연속인 1차 편도함수를갖는다.

두 점 $P_0:(x_0,y_0,z_0)$, $P:(x_0+h,y_0+k,z_0+l)$이 D에 속해 있고, 이 두 점을 연결한 선분

P_0P 또한 D에 속해 있다. 그러면 선분 P_0P상에 임의의 점에서 편미분값들은

$$f(x_0+h,y_0+k,z_0+l)-f(x_0,y_0,z_0)=h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}+l\frac{\partial f}{\partial z}$$

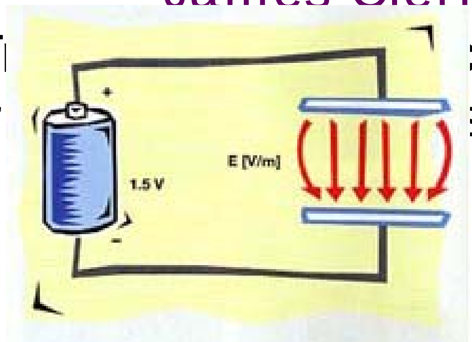
을 만족한다.

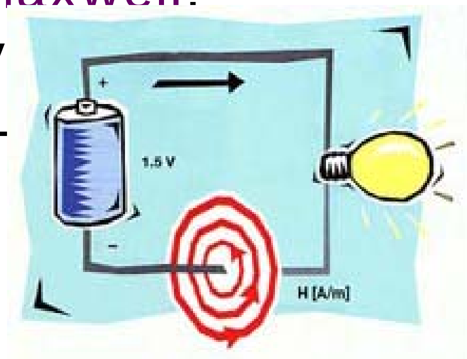
9.7 Gradients of a Scalar Field. Directional Derivative.
(스칼라장의 기울기. 방향도함수)

James Clerk Maxwell,

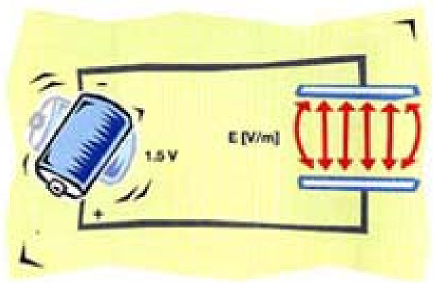
“A Tr … city

2 vols., Oxfor … s, L … ed., 1904





∂t



$\frac{\partial D}{\partial t}$

$$\nabla \cdot B = 0$$

9.7 Gradients of a Scalar Field. Directional Derivative. (스칼라장의 기울기. 방향도함수)

- Gradient (기울기) :

$f(x, y, z)$의 x, y, z 각 방향으로의 길이(거리)에 대한 변화율(기울기)의 벡터합

$$\text{grad } f = \nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right] = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

Example: $f(x, y, z)=2y^3+4xz+3x$

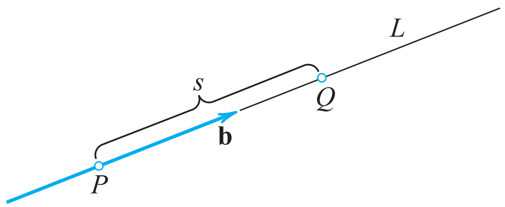
9.7 Gradients of a Scalar Field. Directional Derivative. (스칼라장의 기울기. 방향도함수)

- Gradient (기울기) :

- Rate of change of f(x, y, z) in any direction in space
- Direction of maximum increase
- Surface normal vector
- Deriving vector fields from scalar fields

9.7 Gradients of a Scalar Field. Directional Derivative. (스칼라장의 기울기. 방향도함수)

- Directional derivative (방향도함수)



$$D_{\mathbf{b}} f = \frac{df}{ds} = \lim_{s\to 0} \frac{f(Q) - f(P)}{s}$$

: 공간상의 P점에서의 벡터 $\mathbf{b}$방향으로의 함수 $f(x, y, z)$의 방향도함수

s는 P와 Q사이의 거리, Q는 $\mathbf{b}$방향으로의 직선 C의 경로

직선 L : $\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k} = \mathbf{p}_0 + s\mathbf{b}$ $\quad (|\mathbf{b}| = 1,\ \mathbf{p}_0$는 P의 위치$)$

$$D_{\mathbf{b}} f = \frac{df}{ds} = \frac{df}{dx}x' + \frac{df}{dy}y' + \frac{df}{dz}z' = \mathbf{b} \bullet \operatorname{grad} f$$

$$* \ D_{\mathbf{a}} f = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a} \bullet \operatorname{grad} f$$

Example 1

9.7 Gradients of a Scalar Field. Directional Derivative.
(스칼라장의 기울기. 방향도함수)

- 기울기의 특성. 최대증가

$f(P) = f(x, y, z)$: 연속인 1계 편도함수를 갖는 스칼라함수

$\Rightarrow$ grad f 가 존재. 크기와 방향은 공간에서 좌표계의 선택과는 무관

점 P에서 grad $f(P) \neq 0$ $\Rightarrow$ grad f 가 점 P에서 f의 최대증가 방향

$$* \; D_{\mathbf{a}} f = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \mathbf{a} \bullet \operatorname{grad} f$$

- 곡면의 법선벡터로서의 기울기

$f(x, y, z) = c =$ 상수 $\Rightarrow$ 공간상에서 임의의 곡면 S를 표시

S상의 점 P에서 grad $f(P) \neq 0$ $\Rightarrow$ grad f 가 점 P에서의 S의 법선벡터

9.7 Gradients of a Scalar Field. Directional Derivative. (스칼라장의 기울기. 방향도함수)

● 곡면의 법선벡터로서의 기울기

- f 의 **등위곡면**(Level Surface): $f(x,y,z)=c=$상수로 표현된 곡면 S

- 점 P에서 S의 **접평면**(Tandgent Plane)

  : S상의 임의의 점 P에서 P를 지나는 모든 곡선의 접선벡터들

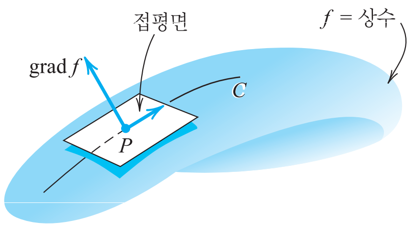
- P에서 S의 곡면법선(Surface Normal) : P에서 S의 접평면에 수직인 직선

- 곡면의 **법선벡터**(Surgace Normal Vector) : 곡면법선과 평행한 벡터

$$\frac{df}{dx}x'+\frac{df}{dy}y'+\frac{df}{dz}z'=\text{grad } f \bullet \mathbf{r}'=0$$

$\Rightarrow$ grad f 는 접평면상의 모든 벡터와 수직이며,

P에서 곡면 S의 법선벡터이다.



Example 2

9.7 Gradients of a Scalar Field. Directional Derivative. (스칼라장의 기울기. 방향도함수)

- 스칼라장의 기울기인 벡터장(퍼텐셜)

  $f(P)$를 $\mathbf{v}(P)$의 퍼텐셜함수(Potential) : $\mathbf{v}(P) = \text{grad}\, f(P)$

  $\mathbf{v}(P)$와 이에 해당되는 벡터장을 **보전적**(Conservative)이라 한다.

- 인력장. 라플라스 방정식 **Prove!**

  점 $P_0 : (x_0, y_0, z_0)$와 , $P : (x, y, z)$에 위치한 두 입자 사이의 인력은 (Newton의 만유인력법칙에 의하여)

$$\mathbf{p} = -\frac{c}{r^3}\mathbf{r} = -c\left[\frac{x-x_0}{r^3}, \frac{y-y_0}{r^3}, \frac{z-z_0}{r^3}\right]$$

로 표현되며, 퍼텐셜은 $f(x, y, z) = c/r$ 이다. 여기서 $r(>0)$은 두 점 P_0와 P 사이의 거리이다.

따라서 $\mathbf{p} = \text{grad}\, f = \text{grad}(c/r)$ 이 성립되며, 여기서 퍼텐셜 f 는 다음과 같은 라플라스 방정식을 만족한다.

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

9.7 Gradients of a Scalar Field. Directional Derivative. (스칼라장의 기울기. 방향도함수)

PROBLEM SET 9.7

HW: 23, 26, 40, 42

9.8 Divergence of a Vector Field (벡터장의 발산)

- Divergence (발산) :

- Source and sink

- Deriving scalar fields from vector fields

9.8 Divergence of a Vector Field (벡터장의 발산)

- 발산(Divergence)

  $\mathbf{v}(x, y, z)$: 미분가능한 벡터함수

  $\mathbf{v}$의 발산(Divergence) 또는 $\mathbf{v}$로 정의된 벡터장의 발산 : $\operatorname{div}\mathbf{v} = \dfrac{\partial v_1}{\partial x} + \dfrac{\partial v_2}{\partial y} + \dfrac{\partial v_3}{\partial z}$

- 발산의 불변성

  $\operatorname{div}\mathbf{v}$ 의 값은 좌표계의 선택에 상관없이 공간내의 $\mathbf{v}$ 상의 점에 따른다.

  $x^*,\ y^*,\ z^*$에 대응하는 $\mathbf{v}$ 의 성분이 $v_1^*,\ v_2^*, v_3^*$이면 $\operatorname{div}\mathbf{v} = \dfrac{\partial v_1^*}{\partial x^*} + \dfrac{\partial v_2^*}{\partial y^*} + \dfrac{\partial v_3^*}{\partial z^*}$

- $f(x, y, z)$: 두 번 미분가능한 스칼라함수

  $$\mathbf{v} = \operatorname{grad} f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right] \Rightarrow \operatorname{div}(\mathbf{v}) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \nabla^2 f$$

Example 1, 2

9.8 Divergence of a Vector Field (벡터장의 발산)

PROBLEM SET 9.8

HW: 8, 9, 10, 17

9.9 Curl of a Vector Field
(벡터장의 회전)

- Curl (회전) :

- Rotation

- Deriving vector fields from vector fields

9.9 Curl of a Vector Field (벡터장의 회전)

- 회전(Curl)

$\mathbf{v}(x, y, z)$: 미분가능한 벡터함수

$\mathbf{v}$의 회전(Curl) 즉, $\mathbf{v}$로 주어진 벡터장의 회전

$$: \operatorname{curl} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z} \right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x} \right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right)\mathbf{k}$$

Example 1, 2

- 회전체와 회전

강체 회전에 대한 벡터장의 회전은 회전축 방향과 같은 방향을 가지며, 그 크기는 각속력의 두 배가 된다.

9.9 Curl of a Vector Field
(벡터장의 회전)

- 기울기, 발산, 회전
  - 기울기장(Gradient Field)은 비회전(Irrotational)이다. 즉, $\operatorname{curl}(\operatorname{grad} f) = \mathbf{0}$ **Prove!**
  - 벡터함수의 회전에 대한 발산도 영벡터가 된다. $\operatorname{div}(\operatorname{curl} \mathbf{v}) = 0$ **Prove!**

- 회전의 불변성

curl $\mathbf{v}$는 벡터이며 방향과 크기는 공간에서 직교좌표계의 선택과 무관하다.

9.9 Curl of a Vector Field

(벡터장의 회전)

PROBLEM SET 9.9

HW: 10, 20

Gradient, Divergence, Curl of a Vector Field

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Faraday's law

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$$

Ampere's law

$$\nabla \cdot D = \rho$$

Gauss's law

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla V = -E$$