Engineering Mathematics II

Prof. Dr. Yong-Su Na

(32-206, Tel. 880-7204)

Text book: Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 9th Edition, Wiley (2006)

Ch. 10 Vector Integral Calculus. Integral Theorems

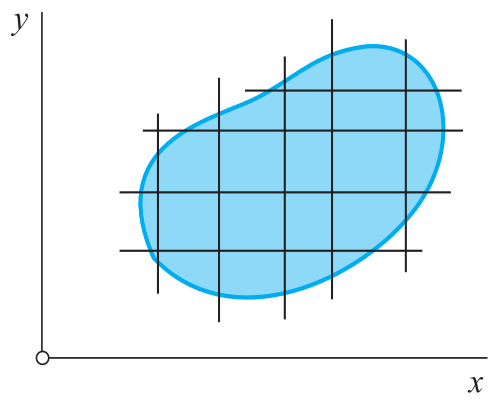
Ch. 10 Vector Integral Calculus. Integral Theorems

10.3 Calculus Review: Double Integrals (이중적분)

- **이중적분** : 피적분함수를 평면의 닫힌 유한한 영역에서 적분
- 영역 R을 x축과 y축에 평행한 직선을 그어 분할한다.
- 각 직사각형내의 한 점 (x_k, y_k)을 택하여

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta A_k$$
와 같은 형태의 합을 만든다.

* ΔA_k는 k번째 직사각형의 면적



- $f(x, y)$가 R에서 연속이고 R이 유한개의 매끄러운 곡선을 경계로 한다고 가정

$\Rightarrow$ 수열 J_n이 수렴, 극한을 영역 R에서의 $f(x, y)$의 이중적분(Double Integral)이라 한다.

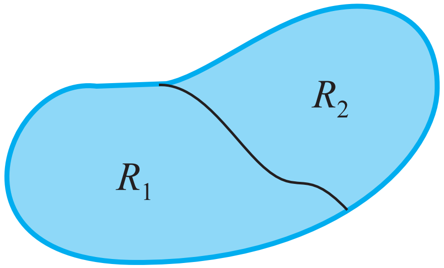
10.3 Calculus Review: Double Integrals (이중적분)

- 이중적분의 성질

$$*\ \iint_R kf\,dxdy = k\iint_R f\,dxdy$$

$$*\ \iint_R (f+g)dxdy = \iint_R f\,dxdy + \iint_R g\,dxdy$$

$$*\ \iint_R f\,dxdy = \iint_{R_1} f\,dxdy + \iint_{R_2} f\,dxdy$$



$*$ 이중적분에 대한 **평균값 정리**(Mean Value Theorem)

R이 단순연결되었으면

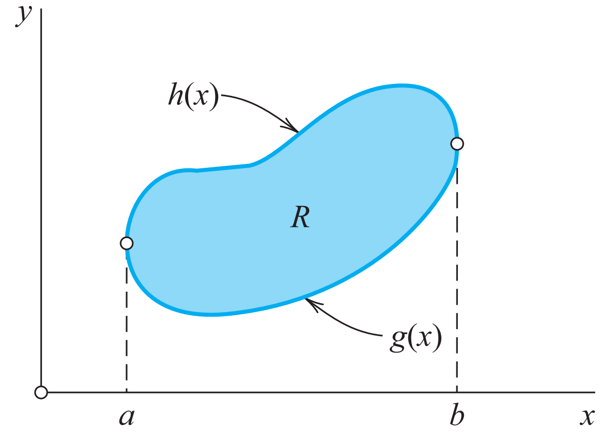
$\iint_R f(x,y)dxdy = f(x_0,y_0)A$을 만족하는 점 (x_0,y_0)가 적어도하나 R에 존재한다.

A는 R의 면적이다.

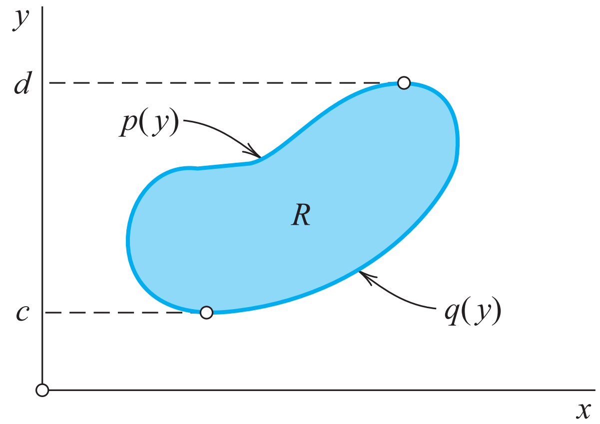
10.3 Calculus Review: Double Integrals (이중적분)

- 연속적인 두 적분에 의한 이중적분의 계산

- $$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy \right] dx$$

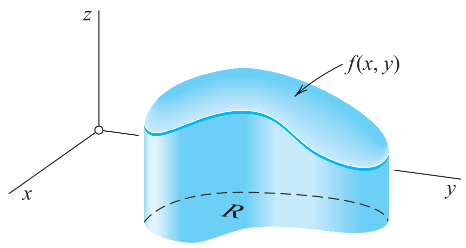


- $$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)\,dx \right] dy$$



10.3 Calculus Review: Double Integrals (이중적분)

- 이중적분의 응용



- 영역 R의 면적 : $A = \iint_R dxdy$
- $z = f(x,y)\ (>0)$ 아래와 xy평면 영역 R 위로 이루어지는 체적

  : $V = \iint_R f(x,y)dxdy$

- $f(x,y)$: xy평면에서 질량분포의 밀도(=단위 면적당 질량)

  * R에서 전체 질량 : $M = \iint_R f(x,y)dxdy$

  * R에서 질량의 무게중심(Center of Gravity) : $\bar{x} = \frac{1}{M}\iint_R xf(x,y)dxdy,\quad \bar{y} = \frac{1}{M}\iint_R yf(x,y)dxdy$

  * R에서 질량의 관성모멘트(Moments of Inertia) : $I_x = \iint_R y^2 f(x,y)dxdy,\quad I_y = \iint_R x^2 f(x,y)dxdy$

  * R에서 질량의 극관성모멘트(Polar Moments of Inertia) : $I_0 = I_x + I_y = \iint_R (x^2 + y^2) f(x,y)dxdy$

10.3 Calculus Review: Double Integrals (이중적분)

- 이중적분에서 변수변환. Jacobian

- 이중적분에서 $x,\ y$에서 $u,\ v$로의 변수 변환공식

$$: \iint_R f(x,y)dxdy = \iint_{R^*} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

$$\text{Jacobian}\ :\ J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

- 극좌표계 r과 θ로서, $x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta$

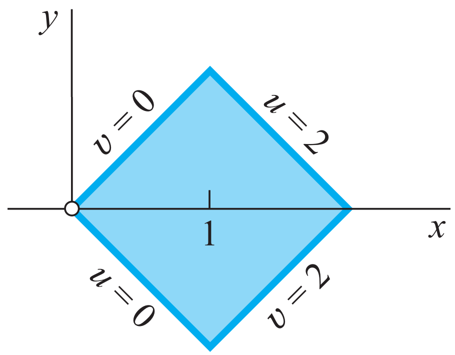
$$\Rightarrow \quad J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

$$\Rightarrow \quad \iint_R f(x,y)dxdy = \iint_{R^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$$

10.3 Calculus Review: Double Integrals (이중적분)

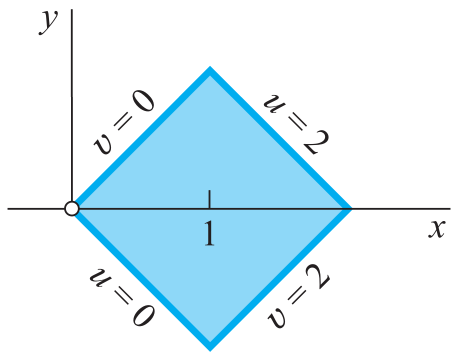
- Ex. 1 정사각형 R에서 아래의 이중적분을 계산하라.

$$\iint_R \left(x^2 + y^2\right) dx\,dy$$



10.3 Calculus Review: Double Integrals (이중적분)

- Ex. 1 정사각형 R에서 아래의 이중적분을 계산하라.



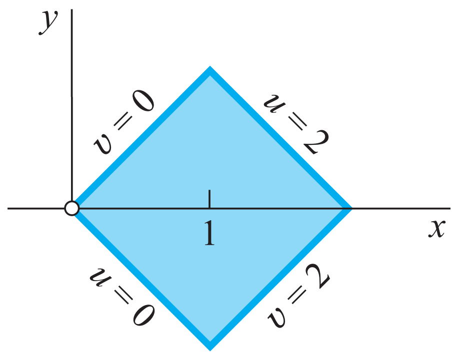
$$\iint_R \left(x^2 + y^2\right) dxdy$$

R의 모양으로부터 변환

$$: x + y = u,\ x - y = v \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}(u + v),\ y = \frac{1}{2}(u - v)$$

10.3 Calculus Review: Double Integrals (이중적분)

■ Ex. 1 정사각형 R에서 아래의 이중적분을 계산하라.



$$\iint_R \left(x^2 + y^2\right) dxdy$$

R의 모양으로부터 변환

$$: x + y = u,\ x - y = v \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}(u + v),\ y = \frac{1}{2}(u - v)$$

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}$$

$$J = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

R은 정사각형 $0 \le u \le 2,\ \ 0 \le v \le 2$

$$\iint_R \left(x^2 + y^2\right) dxdy = \int_0^2 \int_0^2 \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2\right)\frac{1}{2}\, dudv = \frac{8}{3}$$

10.3 Calculus Review: Double Integrals (이중적분)

PROBLEM SET 10.3

HW: 9, 12

10.4 Green's Theorem in the Plane (평면에서의 Green의 정리)

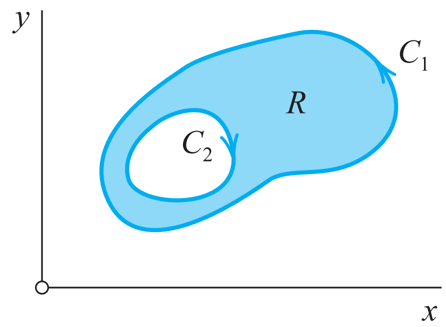
- 평면에서 Green의 정리 (이중적분과 선적분 간의 변화)

R : xy 평면에서의 닫힌 유계영역

C : 유한개의 매끄러운 곡선으로 영역 R의 경계

$F_1(x,y),\ F_2(x,y)$: R을 포함하는 어떤 영역의 모든점에서 연속이고

연속인 편도함수 $\dfrac{\partial F_1}{\partial y},\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x}$를 갖는 함수



$$\Rightarrow \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy = \oint_C (F_1 dx + F_2 dy)$$

* 적분의 방향 : C를 따라 진행할 때 R이 좌측에 있는 방향

- $\mathbf{F} = [F_1, F_2] = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} \quad \Rightarrow \quad \iint_R (\operatorname{curl}\mathbf{F}) \bullet \mathbf{k}\, dxdy = \oint_C \mathbf{F} \bullet d\mathbf{r}$

10.4 Green's Theorem in the Plane (평면에서의 Green의 정리)

■ Ex. 1 평면에서 Green 정리 검증

$F_1 = y^2 - 7y, \quad F_2 = 2xy + 2x,$

$C:$원 $x^2 + y^2 = 1$

10.4 Green's Theorem in the Plane (평면에서의 Green의 정리)

■ Ex. 1 평면에서 Green 정리 검증

$F_1 = y^2 - 7y, \quad F_2 = 2xy + 2x,$

C : 원 $x^2 + y^2 = 1$

원판 R의 면적 : π $\quad \Rightarrow \quad \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = \iint_R [(2y+2) - (2y-7)] dxdy = 9 \iint_R dxdy = 9\pi$

10.4 Green's Theorem in the Plane (평면에서의 Green의 정리)

■ Ex. 1 평면에서 Green 정리 검증

$F_1 = y^2 - 7y, \quad F_2 = 2xy + 2x,$

C:원 $x^2 + y^2 = 1$

원판 R의 면적 : $\pi \quad \Rightarrow \quad \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = \iint_R [(2y+2) - (2y-7)] dxdy = 9 \iint_R dxdy = 9\pi$

C : 반시계 방향 $\quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}(t) = [\cos t\ ,\ \sin t], \quad \mathbf{r}'(t) = [-\sin t\ ,\ \cos t]$

$\Rightarrow \quad F_1 = y^2 - 7y = \sin^2 t - 7\sin t, \quad F_2 = 2xy + 2x = 2\cos t \sin t + 2\cos t$

$$\Rightarrow \quad \oint_C (F_1 x' + F_2 y') dt = \int_0^{2\pi} [(\sin^2 t - 7\sin t)(-\sin t) + 2(\cos t \sin t + \cos t)(\cos t)] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin^3 t + 7\sin^2 t + 2\cos^2 t \sin t + 2\cos^2 t) dt$$

$$= 0 + 7\pi \text{-} 0 + 2\pi = 9\pi$$

10.4 Green's Theorem in the Plane
(평면에서의 Green의 정리)

- Green **정리 응용**
- Ex. 2 **경계에서 선적분으로서의 평면 영역의 면적**

10.4 Green's Theorem in the Plane (평면에서의 Green의 정리)

- Green 정리 응용

■ Ex. 2 **경계에서 선적분으로서의 평면 영역의 면적**

$$F_1 = 0,\quad F_2 = x \quad \Rightarrow \quad \iint_R dxdy = \oint_C xdy$$

$$F_1 = -y,\quad F_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \iint_R dxdy = -\oint_C ydx$$

$$A = \frac{1}{2}\oint_C (xdy - ydx)$$

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = \oint_C (F_1 dx + F_2 dy)$$

10.4 Green's Theorem in the Plane (평면에서의 Green의 정리)

- Green 정리 응용

■ Ex. 2 **경계에서 선적분으로서의 평면 영역의 면적**

$$F_1 = 0,\quad F_2 = x \quad\Rightarrow\quad \iint_R dxdy = \oint_C xdy$$

$$F_1 = -y,\quad F_2 = 0 \quad\Rightarrow\quad \iint_R dxdy = -\oint_C ydx$$

$$A = \frac{1}{2}\oint_C (xdy - ydx)$$

■ Ex. 3 **극좌표계에서 평면 영역의 면적**

10.4 Green's Theorem in the Plane (평면에서의 Green의 정리)

- Green 정리 응용

■ Ex. 2 **경계에서 선적분으로서의 평면 영역의 면적**

$$F_1 = 0,\quad F_2 = x \quad \Rightarrow \quad \iint_R dxdy = \oint_C xdy$$

$$F_1 = -y,\quad F_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \iint_R dxdy = -\oint_C ydx$$

$$A = \frac{1}{2}\oint_C (xdy - ydx)$$

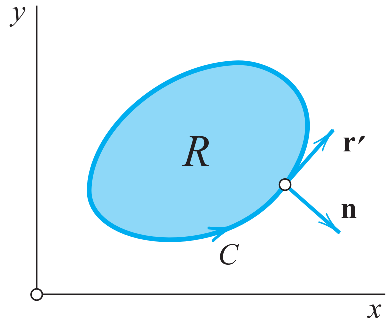
■ Ex. 3 **극좌표계에서 평면 영역의 면적**

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta \quad \Rightarrow \quad dx = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta,\quad dy = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}\oint_C (xdy - ydx) = \frac{1}{2}\oint_C [(r\cos\theta)(\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta) - (r\sin\theta)(\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta)] = \frac{1}{2}\oint_C r^2 d\theta$$

10.4 Green's Theorem in the Plane (평면에서의 Green의 정리)

■ Ex. 4 **함수의 라플라스 작용소(Laplacian)인 이중적분의 법선도함수 선적분으로 변환**



$w(x,y)$: 연속적이고 1차와 2차의 연속적인 도함수를 가지는 함수

$$F_1 = -\frac{\partial w}{\partial y}, \quad F_2 = \frac{\partial w}{\partial x}$$

$\Rightarrow$

$$* \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \nabla^2 w \quad \Rightarrow \quad \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = \iint_R \nabla^2 w dxdy$$

$$* \quad \oint_C (F_1 dx + F_2 dy) = \oint_C \left(F_1 \frac{dx}{ds} + F_2 \frac{dy}{ds} \right) ds = \oint_C \left(-\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dy}{ds} \right) ds = \oint_C \frac{\partial w}{\partial n} ds$$

$$\Leftarrow \quad \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dy}{ds} - \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dx}{ds} = \left[\frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y} \right] \left[\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds} \right] = (\operatorname{grad} w) \bullet \mathbf{n} = \frac{\partial w}{\partial n}$$

$$\therefore \quad \iint_R \nabla^2 w dxdy = \oint_C \frac{\partial w}{\partial n} ds$$

10.4 Green's Theorem in the Plane (평면에서의 Green의 정리)

PROBLEM SET 10.4

HW: 5, 20

10.5 Surfaces for Surface Integrals (면적분에서의 곡면)

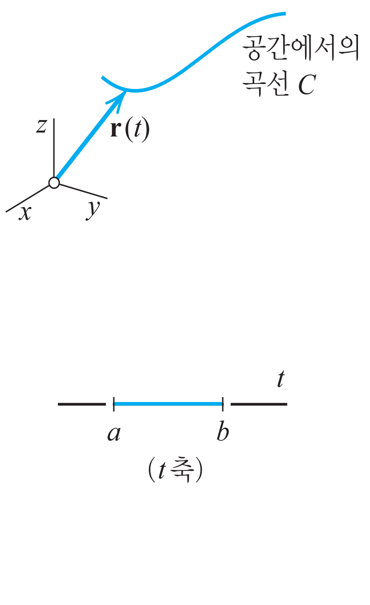
- 곡면의 표현식: $z = f(x,y)$ 또는 $g(x,y,z) = 0$

- 곡면 S의 매개변수 표현식

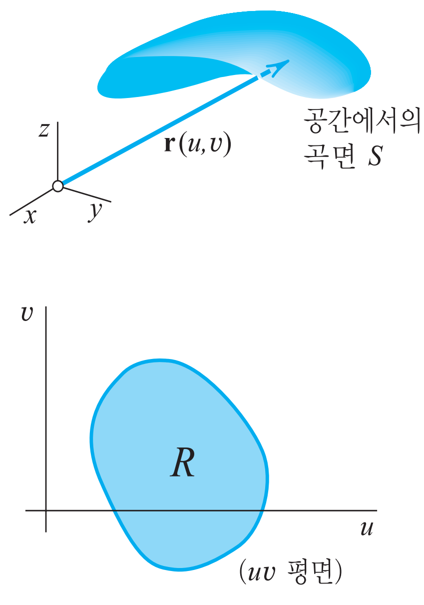
$$\mathbf{r}(u,v) = [x(u,v), y(u,v), z(u,v)]$$

$$= x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}$$

$$(u,v) \in R$$



(A) 곡선

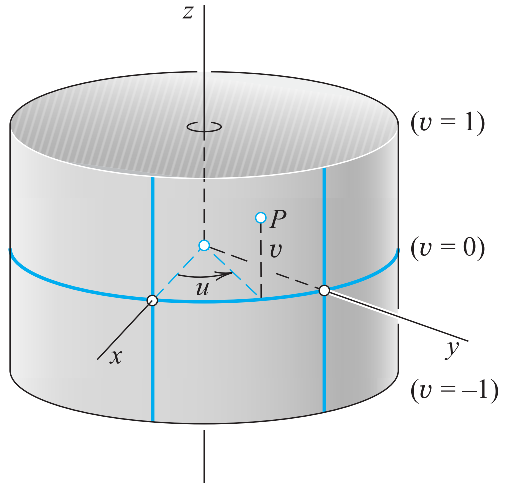


(B) 곡면

10.5 Surfaces for Surface Integrals (면적분에서의 곡면)

■ Ex. 1 원기둥의 매개변수 표현

반지름이 a이고 높이는 2이며 z축을 축으로 하는 원기둥 : $x^2 + y^2 = a^2, \quad -1 \le z \le 1$

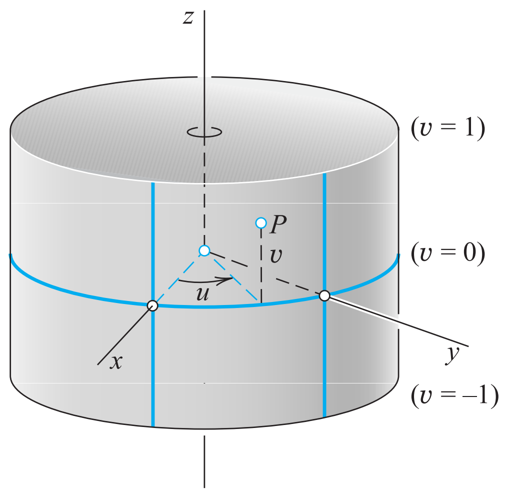


10.5 Surfaces for Surface Integrals (면적분에서의 곡면)

■ Ex. 1 원기둥의 매개변수 표현

반지름이 a이고 높이는 2이며 z축을 축으로 하는 원기둥 : $x^2+y^2=a^2, \quad -1 \le z \le 1$

매개변수표현식 : $\mathbf{r}(u,v)=[a\cos u, a\sin u, v]=a\cos u\mathbf{i}+a\sin u\mathbf{j}+v\mathbf{k}$



* 매개변수 u와 v는 uv평면의 직사각형$(R : 0 \le u \le 2\pi, \ -1 \le v \le 1)$ 에서 변함

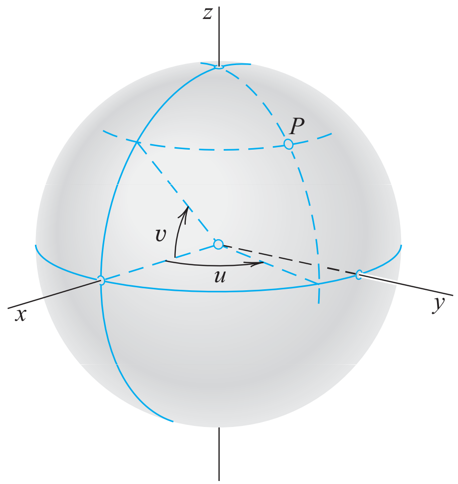
* $\mathbf{r}$의 성분 : $x=a\cos u, \ \ y=a\sin u, \ \ z=v$

* 곡선 $v=$상수 : 평행한 원들

곡선 $u=$상수 : 수직인 직선들

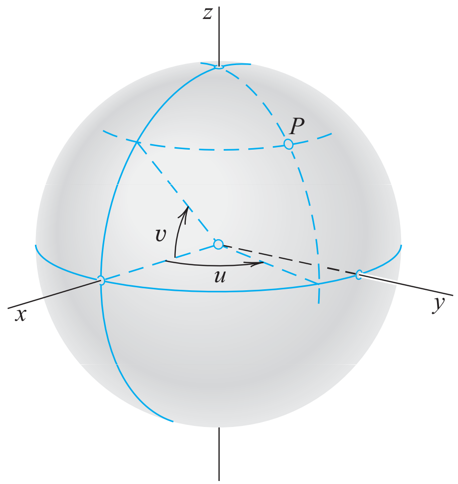
10.5 Surfaces for Surface Integrals (면적분에서의 곡면)

■ Ex. 2 **구의 매개변수 표현**



10.5 Surfaces for Surface Integrals (면적분에서의 곡면)

■ Ex. 2 **구의 매개변수 표현**



* 구 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$의 매개변수표현식

$$: \mathbf{r}(u,v) = a\cos v \cos u\,\mathbf{i} + a\cos v \sin u\,\mathbf{j} + a\sin v\,\mathbf{k}$$

$$R : 0 \le u \le 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2}$$

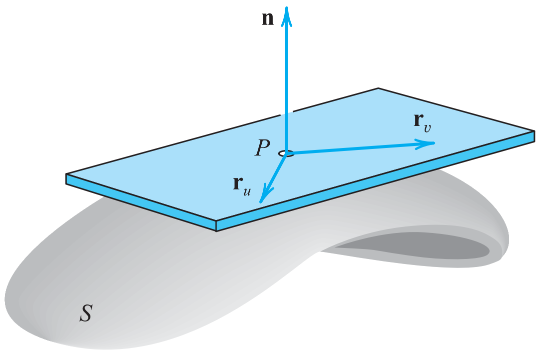
* 다른 매개변수표현식 : $\mathbf{r}(u,v) = a\cos u \sin v\,\mathbf{i} + a\sin u \sin v\,\mathbf{j} + a\cos v\,\mathbf{k}$

$$R : 0 \le u \le 2\pi, \quad 0 \le v \le \pi$$

10.5 Surfaces for Surface Integrals (면적분에서의 곡면)

- 접평면과 곡면법선
- 접평면(Tangent Place)

  : 곡면의 한 점을 통과하는 모든 곡선의 접선벡터들이 형성하는 곡면
- 법선벡터(Normal Vector) : 접평면에 수직인 벡터



$* $ 곡면 S : $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$

$* $ S 상의 곡선 C : $\tilde{\mathbf{r}}(t)=\mathbf{r}(u(t),v(t))$

$* $ S 상에서 C의 접선벡터 : $\tilde{\mathbf{r}}'(t)=\dfrac{d\tilde{\mathbf{r}}}{dt}=\dfrac{d\mathbf{r}}{du}u'+\dfrac{d\mathbf{r}}{dv}v'$

P에서 편도함수 $\mathbf{r}_u$와 $\mathbf{r}_v$는 P에서 S에 접하게 됨

$\Rightarrow$ $\mathbf{r}_u$와 $\mathbf{r}_v$는 P에서 S의접평면생성 $\Rightarrow$ P에서 S의 법선벡터 : $\mathbf{N}=\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\neq\mathbf{0}$

$* $ 법선벡터의 단위벡터 : $\mathbf{n}=\dfrac{1}{|\mathbf{N}|}\mathbf{N}=\dfrac{1}{|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|}\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v$

$* $ S : $g(x,y,z)=0$ $\Rightarrow$ $\mathbf{n}=\dfrac{1}{|\operatorname{grad} g|}\operatorname{grad} g$

10.5 Surfaces for Surface Integrals (면적분에서의 곡면)

- **접평면과 곡면법선**

  곡면 S는 $\mathbf{r}_u$와 $\mathbf{r}_v$에 의해 생성되는 유일한 접평면을 가지며,

  S의 점들에서 방향이 연속적인 유일한 법선벡터를 가진다.

■ Ex. 4 구의 단위법선벡터

구 $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$의 단위법선벡터

10.5 Surfaces for Surface Integrals (면적분에서의 곡면)

- **접평면과 곡면법선**

  곡면 S는 $\mathbf{r}_u$와 $\mathbf{r}_v$에 의해 생성되는 유일한 접평면을 가지며,

  S의 점들에서 방향이 연속적인 유일한 법선벡터를 가진다.

Ex. 4 구의 단위법선벡터

구 $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0$의 단위법선벡터

$$\mathbf{n}(x, y, z) = \left[\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a}\right] = \frac{x}{a}\mathbf{i} + \frac{y}{a}\mathbf{j} + \frac{z}{a}\mathbf{k}$$

10.5 Surfaces for Surface Integrals (면적분에서의 곡면)

- Ex. 5 **원뿔의 단위법선벡터**

  원뿔 $g(x, y, z) = -z + \sqrt{x^2 + y^2} = 0$의 단위법선벡터

10.5 Surfaces for Surface Integrals (면적분에서의 곡면)

- Ex. 5 **원뿔의 단위법선벡터**

원뿔 $g(x,y,z) = -z + \sqrt{x^2 + y^2} = 0$의 단위법선벡터

$$\mathbf{n}(x,y,z) = \left[\frac{x}{\sqrt{2(x^2+y^2)}}, \frac{y}{\sqrt{2(x^2+y^2)}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right]$$

10.5 Surfaces for Surface Integrals (면적분에서의 곡면)

PROBLEM SET 10.5

HW: 9, 18