Engineering Mathematics II

Prof. Dr. Yong-Su Na

(32-206, Tel. 880-7204)

Text book: Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 9th Edition, Wiley (2006)

Ch. 10 Vector Integral Calculus. Integral Theorems

Ch. 10 Vector Integral Calculus. Integral Theorems

10.6 Surface Integrals (면적분)

- 면적분

곡면 S : $\mathbf{r}(u,v)=[x(u,v), y(u,v), z(u,v)]=x(u,v)\mathbf{i}+y(u,v)\mathbf{j}+z(u,v)\mathbf{k}$는 구분적으로 매끄럽다.

* 법선벡터 : $\mathbf{N}=\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v$

* 단위법선벡터 : $\mathbf{n}=\dfrac{1}{|\mathbf{N}|}\mathbf{N}=\dfrac{1}{|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|}\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v$

벡터함수 $\mathbf{F}$에 대해 S에서 면적분 : $\iint_S \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,dA=\iint_R \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v))\bullet\mathbf{N}(u,v)\,du\,dv$

* $\mathbf{n}\,dA=\mathbf{n}|\mathbf{N}|\,du\,dv=\mathbf{N}\,du\,dv$

* $\mathbf{F}\bullet\mathbf{n}$: $\mathbf{F}$의 법선성분

$\mathbf{F}=[F_1,F_2,F_3]$, $\mathbf{N}=[N_1,N_2,N_3]$, $\mathbf{n}=[\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma]$ (α, β, γ는 $\mathbf{n}$과 좌표축 사이의 각도)

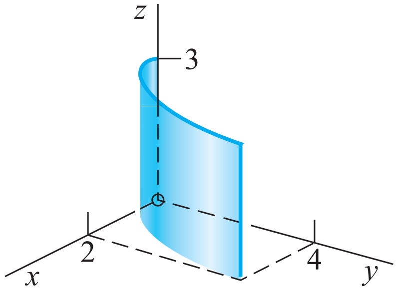
$$\Rightarrow \iint_S \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,dA=\iint_S (F_1\cos\alpha+F_2\cos\beta+F_3\cos\gamma)\,dA$$

$$=\iint_R (F_1N_1+F_2N_2+F_3N_3)\,du\,dv=\iint_S (F_1\,dy\,dz+F_2\,dz\,dx+F_3\,dx\,dy)$$

10.6 Surface Integrals (면적분)

■ Ex. 1 곡면을 통과하는 유출량

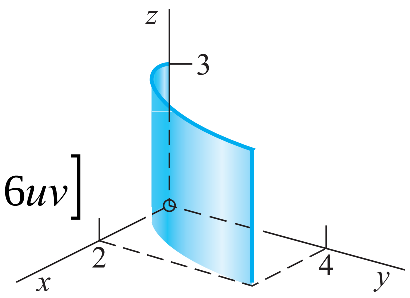
포물 기둥면 S : $y = x^2,\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le z \le 3$을 통과하는 물의 유출량을 계산하라.
속도벡터 $\mathbf{v} = \mathbf{F} = [3z^2, 6, 6xz]$이고, 속도는 m/s로 측정된다.



10.6 Surface Integrals (면적분)

■ Ex. 1 곡면을 통과하는 유출량

포물 기둥면 $S: y = x^2,\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le z \le 3$을 통과하는 물의 유출량을 계산하라.
속도벡터 $\mathbf{v} = \mathbf{F} = [3z^2, 6, 6xz]$이고, 속도는 m/s로 측정된다.



$$x = u,\ z = v \quad \Rightarrow \quad y = x^2 = u^2$$

$$\Rightarrow \quad S: \mathbf{r} = [u, u^2, v] \quad (0 \le u \le 2,\ 0 \le v \le 3), \quad \mathbf{F}(S) = [3v^2,\ 6,\ 6uv]$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = [1,\ 2u,\ 0] \times [0,\ 0,\ 1] = [2u,\ -1,\ 0]$$

$$\therefore\ \mathbf{F}(S) \bullet \mathbf{N} = 6uv^2 - 6$$

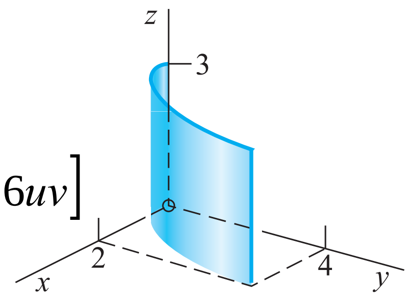
$$\iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, dA = \int_0^3 \int_0^2 (6uv^2 - 6)\, du\, dv = \int_0^3 \left(3u^2v^2 - 6u\right)\Big|_{u=0}^{2} dv = \int_0^3 (12v^2 - 12)\, dv = (4v^3 - 12v)\Big|_{v=0}^{3} = 72\left[\mathrm{m}^3/\mathrm{sec}\right]$$

10.6 Surface Integrals (면적분)

■ Ex. 1 곡면을 통과하는 유출량

포물 기둥면 $S\ :\ y=x^2,\ 0\le x\le 2,\ 0\le z\le 3$을 통과하는 물의 유출량을 계산하라.

속도벡터 $\mathbf{v}=\mathbf{F}=\left[3z^2, 6, 6xz\right]$이고, 속도는 m/s로 측정된다.



$$x=u,\ z=v \quad \Rightarrow \quad y=x^2=u^2$$

$$\Rightarrow \quad S\ :\ \mathbf{r}=\left[u, u^2, v\right] \quad (0\le u\le 2,\ 0\le v\le 3), \quad \mathbf{F}(S)=\left[3v^2,\ 6,\ 6uv\right]$$

$$\mathbf{N}=\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v=[1,\ 2u,\ 0]\times[0,\ 0,\ 1]=[2u,\ -1,\ 0]$$

$$\therefore\ \mathbf{F}(S)\bullet\mathbf{N}=6uv^2-6$$

$$\iint_S \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,dA=\int_0^3\int_0^2\left(6uv^2-6\right)du\,dv=\int_0^3\left(3u^2v^2-6u\right)\Big|_{u=0}^{2}dv=\int_0^3\left(12v^2-12\right)dv=\left(4v^3-12v\right)\Big|_{v=0}^{3}=72\left[\mathrm{m}^3/\mathrm{sec}\right]$$

다른해법

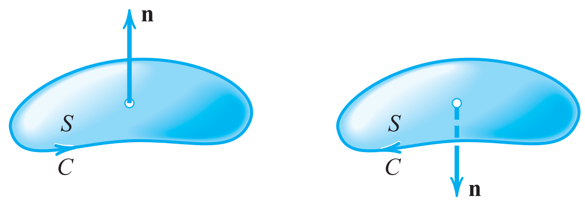
$$\mathbf{N}=|\mathbf{N}|\mathbf{n}=|\mathbf{N}|\left[\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\right]=[2u,\ -1,\ 0]=[2x,\ -1,\ 0] \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha>0,\ \cos\beta<0,\ \cos\gamma=0$$

$$\iint_S \mathbf{F}\bullet\mathbf{n}\,dA=\int_0^3\int_0^4 3z^2\,dy\,dz-\int_0^2\int_0^3 6\,dz\,dx=\int_0^3 4\left(3z^2\right)dz-\int_0^2(6\cdot 3)\,dx=4\cdot 3^3-6\cdot 3\cdot 2=72$$

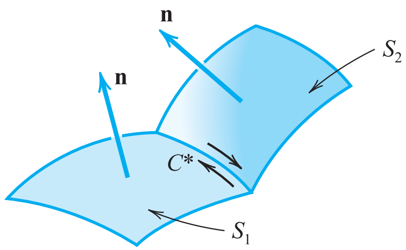
10.6 Surface Integrals (면적분)

- 곡면의 방향

- 방향의 변경 : $\mathbf{n}$을 $-\mathbf{n}$으로 대체하는 것은 면적분에 -1을 곱하는 것과 일치한다.
- 매끄러운 곡면은 방향을 가질 수 있다 (Orientable).
- 구분적으로 매끄러운 곡면도 방향을 가질 수 있다.

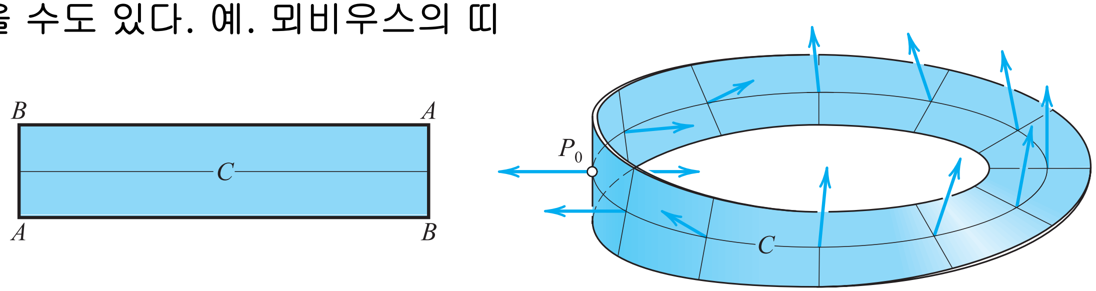


(a) 매끄러운 곡면



(b) 구분적으로 매끄러운 곡면

- 매끄러운 곡면의 충분히 작은 조각도 항상 방향을 가진다. 그러나 전체 곡면에 대해서는 성립하지 않을 수도 있다. 예. 뫼비우스의 띠



10.6 Surface Integrals (면적분)

- **방향을 고려하지 않는 면적분**

• 면적분의 다른 형식 : $\iint_S G(\mathbf{r})dA = \iint_R G(\mathbf{r}(u,v))|\mathbf{N}(u,v)|dudv$

$$S : z = f(x,y) \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{N}| = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| = |[1,0,f_u] \times [0,1,f_v]| = |[-f_u, -f_v, 1]| = \sqrt{1 + f_u^{\,2} + f_v^{\,2}}$$

$$\Rightarrow \iint_S G(\mathbf{r})dA = \iint_{R^*} G(x,y,f(x,y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

• S의 면적 : $A(S) = \iint_S dA = \iint_R |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| dudv$

$$S : z = f(x,y) \quad \Rightarrow \quad A(S) = \iint_{R^*} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

10.6 Surface Integrals (면적분)

- Ex. 4 **구의 면적**

구 $r(u,v)=[a\cos v\cos u, a\cos v\sin u, a\sin v]$, $0\le u\le 2\pi$, $-\pi/2\le v\le \pi/2$에 대해직접 계산하여라.

10.6 Surface Integrals (면적분)

■ Ex. 4 **구의 면적**

구 $r(u,v)=[a\cos v\cos u, a\cos v\sin u, a\sin v]$, $0\le u\le 2\pi$, $-\pi/2\le v\le \pi/2$에 대해직접 계산하여라.

$$\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v=\left[a^2\cos^2 v\cos u,\quad a^2\cos^2 v\sin u,\quad a^2\cos v\sin v\right]$$

$$\cos^2 u+\sin^2 u=1,\quad \cos^2 v+\sin^2 v=1$$

$$\Rightarrow\quad |\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|=a^2\left(\cos^4 v\cos^2 u+\cos^4 v\sin^2 u+\cos^2 v\sin^2 v\right)^{1/2}=a^2|\cos v|$$

$$\Rightarrow\quad A(S)=a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\pi}|\cos v|\,du\,dv=2\pi a^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos v\,dv=4\pi a^2$$

10.6 Surface Integrals (면적분)

PROBLEM SET 10.6

HW: 30 (a), (b), (c), (d)

10.7 Triple Integrals. Divergence Theorem of Gauss (삼중적분. Gauss의 발산정리)

- **삼중적분** : 공간의 닫힌 유한한 영역에서 함수의 적분
- 좌표평면(삼차원)에 평행한 평면으로 T를 분할한다.
- 각 상자에서 한 점 (x_k, y_k, z_k)을 택하여

  $J_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta V_k$와 같은 형태의 합을 만든다.($\Delta V_k$: k번째 상자의 부피)

- $f(x, y, z)$가 T를 포함하는 영역에서 연속이고

  T는 유한개의 매끄러운 곡선에 의해 제한된다고 가정

  $\Rightarrow$ 수열 J_n이 수렴, 극한을 영역 T에서의 $f(x, y, z)$의 삼중적분이라한다.

10.7 Triple Integrals. Divergence Theorem of Gauss (삼중적분. Gauss의 발산정리)

- Gauss의 발산정리(삼중적분과 면적분 간의 변환)

T: 닫혀있고 유한한 입체

S:경계가 구분적으로 매끄러우며 방향을 가지는 곡면으로 T의 표면

$\mathbf{F}$:연속이며 T를 포함하는 영역에서 연속인 1차편도함수를 가지는 벡터함수

$$\Rightarrow \quad \iiint_T \operatorname{div} \mathbf{F}\, dV = \iint_S \mathbf{F} \bullet \mathbf{n}\, dA$$

$\mathbf{F} = [F_1,\ F_2,\ F_3]$이고 S의 외향 법선벡터 $\mathbf{n} = [\cos\alpha,\ \cos\beta, \cos\gamma]$이면

$$\iiint_T \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dxdydz = \iint_S (F_1 \cos\alpha + F_2 \cos\beta + F_3 \cos\gamma) dA = \iint_S (F_1 dydz + F_2 dzdx + F_3 dxdy)$$

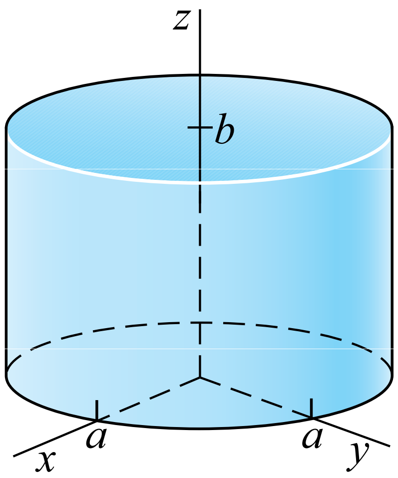
10.7 Triple Integrals. Divergence Theorem of Gauss (삼중적분. Gauss의 발산정리)

■ Ex. 1 **발산정리에 의한 면적분의 계산**

다음 적분을 계산하라.

$$I = \iint_S \left(x^3 dydz + x^2 ydzdx + x^2 zdxdy \right)$$

S : 원기둥 $x^2 + y^2 = a^2 (0 \le z \le b)$와 원판 $z = 0$과 $z = b(x^2 + y^2 \le a^2)$으로 이루어진 닫힌 표면



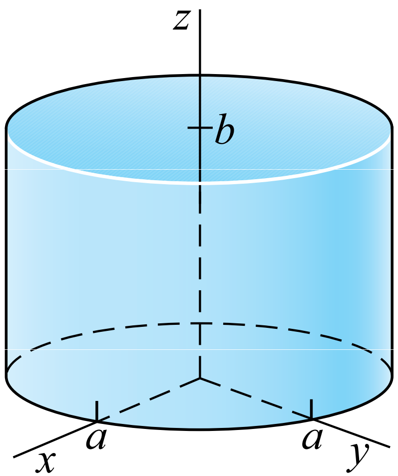
10.7 Triple Integrals. Divergence Theorem of Gauss (삼중적분. Gauss의 발산정리)

■ Ex. 1 **발산정리에 의한 면적분의 계산**

다음 적분을 계산하라.

$$I = \iint_S \left(x^3 dydz + x^2 ydzdx + x^2 zdxdy\right)$$

S : 원기둥 $x^2 + y^2 = a^2 (0 \le z \le b)$와 원판 $z = 0$과 $z = b\left(x^2 + y^2 \le a^2\right)$으로 이루어진 닫힌 표면



$$F_1 = x^3,\ F_2 = x^2 y,\ F_3 = x^2 z \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \mathbf{F} = 3x^2 + x^2 + x^2 = 5x^2$$

극좌표$(x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta)$ 적용 $\quad \Rightarrow \quad dxdydz = rdrd\theta dz$

$$I = \iiint_T 5x^2 dxdydz = \int_{z=0}^{b} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{a} \left(5r^2 \cos^2\theta\right) rdrd\theta dz$$

$$= 5 \int_{z=0}^{b} \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{a^4}{4} \cos^2\theta d\theta dz = 5 \int_{z=0}^{b} \frac{a^4 \pi}{4} dz = \frac{5\pi}{4} a^4 b$$

10.7 Triple Integrals. Divergence Theorem of Gauss (삼중적분. Gauss의 발산정리)

Example 2

- 발산의 좌표계 불변

- 삼중적분의 평균값 정리

  유한하고 단순연결된 영역 T의 연속함수 $f(x, y, z)$에 대해, T에서

  $$\iiint_T f(x, y, z)dV = f(x_0, y_0, z_0)V(T) \quad (V(T): T\text{의 체적})$$

  만족하는점 (x_0, y_0, z_0)가 있다.

- 발산의 불변

  영역에서 1차 편도함수가 연속인 벡터함수의 발산은 직각 좌표계의 특별한 선택에 독립이다.

10.7 Triple Integrals. Divergence Theorem of Gauss (삼중적분. Gauss의 발산정리)

PROBLEM SET 10.7

HW: 8, 24

10.8 Further Applications of the Divergence Theorem (발산정리의 응용)

■ Ex. 1 **유체흐름. 발산의 물리적 해석**

발산정리로부터 벡터의발산에 대한 직관적 해석을 얻을 수 있다. 이를 위해 상수의 밀도 $\rho = 1$을 가지는비압축성 유체의 일정한 흐름을 고려해 보자.

* 흐름은 임의의 점 P에서의 속도벡터장 $\mathbf{v}(P)$에 의해서 결정

* S : 공간상의 영역 T의 경계면

* $\mathbf{n}$: S의 외향 단위 법선벡터

1. 단위 시간당 S를 통하여 T로부터 외부로 흐르는 유체의 전체질량 : $\iint_S \mathbf{v} \bullet \mathbf{n} dA$

2. T의 외부로 흐르는 평균유출량 : $\dfrac{1}{V} \iint_S \mathbf{v} \bullet \mathbf{n} dA$

* 비압축성 장상류의 속도벡터 $\mathbf{v}$의 발산은 대응점에서의 그 흐름의 발생강도

* T내의 발생점이 없을 필요충분조건 : $\operatorname{div} \mathbf{v} = \mathbf{0}$

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(P) = \lim_{d(T)\to 0} \frac{1}{V(T)} \iint_{S(T)} \mathbf{v} \bullet \mathbf{n} dA \quad \Rightarrow \quad \iint_S \mathbf{v} \bullet \mathbf{n} dA = 0$$

10.8 Further Applications of the Divergence Theorem (발산정리의 응용)

- Ex. 2 **열전도 모델화. 열전도 방정식 혹은 확산 방정식**

  물리적 실험에서는 물체에서 열은 온도가 감소하는 방향으로 전도되며,전도율은 온도의 기울기에 비례한다는 것을 증명한다. 이것은 물체에서 열전도 속도 $\mathbf{v}$가 다음의 식과 같음을 의미한다.

  $\mathbf{v} = -K\,\mathrm{grad}\,U$ $\quad (U(x, y, z, t)$는 온도, t는 시간, K는 물체의 **열전도도**.)

  이러한 정보를 이용하여 **열전도 방정식** 혹은 **확산 방정식**이라고 불리는 열전도에 대한 수학적 모델을 세워라.

10.8 Further Applications of the Divergence Theorem (발산정리의 응용)

■ Ex. 2 **열전도 모델화. 열전도 방정식 혹은 확산 방정식**

물리적 실험에서는 물체에서 열은 온도가 감소하는 방향으로 전도되며, 전도율은 온도의 기울기에 비례한다는 것을 증명한다. 이것은 물체에서 열전도 속도 $\mathbf{v}$가 다음의 식과 같음을 의미한다.

$\mathbf{v} = -K\,\mathrm{grad}\,U$ ($U(x, y, z, t)$는 온도, t는 시간, K는 물체의 **열전도도**.)

이러한 정보를 이용하여 **열전도 방정식** 혹은 **확산 방정식**이라고 불리는 열전도에 대한 수학적 모델을 세워라.

1. 단위 시간당 T로부터 나가는 열량 : $\iint_S \mathbf{v} \bullet \mathbf{n}\,dA$

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,U) = \nabla^2 U = U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} \quad \Rightarrow \quad \iint_S \mathbf{v} \bullet \mathbf{n}\,dA = -K\iiint_T \mathrm{div}(\mathrm{grad}\,U)\,dxdydz = -K\iiint_T \nabla^2 U\,dxdydz$$

2. T내의 열의 전체량 : $H = \iiint_T \sigma\rho U\,dxdydz$ (σ:물체 재료의 비열, ρ:재료의 밀도)

H가 감소하는 시간 비율 : $-\dfrac{\partial H}{\partial t} = -\iiint_T \sigma\rho \dfrac{\partial U}{\partial t} dxdydz$

H가 감소하는 시간 비율은 T로부터 나가는 열의 양과 같아야 한다.

$$\Rightarrow \quad -\iiint_T \sigma\rho \frac{\partial U}{\partial t} dxdydz = -K\iiint_T \nabla^2 U\,dxdydz \quad \Rightarrow \quad \iiint_T \left(\sigma\rho \frac{\partial U}{\partial t} - K\nabla^2 U\right) dxdydz = 0 \qquad \therefore \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{K}{\sigma\rho}\nabla^2 U$$

10.8 Further Applications of the Divergence Theorem (발산정리의 응용)

- 퍼텐셜 이론. 조화함수
  - 라플라스 방정식 : $\nabla^2 f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$
  - **퍼텐셜 이론** : 라플라스 방정식 해에 대한 이론
  - **조화함수** : 연속적인 2차 편도함수를 갖는 라플라스 방정식의 해

- 조화함수의 기본성질

  구분적으로 매끄럽게 닫히고 방향을 줄 수 있는 곡면에서 조화함수의 법선도함수 적분값은 0이 된다.

10.8 Further Applications of the Divergence Theorem (발산정리의 응용)

■ Ex. 4 **Green 정리**

f 와 g가 스칼라 함수이고 $\mathbf{F} = f\,\mathrm{grad}\,g$가 영역 T에서 발산정리의 가정들을 만족한다고 가정

$$\mathrm{div}\,\mathbf{F} = \mathrm{div}\left(f\,\mathrm{grad}\,g\right) = \mathrm{div}\left(\left[f\frac{\partial g}{\partial x},\ f\frac{\partial g}{\partial y},\ f\frac{\partial g}{\partial z}\right]\right)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + f\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y} + f\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z} + f\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}\right) = f\,\nabla^2 g + \mathrm{grad}\,f \bullet \mathrm{grad}\,g$$

f가 스칼라 함수 $\Rightarrow$ $\mathbf{F} \bullet \mathbf{n} = \mathbf{n} \bullet \mathbf{F} = \mathbf{n} \bullet \left(f\,\mathrm{grad}\,g\right) = \left(\mathbf{n} \bullet \mathrm{grad}\,g\right) f$

$$\mathbf{n} \bullet \mathrm{grad}\,g = \frac{\partial g}{\partial n} \quad \Rightarrow \quad \iiint_T \left(f\,\nabla^2 g + \mathrm{grad}\,f \bullet \mathrm{grad}\,g\right) dV = \iint_S f\frac{\partial g}{\partial n}\,dA \quad \text{(Green의 첫 번째 공식)}$$

$$\iiint_T \left(f\,\nabla^2 g - g\nabla^2 f\right) dV = \iint_S \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right) dA \quad \text{(Green의 두 번째 공식)}$$

10.8 Further Applications of the Divergence Theorem (발산정리의 응용)

- 조화함수

  f : 영역 D에서 조화함수

  S : D내의 구분적으로 매끄럽고 닫힌 방향을 줄 수 있는 곡면

  T : D에 속하는 S를 감싸는 전체영역

  f가 S의 모든점에서 값이 0이다 $\Rightarrow$ f는 T에서 동일하게 0이다.

- 라플라스 방정식에 대한 유일성 정리

  T : 발산정리 가정을 만족하는 영역

  f : T와 T의 경계면 S를 포함하는 영역 D에서 조화함수

  $\Rightarrow$ f는 S상에서 값으로 T내에서 유일하게 결정된다.

- Dirichlet 문제의 유일성

  위의 가정이 만족되고 라플라스 방정식에 대한 Dirichlet 문제가 T에서 해를 가진다면,

  이 해는 유일하다

10.8 Further Applications of the Divergence Theorem (발산정리의 응용)

PROBLEM SET 10.8

HW: 7, 8

10.9 Stokes's Theorem

- Stokes의 정리(면적분과 선적분 간의 변환)

  S: 공간에서 구분적으로 매끄럽고 방향을 갖는 곡면

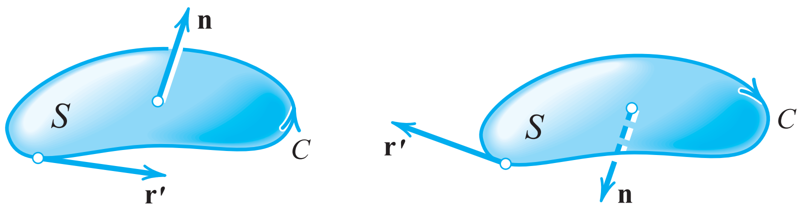
  C: S의 경계로 구분적으로 매끄럽고 단순히 닫힌 곡선

  $\mathbf{F}$: S를 포함하는 영역에서 연속인 편도함수를 가지는 연속인 벡터함수

$$\Rightarrow \iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F})\bullet\mathbf{n}\,dA = \oint_C \mathbf{F}\bullet\mathbf{r}'(s)\,ds$$

성분으로 표시하면

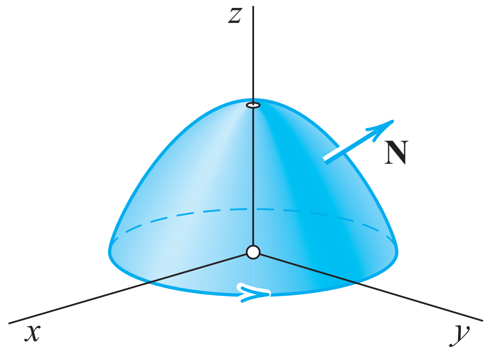
$$\Rightarrow \iint_R \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)N_1+\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x}\right)N_2+\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)N_3\right]du\,dv = \oint_{\bar{C}}\left(F_1dx+F_2dy+F_3dz\right)$$



10.9 Stokes's Theorem

■ Ex. 1 **Stokes의 정리 검증**

$F=[y,z,x]$와 포물면 $S: z=f(x,y)=1-(x^2+y^2)$, $z\geq 0$에 대해 검증하라.



10.9 Stokes's Theorem

■ Ex. 1 **Stokes의 정리 검증**

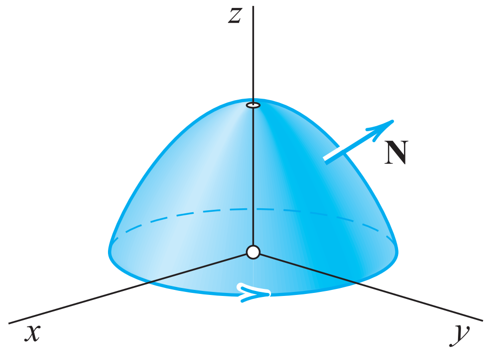
$F=[y,z,x]$와 포물면 $S : z=f(x,y)=1-(x^2+y^2)$, $z\geq 0$에 대해 검증하라.

Case 1 선적분

$$C : \mathbf{r}(s)=[\cos s,\ \sin s,\ 0] \Rightarrow \text{ 단위 접선벡터 : } \mathbf{r}'(s)=[-\sin s,\ \cos s,\ 0]$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(s))=[\sin s,\ 0,\ \cos s]$$

$$\therefore \oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}=\int_0^{2\pi}\mathbf{F}(\mathbf{r}(s))\bullet\mathbf{r}'(s)ds=\int_0^{2\pi}[(\sin s)(-\sin s+0+0)]ds=-\pi$$



10.9 Stokes's Theorem

Ex. 1 **Stokes의 정리 검증**

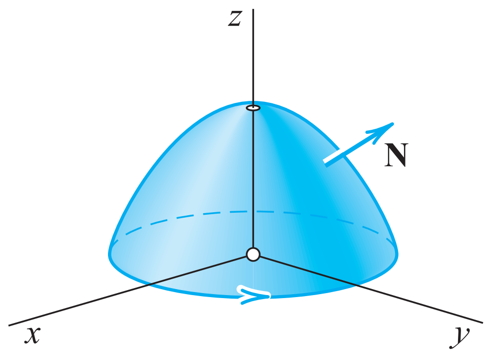
$F=[y,z,x]$와 포물면 $S: z=f(x,y)=1-(x^2+y^2)$, $z\geq 0$에 대해 검증하라.

Case 1 선적분

$C: \mathbf{r}(s)=[\cos s,\ \sin s,\ 0] \Rightarrow$ 단위 접선벡터 : $\mathbf{r}'(s)=[-\sin s,\ \cos s,\ 0]$

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(s))=[\sin s,\ 0,\ \cos s]$$

$$\therefore \oint_C \mathbf{F}\bullet d\mathbf{r}=\int_0^{2\pi}\mathbf{F}(\mathbf{r}(s))\bullet\mathbf{r}'(s)ds=\int_0^{2\pi}[(\sin s)(-\sin s+0+0)]ds=-\pi$$



Case 2 면적분

$F_1=y,\ F_2=z,\ F_3=x \quad\Rightarrow\quad \operatorname{curl}\mathbf{F}=\operatorname{curl}[F_1,\ F_2,\ F_3]=\operatorname{curl}[y,\ z,\ x]=[-1,\ -1,\ -1]$

S의 법선벡터 : $\mathbf{N}=\operatorname{grad}(z-f(x,y))=[2x,\ 2y,\ 1]$

$$\Rightarrow\quad (\operatorname{curl}\mathbf{F})\bullet\mathbf{N}=-2x-2y-1$$

$$\therefore \iint_S(\operatorname{curl}\mathbf{F})\bullet\mathbf{n}dA=\iint_R(\operatorname{curl}\mathbf{F})\bullet\mathbf{N}dxdy=\iint_R(-2x-2y-1)dxdy$$

$$=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}(-2r(\cos\theta+\sin\theta)-1)rdrd\theta=\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(-\frac{2}{3}(\cos\theta+\sin\theta)-\frac{1}{2}\right)d\theta=0+0-\frac{1}{2}(2\pi)=-\pi$$

10.9 Stokes's Theorem

PROBLEM SET 10.9

HW: 19