Engineering Mathematics II

Prof. Dr. Yong-Su Na

(32-206, Tel. 880-7204)

Text book: Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 9th Edition, Wiley (2006)

Ch. 12 Partial Differential Equations (PDEs)

Ch. 12 Partial Differential Equations (PDEs)

12.7 Modeling: Membrane, Two-Dimensional Wave Equation (모델화: 박막, 2차원 파동방정식)

- **Physical Assumptions**

1. 단위면적당 박막의 질량은 일정하다. 박막은 완벽하게 유연하여 휠 때 어떠한 저항도 없다.
2. 박막을 펼쳐서 그 모든 가장자리를 xy 평면 위에 고정시켜 놓았다. 박막을 펼칠 때 생기는 단위길이당 장력 T는 모든 점에서 그리고 모든 방향에서 같으며 운동 중에 변하지 않는다.
3. 운동 중 박막의 변위는 박막의 크기에 비하여 작으며, 모든 경사각도 작다.

12.7 Modeling: Membrane, Two-Dimensional Wave Equation (모델화: 박막, 2차원 파동방정식)

● 힘으로부터의 모델(2차원 파동방정식)인 편미분방정식의 유도

- 박막의 변위와 경사각이 작으므로그 부분의 변의 길이는 각각 $\Delta x,\ \Delta y$와 같다.
- 장력 T는 단위길이당의 힘이므로그 부분의 양변에 작용하는 힘은 각각 $T\Delta x,\ T\Delta y$이다.
- 박막은 완전히 유연하므로힘은 매순간 움직이는 박막에 대해 접선 방향으로 작용한다.

힘의 수평성분

경사각이 작다 $\Rightarrow$ $\cos\alpha \approx 1,\ \cos\beta \approx 1$

힘의 합력 : $-T\Delta x\cos\alpha + T\Delta x\cos\beta \approx 0$

$$-T\Delta y\cos\alpha + T\Delta y\cos\beta \approx 0$$

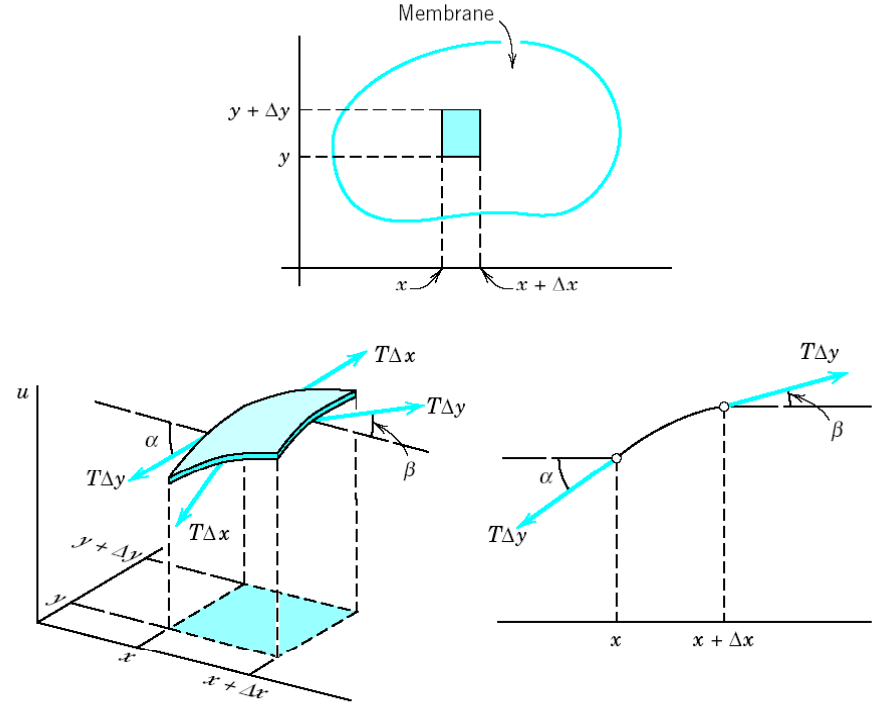


Fig. 298. Vibrating membrane

12.7 Modeling: Membrane, Two-Dimensional Wave Equation (모델화: 박막, 2차원 파동방정식)

힘의 수직성분

좌측과 유측의 변에서 수직으로 작용하는힘의 합력 :

$$-T\Delta y \sin\alpha + T\Delta y \sin\beta = T\Delta y(\sin\beta - \sin\alpha) \approx T\Delta y(\tan\beta - \tan\alpha) = T\Delta y\left[u_x(x+\Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)\right]$$

나머지 두 변에 수직으로작용하는 힘의 합력 :

$$T\Delta x\left[u_y(x_1, y+\Delta y) - u_y(x_2, y)\right]$$

Newton의 제 2법칙으로부터 편미분방정식의 유도.

$$\rho\Delta x\Delta y\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\Delta y\left[u_x(x+\Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)\right] + T\Delta x\left[u_y(x_1, y+\Delta y) - u_y(x_2, y)\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\left[\frac{u_x(x+\Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)}{\Delta x} + \frac{u_y(x_1, y+\Delta y) - u_y(x_2, y)}{\Delta y}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \text{(2차원파동방정식)}$$

12.2 Modeling: Vibrating String, Wave Equation (모델화: 진동하는 현, 파동방정식)

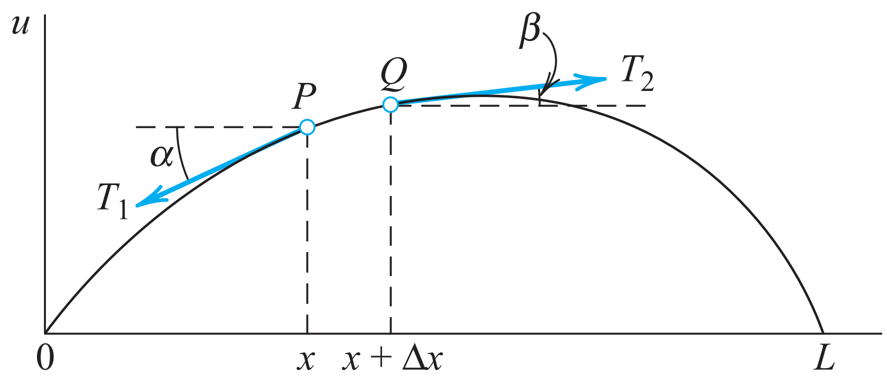
- 수평방향의 힘의 합력

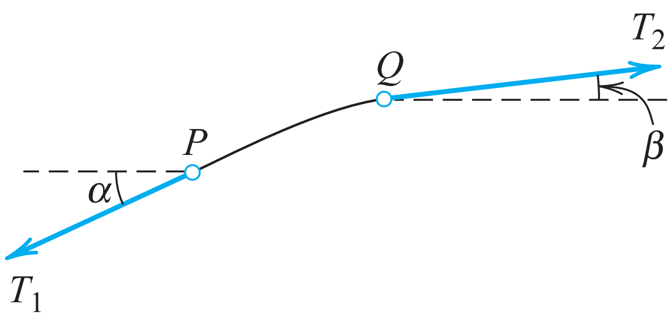
$$-T_1 \cos\alpha + T_2 \cos\beta = 0$$

$$\Rightarrow \ \therefore \ T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta = T(\text{상수})$$

- 수직방향의 힘의 합력
  - Newton의 제2법칙 적용 $\quad -T_1 \sin\alpha + T_2 \sin\beta = \rho \Delta x\, u_{tt}$

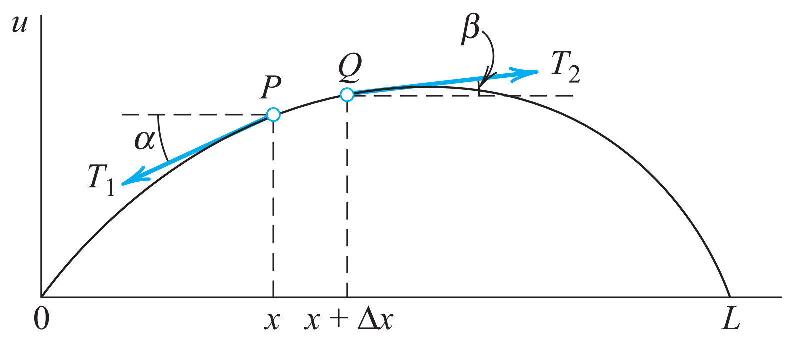
$$\Rightarrow \frac{T_2 \sin\beta}{T_2 \cos\beta} - \frac{T_1 \sin\alpha}{T_1 \cos\alpha} = \frac{\rho}{T} \Delta x\, u_{tt} \ \Rightarrow \ \tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho}{T} \Delta x\, u_{tt}$$

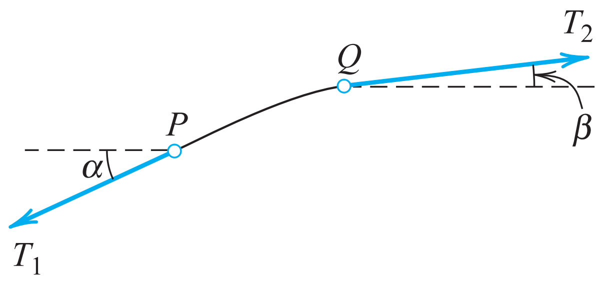




12.2 Modeling: Vibrating String, Wave Equation (모델화: 진동하는 현, 파동방정식)

- 정리





$$\Rightarrow \frac{T_2 \sin\beta}{T_2 \cos\beta} - \frac{T_1 \sin\alpha}{T_1 \cos\alpha} = \frac{\rho}{T} \Delta x\, u_{tt} \quad \Rightarrow \quad \tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho}{T} \Delta x\, u_{tt}$$

$\tan\alpha$: 점 x에서의 현의 기울기 $\Rightarrow$ $\tan\alpha = \left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x}$

$\tan\beta$: 점 $x + \Delta x$에서의 현의 기울기 $\Rightarrow$ $\tan\beta = \left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x+\Delta x}$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x+\Delta x} - \left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x}\right] = \frac{\rho}{T} u_{tt} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \text{(1차원 파동방정식)}, \quad c^2 = \frac{\rho}{T}$$

12.8 Rectangular Membrane. Double Fourier Series (직사각형의 박막. 이중 푸리에 급수)

- **문제**
  - **2차원 파동방정식 :** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$
  - **경계조건(Boundary Condition) :** 경계에서 u=0
  - **초기조건(Initial Condition) :** $u(x, y, 0) = f(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = g(x, y)$
- **문제해결 방법**
  - 변수분리법

    $u(x, y, t) = F(x, y)G(t)$라고 한 뒤 $F(x, y) = H(x)Q(y)$로 두면 세 개의 상미분방정식을 얻는다.
  - 경계조건을 만족하는 상미분방정식의 해를 구한다.
  - 이중급수의 형태로 만든다.

12.8 Rectangular Membrane. Double Fourier Series (직사각형의 박막. 이중 푸리에 급수)

- **1단계. 파동방정식으로부터 세 개의 상미분방정식의 유도**

$$u(x,y,t)=F(x,y)G(t) \quad \Rightarrow \quad F\ddot{G}=c^2\left(F_{xx}G+F_{yy}G\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\ddot{G}}{c^2G}=\frac{1}{F}\left(F_{xx}+F_{yy}\right)=-\nu^2$$

$$\therefore\ F_{xx}+F_{yy}+\nu^2F=0(2\text{차원 Helmholtz 방정식}), \quad \ddot{G}+c^2\nu^2G=0$$

$$F(x,y)=H(x)Q(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2H}{dx^2}Q=-\left(H\frac{d^2Q}{dy^2}+\nu^2HQ\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{H}\frac{d^2H}{dx^2}=-\frac{1}{Q}\left(\frac{d^2Q}{dy^2}+\nu^2Q\right)=-k^2$$

$$\therefore\ \frac{d^2H}{dx^2}+k^2H=0, \quad \frac{d^2Q}{dy^2}+p^2Q=0 \quad \left(p^2=\nu^2-k^2\right)$$

12.8 Rectangular Membrane. Double Fourier Series (직사각형의 박막. 이중 푸리에 급수)

- **2단계. 경계조건의 만족**

$$\frac{d^2H}{dx^2}+k^2H=0,\quad \frac{d^2Q}{dy^2}+p^2Q=0 \quad\Rightarrow\quad H(x)=A\cos kx+B\sin kx,\quad Q(y)=C\cos py+D\sin py$$

경계조건

$$H(0)=H(a)=0 \quad\Rightarrow\quad k=\frac{m\pi}{a},\quad H_m(x)=\sin\frac{m\pi x}{a}$$

$$Q(0)=Q(b)=0 \quad\Rightarrow\quad p=\frac{n\pi}{b},\quad Q_n(y)=\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$\therefore\ F_{mn}(x,y)=H_m(x)Q_n(y)=\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

12.8 Rectangular Membrane. Double Fourier Series (직사각형의 박막. 이중 푸리에 급수)

- **2단계. 경계조건의 만족**

$$\frac{d^2H}{dx^2}+k^2H=0,\quad \frac{d^2Q}{dy^2}+p^2Q=0 \quad\Rightarrow\quad H(x)=A\cos kx+B\sin kx,\quad Q(y)=C\cos py+D\sin py$$

경계조건

$$H(0)=H(a)=0 \quad\Rightarrow\quad k=\frac{m\pi}{a},\quad H_m(x)=\sin\frac{m\pi x}{a}$$

$$Q(0)=Q(b)=0 \quad\Rightarrow\quad p=\frac{n\pi}{b},\quad Q_n(y)=\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$\therefore\ F_{mn}(x,y)=H_m(x)Q_n(y)=\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$\ddot{G}+\lambda^2G=0,\quad \lambda=c\nu$이고 $p^2=\nu^2-k^2$이므로 $\lambda=c\sqrt{k^2+p^2}$이다.

$$k=\frac{m\pi}{a},\quad p=\frac{n\pi}{b}\quad\Rightarrow\quad \lambda_{mn}=c\pi\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2},\quad G_{mn}(t)=B_{mn}\cos\lambda_{mn}t+B_{mn}{}^*\sin\lambda_{mn}t$$

$$\therefore\ u_{mn}(x,y,t)=(B_{mn}\cos\lambda_{mn}t+B_{mn}{}^*\sin\lambda_{mn}t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

12.8 Rectangular Membrane. Double Fourier Series (직사각형의 박막. 이중 푸리에 급수)

- **3단계. 모델의 해. 이중푸리에 급수**

$$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_{mn}(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_{mn}\cos\lambda_{mn}t+B_{mn}{}^{*}\sin\lambda_{mn}t\right)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

초기조건의충족 : $u(x,y,0)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}=f(x,y)$

$K_m(y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\sin\frac{n\pi y}{b}$ 라 하면 $\sum_{m=1}^{\infty}K_m(y)\sin\frac{m\pi x}{a}=f(x,y)$

$$K_m(y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\sin\frac{n\pi y}{b}\quad\Rightarrow\quad B_{mn}=\frac{2}{b}\int_0^b K_m(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}K_m(y)\sin\frac{m\pi x}{a}=f(x,y)\quad\Rightarrow\quad K_m(y)=\frac{2}{a}\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}dx$$

$$\therefore\quad B_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy$$

12.8 Rectangular Membrane. Double Fourier Series (직사각형의 박막. 이중 푸리에 급수)

- 3단계. 모델의 해. 이중푸리에 급수

$$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_{mn}(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_{mn}\cos\lambda_{mn}t+B_{mn}{}^{*}\sin\lambda_{mn}t\right)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$\text{초기조건의충족}:\ u(x,y,0)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}=f(x,y)$$

$$K_m(y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\sin\frac{n\pi y}{b}\ \text{라 하면}\ \sum_{m=1}^{\infty}K_m(y)\sin\frac{m\pi x}{a}=f(x,y)$$

$$K_m(y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\sin\frac{n\pi y}{b}\quad\Rightarrow\quad B_{mn}=\frac{2}{b}\int_0^b K_m(y)\sin\frac{n\pi y}{b}\,dy$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}K_m(y)\sin\frac{m\pi x}{a}=f(x,y)\quad\Rightarrow\quad K_m(y)=\frac{2}{a}\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\,dx$$

$$\therefore\quad B_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dxdy$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}{}^{*}\lambda_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}=g(x,y)\Rightarrow B_{mn}{}^{*}=\frac{4}{ab\lambda_{mn}}\int_0^a\int_0^b g(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dxdy$$

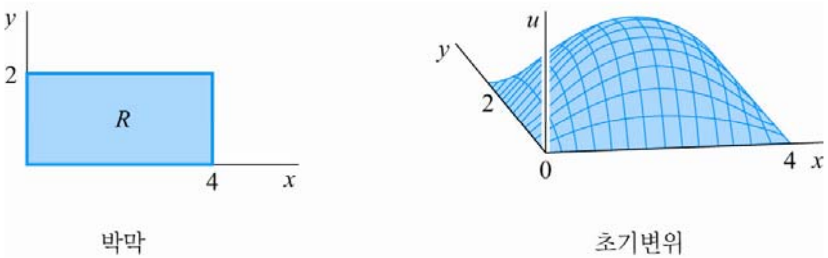
12.8 Rectangular Membrane. Double Fourier Series (직사각형의 박막. 이중 푸리에 급수)

■ Ex. 3 **직사각형 박막의 진동**

장력이 $12.5\,{}^{\text{lb}}\!/_{\text{ft}}$ 밀도가 $2.5\,{}^{\text{slugs}}\!/_{\text{ft}^2}$ (가벼운 고무의 경우), 초기속도가 0이며 초기변위가

$$f(x,y) = 0.1\left(4x - x^2\right)\left(2y - y^2\right)\ \text{ft}$$

일 때, 변의 길이가 각각 $a = 4\,\text{ft}$와 $b = 2\,\text{ft}$인 직사각형 박막에 작용하는 박막의 진동을 구하라.



$$c^2 = \frac{T}{\rho} = \frac{12.5}{2.5} = 5\left[{}^{\text{ft}^2}\!/_{\sec^2}\right]$$

$$B_{mn} = \frac{4}{4\cdot 2}\int_0^2\!\!\int_0^4 0.1\left(4x - x^2\right)\left(2y - y^2\right)\sin\frac{m\pi x}{4}\sin\frac{n\pi y}{2}\,dx\,dy = \frac{256\cdot 32}{20m^3n^3\pi^6} \approx \frac{0.426050}{m^3n^3} \qquad (m,n \text{ 모두 홀수})$$

$$\therefore\ u(x,y,t) = 0.426050\sum_{m,\ n\ odd}\sum \frac{1}{m^3n^3}\cos\left(\frac{\sqrt{5}\pi}{4}\sqrt{m^2+4n^2}\right)t\sin\frac{m\pi x}{4}\sin\frac{n\pi y}{2}$$

$$= 0.426050\left(\cos\frac{\sqrt{5}\pi\sqrt{5}}{4}t\sin\frac{\pi x}{4}\sin\frac{\pi y}{2} + \frac{1}{27}\cos\frac{\sqrt{5}\pi\sqrt{37}}{4}t\sin\frac{\pi x}{4}\sin\frac{3\pi y}{2} + \frac{1}{27}\cos\frac{\sqrt{5}\pi\sqrt{13}}{4}t\sin\frac{3\pi x}{4}\sin\frac{\pi y}{2} + \cdots\right)$$

12.8 Rectangular Membrane. Double Fourier Series (직사각형의 박막. 이중 푸리에 급수)

PROBLEM SET 12.8

HW: 23