Engineering Mathematics II

Prof. Dr. Yong-Su Na

(32-206, Tel. 880-7204)

Text book: Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 9th Edition, Wiley (2006)

Ch. 11 Fourier Series, Integrals, and Transforms

11.1 Fourier Series

11.2 Functions of Any Period p=2L

11.3 Even and Odd Functions. Half-Range Expansions

11.4 Complex Fourier Series

11.5 Forced Oscillations

11.6 Approximation by Trigonometric Polynomials

11.7 Fourier Integral

11.8 Fourier Cosine and Sine Transforms

11.9 Fourier Transform. Discrete and Fast Fourier Transforms

Ch. 11 Fourier Series, Integrals, and Transforms

Ch. 11 Fourier Series, Integrals, and Transforms

- 주기현상의 예 : 모터, 회전 기계, 음파, 지구의 운동, 정상 조건하의 심장
- 푸리에 급수는 상미분 방정식과 편미분 방정식을 수반하는 문제를 해결하는 데 매우 중요한 도구이다.
- 푸리에 급수의 실용적 관심대상 : 불연속적(Discontinuous)인 주기함수
- 내용 : 푸리에 급수의 개념과 기법, 푸리에 적분(Fourier Integrals),

  푸리에 변환(Fourier Transform)

- 우리 주변에서 푸리에 급수는 매우 다양하게 이용됨:

파동의 간섭현상을 이용하여 소음도 없앨 수 있음. 예를 들어 여객기 밖은 엔진소음으로 매우 시끄럽지만 안은 조용할 수 있는 것은 엔진의 소음과 같은 주파수를 가지고 위상만 반대인 소음을 발생시켜 소음을 상쇄시키는 푸리에 급수 원리 덕분에 가능

11.1 Fourier Series (푸리에 급수)

● 주기함수(Periodic Function)

* 모든 실수 x에 대하여 정의

* 어떤 양수 p가 존재해서, 모든 x에 대하여 $f(x+p)=f(x)$

$\Leftrightarrow$ $f(x)$를 주기함수(Periodic Function)라 하고, p를 $f(x)$의 주기(Period)라한다.

- 주기함수인 예 : $\sin x,\ \cos x$
- 주기함수가 아닌 예 : $x,\ x^2,\ x^3,\ e^x,\ \cosh x,\ \ln x$

● 성질

- 함수 $f(x)$의 주기가 p이면, 모든 x에 대하여 $f(x+np)=f(x)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
- $f(x)$와 $g(x)$의 주기가 p이면, $af(x)+bg(x)$($a,\ b$는 임의 상수)의 주기도 p이다.

11.1 Fourier Series (푸리에 급수)

- 삼각급수(Trigonometric Series)
  - 삼각함수계(Trigonometric System)

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cdots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \cdots$$

  - 삼각급수(Trigonometric Series)

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \cdots = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx \right)$$

상수 $a_0,\ a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ \cdots$을 계수(Coefficients)라 한다.

  - 삼각급수가 수렴한다면 그 합은 주기가 2π인 주기함수이다.

11.1 Fourier Series (푸리에 급수)

- 푸리에 급수(Fourier Series) $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$
- 오일러 공식(Euler Formulas)

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx, \quad n = 1, 2, \cdots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nxdx, \quad n = 1, 2, \cdots$$

- 푸리에 계수(Fourier Coefficients) : 오일러 공식에 의해 주어진 값
- 푸리에 급수(Fourier Series) : 푸리에 계수를 갖는 삼각급수

11.1 Fourier Series (푸리에 급수)

■ Ex.1 **주기적인 직사각형파(Rectangular Wave)**

푸리에 계수를 구하라.

$$f(x) = \begin{cases} -k & (-\pi < x < 0) \\ k & (0 < x < \pi) \end{cases} \quad \text{이고} \qquad f(x + 2\pi) = f(x)$$

역학시스템의 외부에서 가해지는 힘이나, 전기회로에서의 기전력 등이 이런 종류의 함수이다.

11.1 Fourier Series (푸리에 급수)

- Ex.1 **주기적인 직사각형파(Rectangular Wave)**

  푸리에 계수를 구하라.

$$f(x)=\begin{cases}-k & (-\pi<x<0)\\ k & (0<x<\pi)\end{cases} \quad \text{이고} \qquad f(x+2\pi)=f(x)$$

역학시스템의 외부에서 가해지는 힘이나, 전기회로에서의 기전력 등이 이런 종류의 함수이다.

$$* \int_0^{\pi} f(x)dx = k\cdot\pi \text{이고} \int_{-\pi}^{0} f(x)dx=-k\cdot\pi \text{이므로} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\int_0^{\pi} f(x)dx+\int_{-\pi}^{0} f(x)dx=0 \quad \therefore\ a_0=0$$

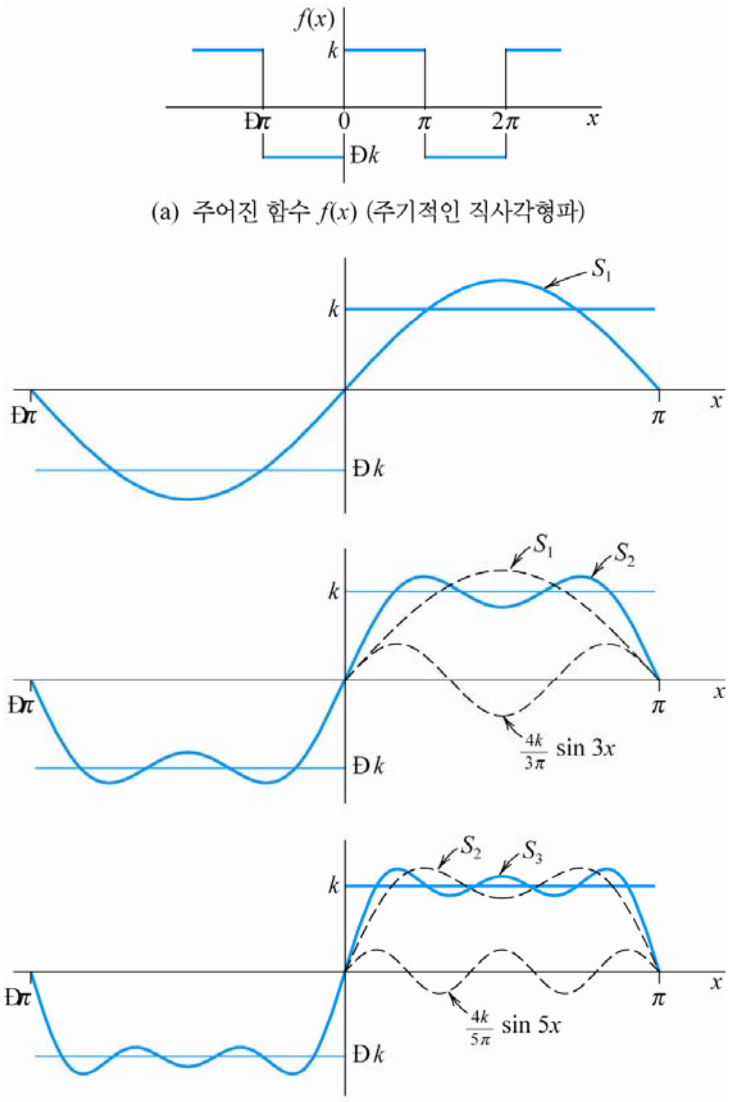
$$* \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x dx = 0 \qquad \therefore\ a_n=0$$

$$* b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} k\sin nx dx=\frac{2}{\pi}k\left.\frac{-\cos nx}{n}\right|_0^{\pi}=\frac{2k}{n\pi}(1-\cos n\pi)=\begin{cases}\dfrac{4k}{n\pi} & n\text{이 홀수}\\ 0 & n\text{이 짝수}\end{cases}$$

$$\therefore \text{ 푸리에 급수 : } \frac{4k}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\frac{1}{5}\sin 5x+\cdots\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=k=\frac{4k}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-+\cdots\right) \quad \Rightarrow \quad 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-+\cdots=\frac{\pi}{4}$$

11.1 Fourier Series (푸리에 급수)



(a) 주어진 함수 $f(x)$ (주기적인 직사각형파)

(b) 함수 $f(x)$ 푸리에 급수의 처음 세 개의 부분합

- 함수 f(x)가 x=0과 x=π에서 불연속이므로, 모든 부분합은 이 점에서 값이 0이 되며, 이 값은 극한값인 –k와 k의 산술평균임.

11.1 Fourier Series (푸리에 급수)

- **삼각함수 계의 직교성** 삼각함수 계는 구간 $-\pi \le x \le \pi$에서 직교한다.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = 0 \qquad (n \ne m)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = 0 \qquad (n \ne m)$$

Prove!

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = 0 \qquad (n \ne m \text{ 또는 } n = m)$$

- 푸리에 급수에 의한 표현

  * 주기가 2π인 주기함수

  * 구간 $-\pi \le x \le \pi$에서 구분연속(Piecewise Continuous)

  * 각 점에서 좌도함수(Left - hand Derivative)와 우도함수(Right - hand Derivative)를 갖는다.

  $\Rightarrow$ $f(x)$의 푸리에 급수는 수렴한다.

  급수의 합

  * 불연속인 점을 제외한 모든 점에서 급수의 합 $= f(x)$

  * 불연속인 점에서 급수의 합 $= f(x)$의 좌극한과 우극한의 평균

11.1 Fourier Series (푸리에 급수)

PROBLEM SET 11.1

HW: 16, 28, 29

11.2 Functions of Any Period p=2L (임의의 주기 p=2L을 가지는 함수)

- 주기 $p = 2L$인 주기함수 $f(x)$의 푸리에 급수 : $f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{L}x + b_n \sin\frac{n\pi}{L}x\right)$

  $f(x)$의 푸리에 계수 : $a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)dx$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n = 1, 2, \cdots$$

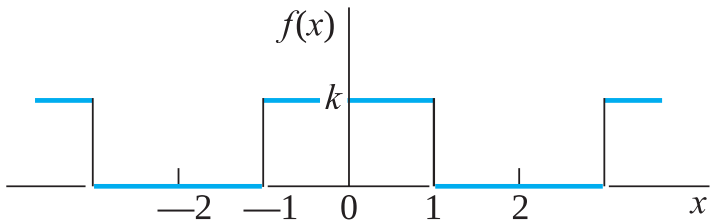
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, \quad n = 1, 2, \cdots$$

11.2 Functions of Any Period p=2L (임의의 주기 p=2L을 가지는 함수)

- Ex.1 주기적인 직사각형파

  푸리에 계수를 구하라.

$$f(x)=\begin{cases}0 & (-2<x<-1)\\ k & (-1<x<1)\\ 0 & (1<x<2)\end{cases}\qquad p=2L=4,\quad L=2$$

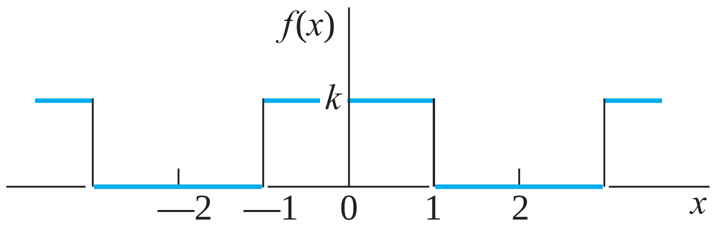


11.2 Functions of Any Period p=2L
(임의의 주기 p=2L을 가지는 함수)

- Ex.1 주기적인 직사각형파

  푸리에 계수를 구하라.

$$f(x)=\begin{cases}0 & (-2<x<-1)\\ k & (-1<x<1)\\ 0 & (1<x<2)\end{cases} \qquad p=2L=4,\quad L=2$$



$$* \quad a_0=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2} f(x)dx=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1} k dx=\frac{1}{4}\cdot 2k=\frac{k}{2}$$

$$* \quad a_n=\frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} k\cos\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{2k}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0 & n\text{이 짝수}\\ \dfrac{2k}{n\pi} & n=1,\ 5,\ 9,\ \cdots\\ -\dfrac{2k}{n\pi} & n=3,\ 7,\ 11,\ \cdots\end{cases}$$

$$* \quad \int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx=0 \quad \therefore\ b_n=0$$

∴ 푸리에 급수 : $f(x)=\dfrac{k}{2}+\dfrac{2k}{\pi}\left(\cos\dfrac{\pi}{2}x-\dfrac{1}{3}\cos\dfrac{3\pi}{2}x+\dfrac{1}{5}\cos\dfrac{5\pi}{2}x-+\cdots\right)$

11.2 Functions of Any Period p=2L
(임의의 주기 p=2L을 가지는 함수)

Example 2

Example 3

11.2 Functions of Any Period p=2L (임의의 주기 p=2L을 가지는 함수)

PROBLEM SET 11.2

HW: 13, 16

11.3 Even and Odd Functions. Half-Range Expansions (우함수와 기함수. 반구간 전개)

● 푸리에 코사인 급수, 푸리에 사인 급수

- 푸리에 코사인 급수(**Fourier Cosine Series**) : 주기가 $2L$인 우함수의 푸리에 급수

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x$$

푸리에 계수 $a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi}{L}xdx, \quad n = 1,\ 2,\ \cdots$

- 푸리에 사인 급수(**Fourier Sine Series**) : 주기가 $2L$인 기함수의 푸리에 급수

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

푸리에 계수 $b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx, \quad n = 1,\ 2,\ \cdots$

● 합과 스칼라곱

- 함수의 합의 푸리에 계수는 각각에 해당하는 푸리에 계수의 합과 같다.
- 함수 cf 의 푸리에 계수는 f 에 해당하는 푸리에 계수에 c를 곱한 것과 같다.

11.3 Even and Odd Functions. Half-Range Expansions (우함수와 기함수. 반구간 전개)

- Ex. 3 **톱니파**(Sawtooth Wave)

  푸리에 급수를 구하라.

  $f(x) = x + \pi \ (-\pi < x < \pi)$ 이고 $f(x + 2\pi) = f(x)$

11.3 Even and Odd Functions. Half-Range Expansions (우함수와 기함수. 반구간 전개)

- Ex. 3 **톱니파**(Sawtooth Wave)

 푸리에 급수를 구하라.

 $f(x) = x + \pi \ (-\pi < x < \pi)$ 이고 $f(x + 2\pi) = f(x)$

 $f_1 = x$와 $f_2 = \pi$라 하면 $f = f_1 + f_2$이다.

 * f_1의 푸리에 급수

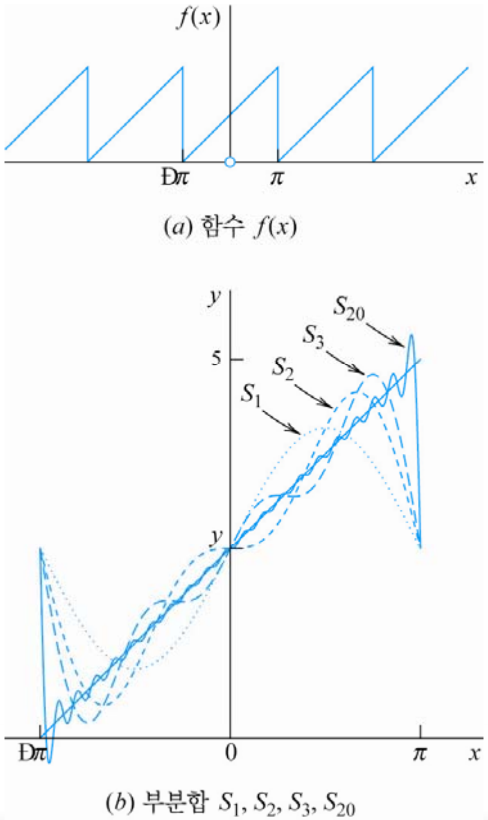
 f_1 은 기함수이므로 $a_n = 0 \ (n = 0, 1, 2, \cdots)$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f_1(x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\left.\frac{-x\cos nx}{n}\right|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx\right] = -\frac{2}{n}\cos n\pi$$

 * $f_2 = \pi$

$$\therefore\ f = \pi + 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - + \cdots\right)$$

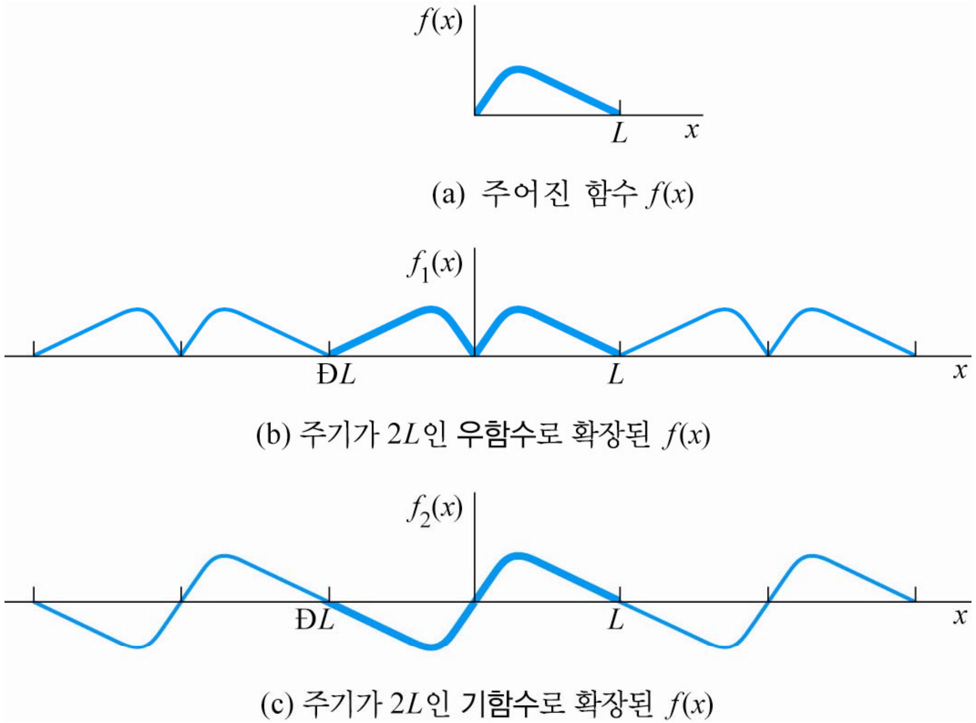


(a) 함수 f(x)
(b) 부분합 S1, S2, S3, S20

11.3 Even and Odd Functions. Half-Range Expansions (우함수와 기함수. 반구간 전개)

● **반구간 전개(Half Range Expansions)**

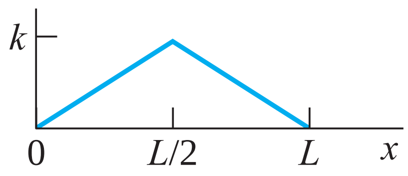
- **주기적인 우함수로 확장**(Even Periodic Extention)
- **주기적인 기함수로 확장**(Odd Periodic Extention)



11.3 Even and Odd Functions. Half-Range Expansions (우함수와 기함수. 반구간 전개)

■ Ex.4 **삼각형(Triangle)과 그의 반구간 전개**

두 종류로 반구간 전개를 하라.

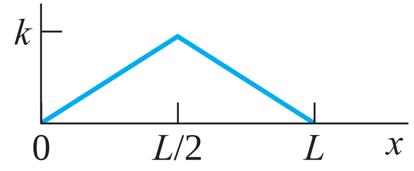


$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2k}{L}x & \left(0<x<\dfrac{L}{2}\right) \\ \dfrac{2k}{L}(L-x) & \left(\dfrac{L}{2}<x<L\right) \end{cases}$$

11.3 Even and Odd Functions. Half-Range Expansions (우함수와 기함수. 반구간 전개)

■ Ex.4 **삼각형(Triangle)과 그의 반구간 전개**

두 종류로 반구간 전개를 하라.



$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2k}{L}x & \left(0<x<\dfrac{L}{2}\right)\\[2mm] \dfrac{2k}{L}(L-x) & \left(\dfrac{L}{2}<x<L\right)\end{cases}$$

1. 주기적 우함수로 확장.

$$a_0=\frac{1}{L}\left[\frac{2k}{L}\int_0^{L/2}x\,dx+\frac{2k}{L}\int_{L/2}^{L}(L-x)dx\right]=\frac{k}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{L}\left[\frac{2k}{L}\int_0^{L/2}x\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx+\frac{2k}{L}\int_{L/2}^{L}(L-x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx\right]=\frac{4k}{n^2\pi^2}\left(2\cos\frac{n\pi}{L}-\cos n\pi-1\right)$$

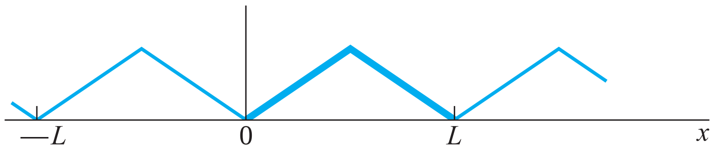
$$\therefore\ f(x)=\frac{k}{2}-\frac{16k}{\pi^2}\left(\frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi}{L}x+\frac{1}{6^2}\cos\frac{6\pi}{L}x+\cdots\right)$$

11.3 Even and Odd Functions. Half-Range Expansions (우함수와 기함수. 반구간 전개)

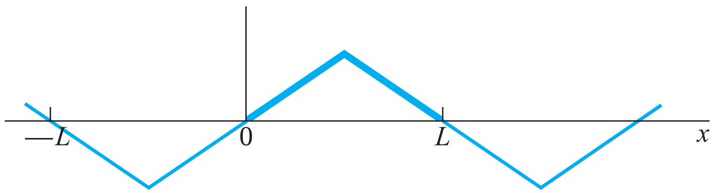
2. 주기적 기함수로 확장.

$$b_n = \frac{2}{L}\left[\frac{2k}{L}\int_0^{L/2} x\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx + \frac{2k}{L}\int_{L/2}^{L}(L-x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx\right] = \frac{8k}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$\therefore\ f(x) = \frac{8k}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi}{L}x - \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi}{L}x + \frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi}{L}x - + \cdots\right)$$



(a) 우함수 확장



(b) 기함수 확장

11.3 Even and Odd Functions. Half-Range Expansions (우함수와 기함수. 반구간 전개)

PROBLEM SET 11.3

HW: 10, 11, 19