Engineering Mathematics II

Prof. Dr. Yong-Su Na

(32-206, Tel. 880-7204)

Text book: Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 9th Edition, Wiley (2006)

Ch. 10 Vector Integral Calculus. Integral Theorems

Ch. 10 Vector Integral Calculus. Integral Theorems

Ch. 10 Vector Integral Calculus. Integral Theorems (벡터적분법. 적분정리)

- 적분을 곡선(선적분), 면(면적분), 고체에 대한 적분으로 확장

  : 고체역학, 유체흐름, 열역학에서 공학적 기본 응용으로 활용

- 적분의 변환은 계산을 간단히 하거나, 유용한 일반적인 공식을 얻기 위해 수행

  예. 퍼텐셜 이론(Potential Theory)

- 적분변환 공식

  : Green의 공식, Gauss 공식, Stokes 공식

10.1 Line Integrals (선적분)

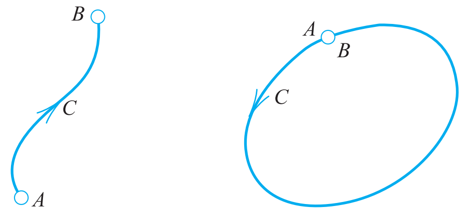
- 선적분의 개념: 미적분학에서 공부한 정적분의 간단한 일반화

- 선적분(Line Integral) 또는 곡선적분(Curve Integral)

  : 피적분함수(Integrand)를 공간(혹은 평면)내의 곡선을 따라 적분.

- 적분경로(Path of Integration) : 곡선

$$C:\mathbf{r}(t)=[x(t),\ y(t),\ z(t)]=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}\quad (a\le t\le b)$$



(a) (b)

❖ 일반적인 가정

  : 선적분의 모든 적분경로를 구분적으로 매끄럽다(Piecewise Smooth)

- 선적분의 정의와 계산

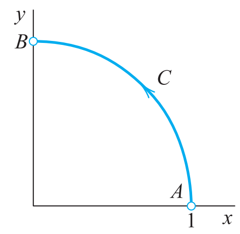
곡선 $C:\mathbf{r}(t)$에서 벡터함수$\mathbf{F}(\mathbf{r})$의 선적분 : $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\bullet d\mathbf{r}=\int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\bullet \mathbf{r}'(t)dt$ $\qquad \mathbf{r}'=\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\bullet d\mathbf{r}=\int_C (F_1dx+F_2dy+F_3dz)=\int_a^b (F_1x'+F_2y'+F_3z')dt$$

10.1 Line Integrals (선적분)

- Ex.1 평면에서 선적분의 계산

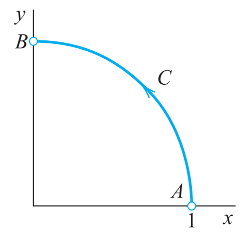
$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = [-y,\ -xy] = -y\mathbf{i} - xy\mathbf{j}$이고 C가 A에서 B까지의 원호일 때 선적분의 값을 구하라.



10.1 Line Integrals (선적분)

■ Ex.1 평면에서 선적분의 계산

$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = [-y,\ -xy] = -y\mathbf{i} - xy\mathbf{j}$이고 C가 A에서 B까지의 원호일 때 선적분의 값을 구하라.



C를 $\mathbf{r}(t) = [\cos t,\ \sin t] = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j},\ (0 \le t \le \pi/2)$로 표현

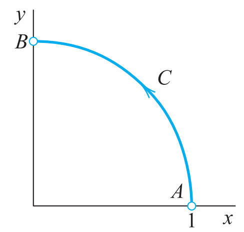
$\Rightarrow \quad x(t) = \cos t,\ \ y(t) = \sin t$

$\Rightarrow \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = -y(t)\mathbf{i} - x(t)y(t)\mathbf{j} = -\sin t\mathbf{i} - \cos t \sin t\mathbf{j}$

10.1 Line Integrals (선적분)

- Ex.1 평면에서 선적분의 계산

$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = [-y,\ -xy] = -y\mathbf{i} - xy\mathbf{j}$이고 C가 A에서 B까지의 원호일 때 선적분의 값을 구하라.



C를 $\mathbf{r}(t) = [\cos t,\ \sin t] = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j},\ (0 \le t \le \pi/2)$로 표현

$$\Rightarrow \quad x(t) = \cos t,\ \ y(t) = \sin t$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = -y(t)\mathbf{i} - x(t)y(t)\mathbf{j} = -\sin t\mathbf{i} - \cos t \sin t\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}'(t) = [-\sin t,\ \cos t] = -\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}$$

$$\Rightarrow \quad \int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} [-\sin t,\ -\cos t \sin t] \bullet [-\sin t,\ \cos t]\, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\sin^2 t - \cos^2 t \sin t\right) dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)\, dt - \int_1^0 u^2(-du) = \frac{\pi}{4} - 0 - \frac{1}{3} \approx 0.4521$$

Example 2

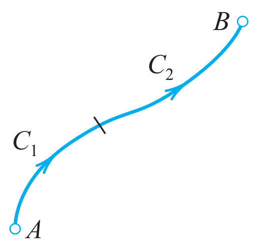
10.1 Line Integrals (선적분)

- 선적분의 일반적인 성질

$$\int_C k\mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = k\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} \qquad (k\text{는 상수})$$

$$\int_C (\mathbf{F} + \mathbf{G}) \bullet d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} + \int_C \mathbf{G} \bullet d\mathbf{r}$$

$$\int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$$



10.1 Line Integrals (선적분)

■ Ex.3 **변하는 힘에 의해 행하여진 일**

- 직선분 d를 따른 변위에서 일정한 힘 F에 의한 일 $W = F \bullet d$이다.
- 곡선 $C\!:\!\mathbf{r}(t)$를 따르는 변위에서 힘 F가 변할 때, 행해진 일 W는 C의 작은 현을 따른 변위에서 행해진 일의 합의 극한으로 정의할 수 있다.
- 선적분으로 W를 정하는 것과 같다.

10.1 Line Integrals (선적분)

■ Ex.3 변하는 힘에 의해 행하여진 일

- 직선분 d를 따른 변위에서 일정한 힘 F에 의한 일 $W = F \bullet d$이다.
- 곡선 $C{:}\mathbf{r}(t)$를 따르는 변위에서 힘 F가 변할 때, 행해진 일 W는 C의 작은 현을 따른 변위에서 행해진 일의 합의 극한으로 정의할 수 있다.
- 선적분으로 W를 정하는 것과 같다.

■ Ex.4 행해진 일은 운동에너지에서 증가와 같다.

$\mathbf{F}$가 힘이면 선적분은 일이다. t를 시간이라 하면 $d\mathbf{r}/dt = \mathbf{v}$는 속도이다.

$$W = \int_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \bullet \mathbf{v}(t)dt$$

$Newton$의 제2법칙 $\Rightarrow$ $\mathbf{F} = m\mathbf{r}''(t) = m\mathbf{v}'(t)$ $\Rightarrow$ $W = \int_a^b m\mathbf{v}'(t) \bullet \mathbf{v}(t)dt = \int_a^b m\left(\frac{\mathbf{v} \bullet \mathbf{v}}{2}\right)' dt = \frac{m}{2}|\mathbf{v}|^2\Big|_{t=a}^{t=b}$

10.1 Line Integrals (선적분)

- 선적분의 다른 형식

값이 벡터인 선적분 : $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))dt = \int_a^b [F_1(\mathbf{r}(t)),\ F_2(\mathbf{r}(t)),\ F_3(\mathbf{r}(t))]dt$

10.1 Line Integrals (선적분)

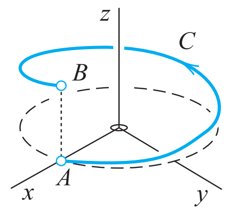
- 선적분의 다른 형식

값이 벡터인 선적분 : $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))dt = \int_a^b [F_1(\mathbf{r}(t)),\ F_2(\mathbf{r}(t)),\ F_3(\mathbf{r}(t))]dt$

- Ex.5 나선을 따라서 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = [xy,\ yz, z]$를 적분하라.

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [\cos t \sin t,\ 3t \sin t,\ 3t]$$

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))dt = \left[-\frac{1}{2}\cos^2 t,\ 3\sin t - 3t\cos t,\ \frac{3}{2}t^2\right]\Bigg|_0^{2\pi} = \left[0,\ -6\pi,\ 6\pi^2\right]$$



10.1 Line Integrals (선적분)

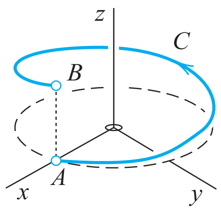
● 선적분의 다른 형식

값이 벡터인 선적분 : $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))dt = \int_a^b [F_1(\mathbf{r}(t)),\ F_2(\mathbf{r}(t)),\ F_3(\mathbf{r}(t))]dt$

■ Ex.5 나선을 따라서 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = [xy,\ yz, z]$를 적분하라.

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [\cos t\ \sin t,\ 3t \sin t,\ 3t]$$

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))dt = \left[-\frac{1}{2}\cos^2 t,\ 3\sin t - 3t\cos t,\ \frac{3}{2}t^2\right]\Bigg|_0^{2\pi} = [0,\ -6\pi,\ 6\pi^2]$$



● 경로 관련성

선적분은 일반적으로 피적분함수와 경로의 끝점과 관련이 있을 뿐 아니라 적분이 취해지는 경로 그 자체와도 관련이 있다.

10.1 Line Integrals (선적분)

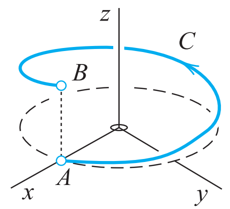
● 선적분의 다른 형식

값이 벡터인 선적분 : $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))dt = \int_a^b [F_1(\mathbf{r}(t)),\ F_2(\mathbf{r}(t)),\ F_3(\mathbf{r}(t))]dt$

■ Ex.5 나선을 따라서 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = [xy,\ yz, z]$를 적분하라.

$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [\cos t \sin t, 3t \sin t, 3t]$

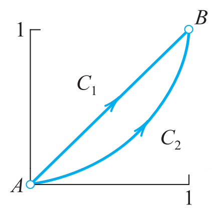
$$\int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))dt = \left[-\frac{1}{2}\cos^2 t,\ 3\sin t - 3t\cos t,\ \frac{3}{2}t^2 \right]\Bigg|_0^{2\pi} = \left[0,\ -6\pi,\ 6\pi^2\right]$$



● 경로 관련성

선적분은 일반적으로 피적분함수와 경로의 끝점과 관련이 있을 뿐 아니라 적분이 취해지는 경로 그 자체와도 관련이 있다.

■ Ex.6 $0 \le t \le 1$에서 직선 C_1:$\mathbf{r}_1(t) = [t,\ t,\ 0]$과 포물선 C_2:$\mathbf{r}_2(t) = [t,\ t^2,\ 0]$을 취해서 $\mathbf{F} = [0,\ xy,\ 0]$를 적분해보자.



10.1 Line Integrals (선적분)

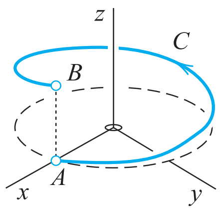
● 선적분의 다른 형식

값이 벡터인 선적분 : $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})dt = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))dt = \int_a^b [F_1(\mathbf{r}(t)),\ F_2(\mathbf{r}(t)),\ F_3(\mathbf{r}(t))]dt$

■ Ex.5 나선을 따라서 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = [xy,\ yz, z]$를 적분하라.

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = [\cos t \sin t, 3t \sin t, 3t]$$

$$\int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))dt = \left[-\frac{1}{2}\cos^2 t,\ 3\sin t - 3t\cos t,\ \frac{3}{2}t^2\right]\Big|_0^{2\pi} = [0,\ -6\pi,\ 6\pi^2]$$



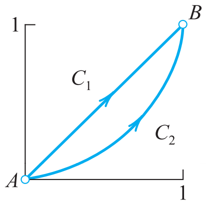
● 경로 관련성

선적분은 일반적으로 피적분함수와 경로의 끝점과 관련이 있을 뿐 아니라 적분이 취해지는 경로 그 자체와도 관련이 있다.

■ Ex.6 $0 \le t \le 1$에서 직선 $C_1: \mathbf{r}_1(t) = [t,\ t,\ 0]$과 포물선 $C_2: \mathbf{r}_2(t) = [t,\ t^2,\ 0]$을 취해서 $\mathbf{F} = [0,\ xy,\ 0]$를 적분해보자.

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_1(t)) \bullet \mathbf{r}_1'(t) = t^2 \quad \Rightarrow \quad \int_{C_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}_1) \bullet d\mathbf{r}_1 = \frac{1}{3}$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}_2(t)) \bullet \mathbf{r}_2'(t) = 2t^4 \quad \Rightarrow \quad \int_{C_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}_2) \bullet d\mathbf{r}_2 = \frac{2}{5}$$



10.1 Line Integrals (선적분)

PROBLEM SET 10.1

HW: 10, 18, 19, 20

10.2 Path Independence of Line Integrals
(선적분의 경로 무관성)

● 경로 무관성

- 공간의 영역 D에서 F_1, F_2, F_3가 연속인 선적분은 만약 $\mathbf{F} = [F_1, F_2, F_3]$가 어떤 함수 f 의 기울기이면 영역에서 경로에 무관하다.

$$\mathbf{F} = \text{grad}\, f \quad \left(F_1 = \frac{\partial f}{\partial x},\ F_2 = \frac{\partial f}{\partial y},\ F_3 = \frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad \Rightarrow \quad \int_A^B (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz) = f(B) - f(A)$$

- 영역 D의 모든 닫힌 곡선에서 선적분의 적분값이 0이면,적분은 영역 D에서 경로무관하다.
- 미분형식 $\mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$가 영역 D에서 연속적인 계수함수 $F_1,\ F_2,\ F_3$를 가지고 완전하면, 선적분은 영역 D에서 경로 무관하다.

● 완전(Exact)

영역 D의 모든 곳에서 미분가능한 함수 f가 존재하여 $\mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = df$ 의 관계가 성립

10.2 Path Independence of Line Integrals
(선적분의 경로 무관성)

- Ex.1 경로 무관성

적분 $\int_C (2xdx + 2ydy + 4zdz)$가 임의영역에서 경로 무관함을 보이고

$A:(0,\ 0,\ 0)$에서 $B:(2,\ 2,\ 2)$까지 적분값을 구하라.

10.2 Path Independence of Line Integrals (선적분의 경로 무관성)

- Ex.1 경로 무관성

적분 $\int_C (2xdx + 2ydy + 4zdz)$가 임의영역에서 경로 무관함을 보이고

$A:(0,\ 0,\ 0)$에서 $B:(2,\ 2,\ 2)$까지 적분값을 구하라.

$$\mathbf{F} = [2x,\ 2y,\ 4z] = \text{grad}\, f \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x = F_1,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y = F_2,\ \frac{\partial f}{\partial z} = 4z = F_3 \quad \Rightarrow \quad f = x^2 + y^2 + 2z^2$$

$\therefore$ 적분은 경로와 무관하다.

$$\int_C (2xdx + 2ydy + 4zdz) = f(B) - f(A) = f(2,\ 2,\ 2) - f(0,\ 0,\ 0) = 4 + 4 + 8 = 16$$

10.2 Path Independence of Line Integrals (선적분의 경로 무관성)

● 완전성과 경로 무관성에 대한 판별기준

선적분 $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \bullet d\mathbf{r} = \int_C (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz)$에서

F_1, F_2, F_3가 영역 에서 연속적이고, 연속적인 일차편미분도함수를 가진다고 하자.

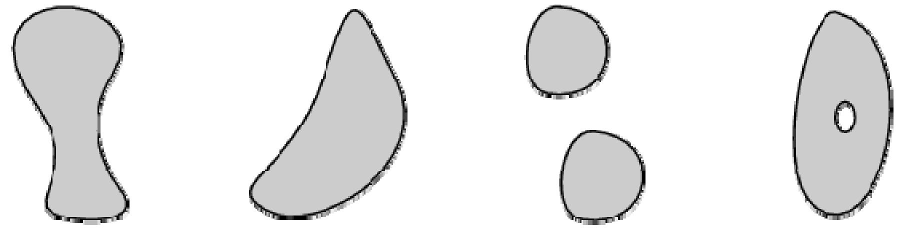
• 미분형식 $\mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$이 완전

$$\Rightarrow \quad \operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0} \left(\text{즉}, \ \frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z}, \ \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \ \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)$$

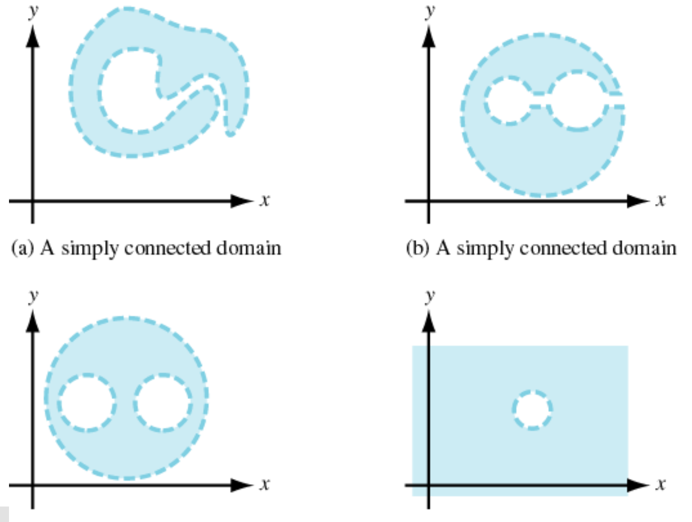
• $\operatorname{curl} \mathbf{F} = \mathbf{0}$이 성립하고 D가 단순연결 $\Rightarrow$ $\mathbf{F} \bullet d\mathbf{r} = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$은 완전

$\Rightarrow$ 선적분은 경로 무관하다.

10.2 Path Independence of Line Integrals
(선적분의 경로 무관성)



simply connected   simply connected   not simply connected   not simply connected

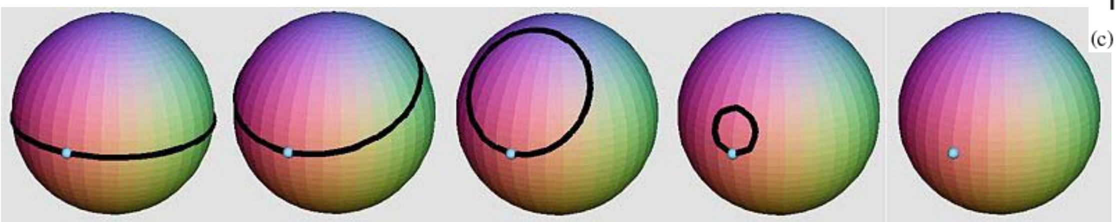


(a) A simply connected domain

(b) A simply connected domain

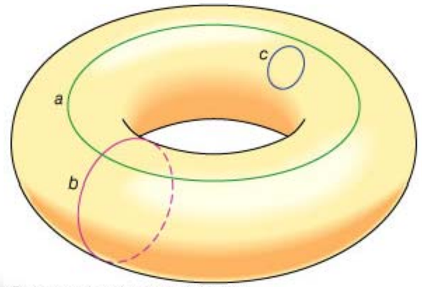
(c) A multiply connected domain

(d) A multiply connected domain



A sphere is simply connected because every loop can be contracted (on the surface) to a point.

A torus is not simply connected. Neither of the colored loops can be contracted to a point without leaving the surface.



10.2 Path Independence of Line Integrals (선적분의 경로 무관성)

- Ex.3 **완전성과 경로 무관성. 퍼텐셜 결정**

  적분기호 내의 미분형식이 완전함을 보여라.

$$I = \int_C \left[2xyz^2 dx + \left(x^2 z^2 + z\cos yz \right) dy + \left(2x^2 yz + y\cos yz \right) dz \right]$$

이적분은 완전하며,경로 무관하게 된다.

그리고 $A:(0,\ 0,\ 0)$에서 $B:\left(1,\ \pi/4,\ 2\right)$까지의 적분 I의 값을 구하라.

10.2 Path Independence of Line Integrals (선적분의 경로 무관성)

- Ex.3 **완전성과 경로 무관성. 퍼텐셜 결정**

  적분기호 내의 미분형식이 완전함을 보여라.

$$I = \int_C \left[2xyz^2 dx + \left(x^2 z^2 + z\cos yz\right)dy + \left(2x^2 yz + y\cos yz\right)dz\right]$$

이적분은 완전하며,경로 무관하게 된다.

그리고 $A:(0,\ 0,\ 0)$에서 $B:\left(1,\ \pi/4,\ 2\right)$까지의 적분 I의 값을 구하라.

완전성 :

$$\left(F_3\right)_y = 2x^2 z + \cos yz - yz\sin yz = \left(F_2\right)_z, \quad \left(F_1\right)_z = 4xyz = \left(F_3\right)_x, \quad \left(F_2\right)_x = 2xz^2 = \left(F_1\right)_y$$

10.2 Path Independence of Line Integrals (선적분의 경로 무관성)

■ Ex.3 완전성과 경로 무관성. 퍼텐셜 결정

적분기호 내의 미분형식이 완전함을 보여라.

$$I = \int_C \left[2xyz^2 dx + \left(x^2z^2 + z\cos yz\right)dy + \left(2x^2yz + y\cos yz\right)dz\right]$$

이적분은 완전하며,경로 무관하게 된다.

그리고 $A:(0,\ 0,\ 0)$에서 $B:\left(1,\ \pi/4,\ 2\right)$까지의 적분 I의 값을 구하라.

완전성 :

$$\left(F_3\right)_y = 2x^2z + \cos yz - yz\sin yz = \left(F_2\right)_z,\quad \left(F_1\right)_z = 4xyz = \left(F_3\right)_x,\quad \left(F_2\right)_x = 2xz^2 = \left(F_1\right)_y$$

f를 구하기

$$f = \int F_2 dy = \int \left(x^2z^2 + z\cos yz\right)dy = x^2yz^2 + \sin yz + g(x,z)$$

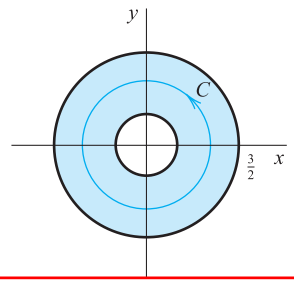
$$\Rightarrow \quad f_x = 2xyz^2 + g_x = F_1 = 2xyz^2 \quad \Rightarrow \quad g_x = 0 \quad \Rightarrow \quad g = h(z)$$

$$f_z = 2x^2yz + y\cos yz + h' = F_3 = 2x^2yz + y\cos yz \quad \Rightarrow \quad h' = 0 \quad \Rightarrow \quad h = \text{상수}$$

$$\therefore\ f = x^2yz^2 + \sin yz,\quad f(B) - f(A) = 1\cdot\frac{\pi}{4}\cdot 4 + \sin\frac{\pi}{2} - 0 = \pi + 1$$

10.2 Path Independence of Line Integrals
(선적분의 경로 무관성)

- Ex.4 단순연결성 가정에 대하여

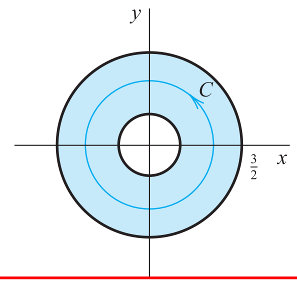


$F_1 = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\quad F_2 = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\quad F_3 = 0$일 때,

$I = \int_C (F_1dx + F_2dy) = \int_C \dfrac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$을 구하여 경로무관성을 관찰하자.

10.2 Path Independence of Line Integrals
(선적분의 경로 무관성)

- Ex.4 단순연결성 가정에 대하여



$F_1 = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $F_2 = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $F_3 = 0$일 때,

$I = \int_C (F_1 dx + F_2 dy) = \int_C \dfrac{-ydx + xdy}{x^2+y^2}$을 구하여 경로무관성을 관찰하자.

$\dfrac{\partial F_2}{\partial x} = \dfrac{x^2+y^2-x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$, $\dfrac{\partial F_1}{\partial y} = -\dfrac{x^2+y^2-y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$이므로 미분형식이 D에서 완전하다.

만약 적분 I가 D에서 경로에 무관하면 D의 임의 닫힌 곡선에서 $I=0$이다.

그러나, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $r=1$ $\Rightarrow$ $dx = -\sin\theta d\theta$, $dy = \cos\theta d\theta$

$\Rightarrow$ $-ydx + xdy = \sin^2\theta d\theta + \cos^2\theta d\theta = d\theta$ $\Rightarrow$ 반시계방향 적분 $I = \int_0^{2\pi} \dfrac{d\theta}{1} = 2\pi$

$\therefore$ D가 단순연결이 아니므로, D에서 I가 경로무관하다고 결론을 내릴 수 없다.

10.2 Path Independence of Line Integrals
(선적분의 경로 무관성)

PROBLEM SET 10.2

HW: 3, 10, 16