Engineering Mathematics II

Prof. Dr. Yong-Su Na

(32-206, Tel. 880-7204)

Text book: Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics,
9th Edition, Wiley (2006)

Ch. 12 Partial Differential Equations (PDEs)

Ch. 12 Partial Differential Equations (PDEs)

12.1 Basic Concepts

12.2 Modeling: Vibrating String, Wave Equations

12.3 Solution by Separating Variables. Use of Fourier Series

12.4 D'Alembert's Solution of the Wave Equation. Characteristics

12.5 Heat Equation: Solution by Fourier Series

12.6 Heat Equation: Solution by Fourier Integrals and Transforms

12.7 Modeling: Membrane, Two-Dimensional Wave Equation

12.8 Rectangular Membrane. Double Fourier Series

12.9 Laplacian in Polar Coordinates. Circular Membrane.
Fourier-Bessel Series

12.10 Laplace's Equation in Cylindrical and Spherical Coordinates. Potential

12.11 Solution of PDEs by Laplace Transforms

12.5 Heat Equation: Solution by Fourier Series (열전도방정식)

- **Heat Equation(열전도방정식) :** $$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u, \quad c^2 = \frac{K}{\sigma\rho}$$
  - c^2 : 열확산계수(Thermal Diffusivity)
  - K : 열전도도(Thermal Conductivity)
  - σ : 비열
  - ρ : 물체의밀도

Fig. 291. Bar under consideration

- **문제**
  - **1차원 열전도방정식 :** $$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
  - **경계조건(Boundary Condition) :** $u(0,t) = u(L,t) = 0$ (모든 t에 대하여)
  - **초기조건(Initial Condition) :** $u(x,0) = f(x), \quad (0 \le x \le L)$

12.5 Heat Equation: Solution by Fourier Series (열전도방정식)

- **1단계. 열전도방정식으로부터 두 개의 상미분방정식의 유도**

$$u(x,y) = F(x)G(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''(x)G(t), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = F(x)\dot{G}(t)$$

$$\therefore \; F(x)\dot{G}(t) = c^2 F''(x)G(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{G}(t)}{c^2 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} \left(= -p^2\right)$$

$$\therefore \; F''(x) + p^2 F(x) = 0, \quad \ddot{G}(t) + c^2 p^2 G(t) = 0$$

12.5 Heat Equation: Solution by Fourier Series (열전도방정식)

- **2단계. 경계조건의 만족**

경계조건 $u(0,t)=F(0)G(t)=0,\quad u(L,t)=F(L)G(t)=0$을 적용

$$\Rightarrow \quad F(0)=F(L)=0$$

$$\therefore\ F''(x)+p^2F(x)=0,\quad F(0)=F(L)=0$$

$$F''(x)+p^2F(x)=0 \quad \Rightarrow \quad F(x)=A\cos px+B\sin px$$

$$F(0)=A=0,\quad F(L)=A\cos pL+B\sin pL=0 \quad \Rightarrow \quad B\sin pL=0 \quad \Rightarrow \quad p=\frac{n\pi}{L}\ (n:\text{정수})$$

$$\therefore\ F(x)=F_n(x)=\sin\frac{n\pi}{L}x\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$\dot{G}(t)+\lambda_n{}^2G(t)=0,\quad \lambda_n=cp=\frac{cn\pi}{L} \quad \Rightarrow \quad G_n(t)=B_ne^{-\lambda_n{}^2t}$$

$$u_n(x,t)=B_n\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-\lambda_n{}^2t} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

12.5 Heat Equation: Solution by Fourier Series (열전도방정식)

- **3단계. 전체 문제에 대한 해. 푸리에 급수**

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-\lambda_n^2 t}\qquad\left(\lambda_n=\frac{cn\pi}{L}\right)$$

초기조건의충족 : $u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{L}=f(x)$

푸리에 사인 급수 적용 $\Rightarrow$ $B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$

12.5 Heat Equation: Solution by Fourier Series (열전도방정식)

■ Ex. 1 **Sinuroidal Initial Temperature**

측면이 절연된 길이 $80\,\mathrm{cm}$ 구리막대의 초기온도가 $100\sin(\pi x/80)^{\circ}\,\mathrm{C}$이고, 양끝이 $0^{\circ}\,\mathrm{C}$로 유지될 때

온도 $u(x,t)$를 구하라. 이때 막대의 최고온도가 $50^{\circ}\,\mathrm{C}$로 떨어지는데 걸리는 시간은 얼마인가?

구리에 대한 물리적 데이터 : 밀도 $8.92\,\mathrm{gm}/\mathrm{cm}^3$, 비열 $0.092\,\mathrm{cal}/\mathrm{gm}^{\circ}\mathrm{C}$, 열전도도 $0.095\,\mathrm{cal}/\mathrm{cm\,sec}\,^{\circ}\mathrm{C}$

12.5 Heat Equation: Solution by Fourier Series (열전도방정식)

■ Ex. 1 **Sinuroidal Initial Temperature**

측면이 절연된 길이 80cm 구리막대의 초기온도가 $100\sin(\pi x/80)^{\circ}$C이고, 양끝이 0°C로 유지될 때 온도 $u(x,t)$를 구하라. 이때 막대의 최고온도가 50°C로 떨어지는데 걸리는 시간은 얼마인가?

구리에 대한 물리적 데이터 : 밀도 $8.92\,\mathrm{gm/cm^3}$, 비열 $0.092\,\mathrm{cal/gm^{\circ}C}$, 열전도도 $0.095\,\mathrm{cal/cm\,sec\,^{\circ}C}$

초기조건에 의하여

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{80}=f(x)=100\sin\frac{\pi x}{80} \quad\Rightarrow\quad B_1=100,\ B_2=B_3=\cdots=0$$

$$\lambda^2=\frac{c^2\pi^2}{L^2}\left(=\frac{K}{\sigma\rho}\right)=\frac{0.95}{0.092\cdot 8.92}=1.158\left[\mathrm{cm^2/sec}\right] \quad\Rightarrow\quad \lambda_1^{\,2}=1.158\cdot\frac{9.870}{80^2}=0.001785\left[\mathrm{sec^{-1}}\right]$$

$$\therefore\ u(x,t)=100\sin\frac{\pi x}{80}e^{-0.001785t}$$

$$100e^{-0.001785t}=50 \quad\Rightarrow\quad t=\frac{\ln 0.5}{-0.001785}=388[\mathrm{sec}]\approx 6.5[\mathrm{min}]$$

12.5 Heat Equation: Solution by Fourier Series (열전도방정식)

- Ex. 4 **Bar with Insulated Ends. Eigenvalue 0**

  경계조건을 양 끝이 단열되었을 때의 조건으로 바꾸고 열전도 방정식의 해를 구하라.

12.5 Heat Equation: Solution by Fourier Series (열전도방정식)

■ Ex. 4 **Bar with Insulated Ends. Eigenvalue 0**

경계조건을 양 끝이 단열되었을 때의 조건으로 바꾸고 열전도 방정식의 해를 구하라.

물리적인 실험에 의하면 전열속도는 온도의 기울기(Gradient)에 비례한다.
양 끝이 단열되어열흐름이 없다면 기울기는 0이다.
경계조건 : $u_x(0,t)=0, \quad u_x(L,t)=0 \quad$ (모든 t에 대하여)

$$u_x(0,t)=F'(0)G(t)=0, \quad u_x(L,t)=F'(L)G(t)=0 \quad \Rightarrow \quad F'(0)=F'(L)=0$$

$$F(x)=A\cos px+B\sin px \quad \Rightarrow \quad F'(x)=-Ap\sin px+Bp\cos px$$

$$\therefore\ F'(0)=Bp=0, \quad F'(L)=-Ap\sin pL+Bp\cos pL=0 \quad \Rightarrow \quad B=0, \quad p=p_n=\frac{n\pi}{L}$$

$$\therefore\ F_n(x)=\cos\frac{n\pi x}{L}$$

12.5 Heat Equation: Solution by Fourier Series (열전도방정식)

$$u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = A_n \cos\frac{n\pi x}{L} e^{-\lambda_n{}^2 t} \qquad \left(\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}\right)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{L} e^{-\lambda_n{}^2 t} \qquad \left(\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}\right)$$

초기조건으로부터 $u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{L} = f(x)$

$$\Rightarrow \quad A_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx, \quad A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

12.5 Heat Equation: Solution by Fourier Series (열전도방정식)

- **Steady Two-Dimensional Heat Problems. Laplacs's Equation**
  - 2차원 열전도 방정식 : $\dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$
  - 열전도가 **정상적**(Steady) $\Rightarrow$ 시간에 무관, $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$

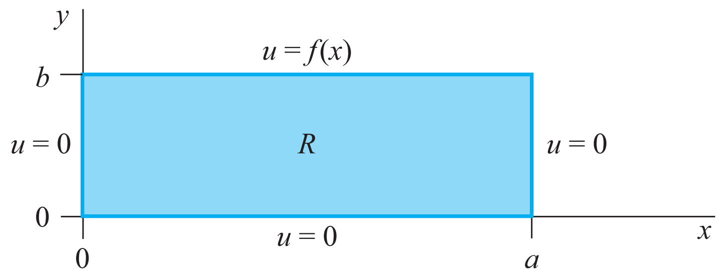
    $\Rightarrow \quad \nabla^2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$(라플라스 방정식)

- **Boundary Value Problem, BVP(경계값 문제)**
  - Dirichlet 문제 : C 위에서 u의 값이 주어지는 경우
  - Neumann 문제 : C 위에서 법선도함수 $u_n = \dfrac{\partial u}{\partial n}$의 값이 주어지는 경우
  - 혼합 경계값 문제, Robin 문제 : C의 한부분에서는 u의 값이 주어지고,

    C의 나머지 부분에서 u_n의 값이 주어지는 경우

12.5 Heat Equation: Solution by Fourier Series (열전도방정식)

- **Dirichlet Problem in a Rectangular *R***



변수분리법 적용

$$u(x,y) = F(x)G(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2F}{dx^2}G = -F\frac{d^2G}{dy^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{F}\frac{d^2F}{dx^2} = -\frac{1}{G}\frac{d^2G}{dy^2} = -k$$

왼쪽 및 오른쪽변의 경계조건 : $F(0) = F(a) = 0$

$\therefore \; k = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$ 일 때, $\quad F(x) = F_n(x) = \sin\frac{n\pi}{a}x, \; G(y) = G_n(y) = A_n e^{\frac{n\pi y}{a}} + B_n e^{-\frac{n\pi y}{a}} \qquad n = 1, \; 2, \; \cdots$

아랫변에서의경계조건 : $G_n(0) = 0$

$$\therefore \; A_n + B_n = 0 \quad \Rightarrow \quad G_n(y) = A_n\left(e^{\frac{n\pi y}{a}} - e^{-\frac{n\pi y}{a}}\right) = 2A_n \sinh\frac{n\pi y}{a}$$

$$\Rightarrow \quad u_n(x,y) = F_n(x)G_n(y) = A_n * \sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a}$$

12.5 Heat Equation: Solution by Fourier Series (열전도방정식)

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n*\sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a}$$

위변에서 경계조건 : $u(x,b)=f(x)$

$$\Rightarrow \quad u(x,b)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n*\sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi b}{a}$$

$$\Rightarrow \quad b_n=A_n*\sinh\frac{n\pi b}{a}=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx \quad \Rightarrow \quad A_n*=\frac{2}{a\sinh\frac{n\pi b}{a}}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx$$

12.5 Heat Equation: Solution by Fourier Series (열전도방정식)

PROBLEM SET 12.5

HW: 13, 23, 25, 34

12.6 Heat Equation: Solution by Fourier Integrals and Transforms (열전도방정식)

- **Bars of Infinite Length**

- **Heat Equation:**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- **Initial Condition:**

$$u(x,0) = f(x)$$

- $u(x,t) = F(x)G(t) \quad \Rightarrow \quad F'' + p^2 F = 0, \quad \dot{G} + c^2 p^2 G = 0$

- $F(x) = A\cos px + B\sin px, \quad G(t) = e^{-c^2 p^2 t}$

  $\Rightarrow \quad u(x,t;p) = FG = (A\cos px + B\sin px)e^{-c^2 p^2 t}$

12.6 Heat Equation: Solution by Fourier Integrals and Transforms (열전도방정식)

- **Use of Fourier Integrals**

$$u(x,t) = \int_0^\infty u(x,t;p)\,dp = \int_0^\infty (A\cos px + B\sin px)e^{-c^2p^2t}\,dp$$

12.6 Heat Equation: Solution by Fourier Integrals and Transforms (열전도방정식)

- **Use of Fourier Integrals**

$$u(x,t)=\int_0^\infty u(x,t;p)dp=\int_0^\infty (A\cos px+B\sin px)e^{-c^2p^2t}dp$$

초기조건으로부터 $u(x,0)=\int_0^\infty (A\cos px+B\sin px)dp=f(x)$

$$\Rightarrow\quad A(p)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos pv\,dv,\quad B(p)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin pv\,dv \;\Rightarrow\; u(x,0)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(px-pv)dv\right]dp$$

$$\therefore\; u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\left[\int_0^\infty e^{-c^2p^2t}\cos(px-pv)dp\right]dv$$

12.6 Heat Equation: Solution by Fourier Integrals and Transforms (열전도방정식)

- **Use of Fourier Integrals**

$$u(x,t)=\int_0^\infty u(x,t;p)dp=\int_0^\infty (A\cos px+B\sin px)e^{-c^2p^2t}dp$$

초기조건으로부터 $u(x,0)=\int_0^\infty (A\cos px+B\sin px)dp=f(x)$

$$\Rightarrow\quad A(p)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos pv\,dv,\quad B(p)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\sin pv\,dv\quad\Rightarrow\quad u(x,0)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\cos(px-pv)dv\right]dp$$

$$\therefore\ u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\left[\int_0^\infty e^{-c^2p^2t}\cos(px-pv)dp\right]dv$$

공식 $\int_0^\infty e^{-s^2}\cos 2bs\,ds=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}$을 적용하면

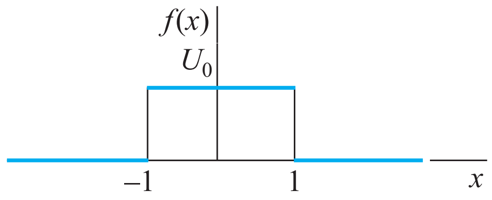
$$u(x,t)=\frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\exp\left\{-\frac{(x-v)^2}{4c^2t}\right\}dv$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x+2cz\sqrt{t}\right)e^{-z^2}dz$$

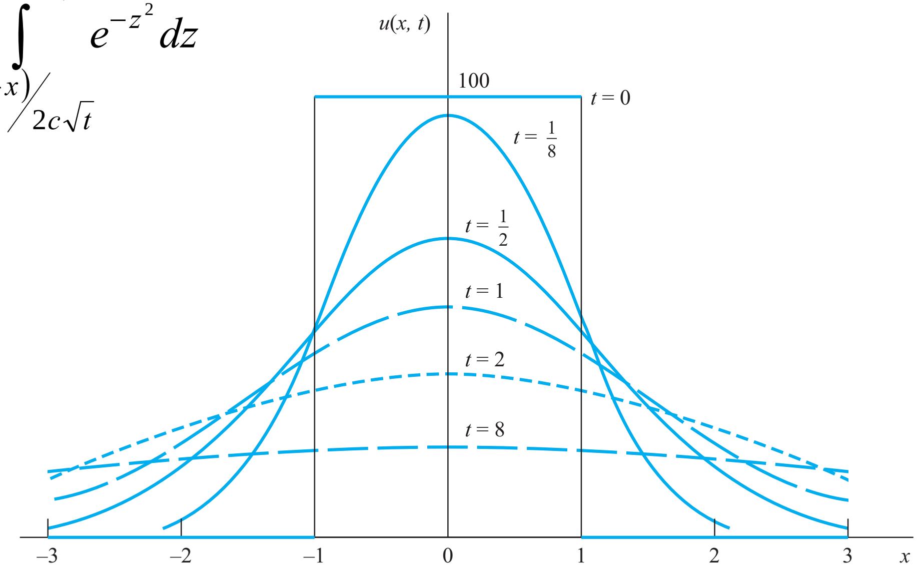
12.6 Heat Equation: Solution by Fourier Integrals and Transforms (열전도방정식)

■ **Ex. 1 Temperature in an Infinite Bar**

초기함수 $f(x)=\begin{cases} U_0 = 일정 & (|x|<1) \\ 0 & (|x|>1) \end{cases}$ 일 때, 무한히 긴 막대의 온도를 구하라.



$$u(x,t)=\frac{U_0}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-1}^{1}\exp\left\{-\frac{(x-v)^2}{4c^2t}\right\}dv=\frac{U_0}{\sqrt{\pi}}\int_{-(1+x)/2c\sqrt{t}}^{(1-x)/2c\sqrt{t}} e^{-z^2}\,dz$$



12.6 Heat Equation: Solution by Fourier Integrals and Transforms (열전도방정식)

- **Use of Fourier Transforms**

■ Ex. 2 **Temperature in the Infinite Bar in Example 1**

푸리에 변환을 사용하여 예제 1을 풀어라.

$\hat{u} = \mathcal{F}(u)$를 x의 함수로 간주하자.

열전도방정식 $\Rightarrow$ $\mathcal{F}(u_t) = c^2 \mathcal{F}(u_{xx}) = c^2(-w^2)\mathcal{F}(u) = -c^2 w^2 \hat{u}$ P. 522

$$\mathcal{F}(u_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_t e^{-iwx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-iwx} dx = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -c^2 w^2 \hat{u}$$

$$\therefore \ \hat{u}(w,t) = C(w) e^{-c^2 w^2 t}$$

초기조건 : $\hat{u}(w,0) = \hat{f}(w) \quad \Rightarrow \quad \hat{u}(w,0) = C(w) = \hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) e^{-ivw} dv$

$$\therefore \ \hat{u}(w,t) = \hat{f}(w) e^{-c^2 w^2 t}$$

$$\Rightarrow u(w,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{-c^2 w^2 t} e^{iwx} dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2 w^2 t} e^{i(wx - wv)} dw \right] dv = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(v) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2 w^2 t} \cos(wx - wv) dw \right] dv$$

12.6 Heat Equation: Solution by Fourier Integrals and Transforms (열전도방정식)

■ Ex. 3 **Solution in Example 1 by the Method of Convolution**

합성곱에 의해 예제 1의 열전도 문제를 풀어라.

$$u(w,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(w)e^{-c^2w^2t}e^{iwx}dw,\qquad \hat{g}(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-c^2w^2t}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(w)\hat{g}(w)e^{iwx}dw=(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(p)g(x-p)dp$$

$$\mathcal{F}\left(e^{-ax^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{w^2}{4a}}\quad\Rightarrow\quad \mathcal{F}\left(e^{-\frac{x^2}{4c^2t}}\right)=\sqrt{2c^2t}\,e^{-c^2w^2t}=\sqrt{2c^2t}\sqrt{2\pi}\,\hat{g}(w)$$

$$\therefore\ u(w,t)=(f*g)(x)=\frac{1}{2x\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}f(p)\exp\left\{-\frac{(x-p)^2}{4c^2t}\right\}dp$$

12.6 Heat Equation: Solution by Fourier Integrals and Transforms (열전도방정식)

PROBLEM SET 12.6

HW: 10 (e), (f), (g)

12.9 Laplacian in Polar Coordiantes. Circular Membrane. Fourier-Bessel Series (극좌표에서의 라플라스 연산자. 원형박막. 푸리에-베셀 급수)

- **극좌표에서의 라플라스 연산자**

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} \xrightarrow{\text{극좌표 적용}} \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan\frac{y}{x} \Rightarrow r_x = \frac{x}{r}, \quad \theta_x = -\frac{y}{r^2} \Rightarrow r_{xx} = \frac{y^2}{r^3}, \quad \theta_{xx} = -\frac{2xy}{r^4}$$

$$u_x = u_r r_x + u_\theta \theta_x, \quad u_y = u_r r_y + u_\theta \theta_y$$

$$\Rightarrow u_{xx} = \frac{x^2}{r^2} u_{rr} - 2\frac{xy}{r^3} u_{r\theta} + \frac{y^2}{r^4} u_{\theta\theta} + \frac{y^2}{r^3} u_r + 2\frac{xy}{r^4} u_\theta,$$

$$u_{yy} = \frac{y^2}{r^2} u_{rr} + 2\frac{xy}{r^3} u_{r\theta} + \frac{x^2}{r^4} u_{\theta\theta} + \frac{x^2}{r^3} u_r - 2\frac{xy}{r^4} u_\theta$$

$$\therefore \nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

12.9 Laplacian in Polar Coordiantes. Circular Membrane. Fourier-Bessel Series (극좌표에서의 라플라스 연산자. 원형박막. 푸리에-베셀 급수)

- Circular Membrane (**원형 박막**)

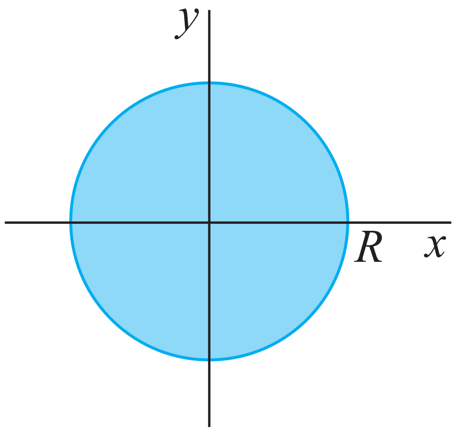
- 극좌표에서 2차원 파동방정식 : $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) \qquad c^2 = \dfrac{T}{\rho}$

- 반지름이 *R*인 박막을 고려하여 방사상 대칭인 해를 구하자.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

$$u(R,t) = 0 \quad (\text{모든 } t \geq 0 \text{에 대해})$$

$$u(r,0) = f(r), \quad u_r(r,0) = g(r)$$



12.9 Laplacian in Polar Coordiantes. Circular Membrane. Fourier-Bessel Series (극좌표에서의 라플라스 연산자. 원형박막. 푸리에-베셀 급수)

- **1단계. 파동방정식으로부터 두 개의 상미분방정식의 유도**

$$u(r,t) = W(r)G(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\ddot{G}}{c^2 G} = \frac{1}{W}\left(W'' + \frac{1}{r}W'\right) = -k^2$$

$$\therefore\ W'' + \frac{1}{r}W' + k^2 W = 0(s = kr\text{로 두면 Bessel 방정식}), \quad \ddot{G} + \lambda^2 G = 0, \quad \lambda = ck$$

$$s = kr \quad \Rightarrow \quad W' = \frac{dW}{dr} = \frac{dW}{ds}\frac{ds}{dr} = k\frac{dW}{ds},$$

Section 5.5

$$W'' = \frac{d}{dr}\left(k\frac{dW}{ds}\right) = \frac{d}{ds}\left(k\frac{dW}{ds}\right)\cdot\frac{ds}{dr} = k^2\frac{d^2W}{ds^2}$$

$$\therefore\ \frac{d^2W}{ds^2} + \frac{1}{s}\frac{dW}{ds} + W = 0(\text{Bessel 방정식})$$

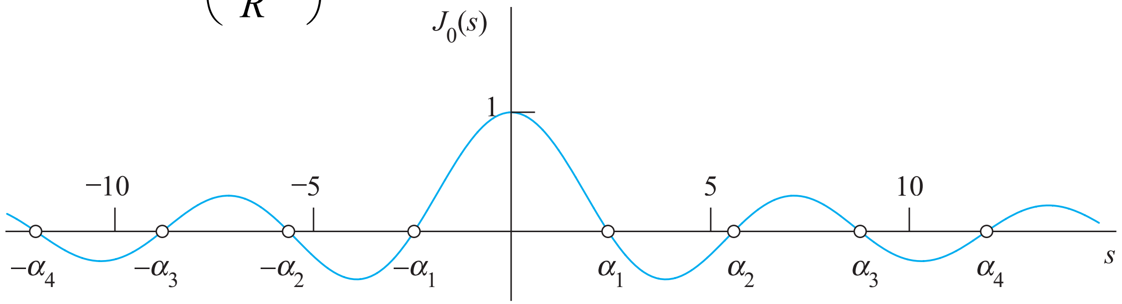
12.9 Laplacian in Polar Coordiantes. Circular Membrane. Fourier-Bessel Series (극좌표에서의 라플라스 연산자. 원형박막. 푸리에-베셀 급수)

● **2단계. 경계조건의 만족**

$$\frac{d^2W}{ds^2}+\frac{1}{s}\frac{dW}{ds}+W=0 \;\Rightarrow\; W(r)=J_0(s)=J_0(kr)$$

경계조건 : $W(R)=J_0(kR)=0 \quad\Rightarrow\quad k=k_m=\dfrac{\alpha_m}{R}$

$$\therefore\; W_m(r)=J_0(k_m r)=J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right)$$



$$\ddot{G}+\lambda^2 G=0,\qquad \lambda=ck \qquad\Rightarrow\qquad \lambda_m=\frac{c\alpha_m}{R},\quad G_m(t)=A_m\cos\lambda_m t+B_{mn}\sin\lambda_m t$$

$$\therefore\; u_m(r,t)=(A_m\cos\lambda_m t+B_{mn}\sin\lambda_m t)J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right)$$

12.9 Laplacian in Polar Coordiantes. Circular Membrane. Fourier-Bessel Series (극좌표에서의 라플라스 연산자. 원형박막. 푸리에-베셀 급수)

- **3단계. 전체 문제에 대한 해**

$$u(r,t)=\sum_{m=1}^{\infty}u_m(r,t)=\sum_{m=1}^{\infty}(A_m\cos\lambda_m t+B_{mn}\sin\lambda_m t)J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right)$$

초기조건의 충족 : $u(r,0)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right)=f(r)$

Fourier - Bessel 급수 적용 $\Rightarrow$ $\therefore$ $A_m=\dfrac{2}{R^2 J_1^{\,2}(\alpha_m)}\displaystyle\int_0^R rf(r)J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right)dr$

Section 5.8 (10)

12.9 Laplacian in Polar Coordiantes. Circular Membrane. Fourier-Bessel Series (극좌표에서의 라플라스 연산자. 원형박막. 푸리에-베셀 급수)

■ Ex. 1 **Vibration of a Circular Membrane**

반지름이 $1\mathrm{ft}$이고 밀도가 $2\mathrm{slugs}/\mathrm{ft}^2$인 원형 박막에 작용하는 장력이 $8\mathrm{lb}/\mathrm{ft}$이고,

초기속도가 0이며 초기변위가 $f(r)=1-r^2[\mathrm{ft}]$일 때, 그 진동을 구하라.

$$c^2=\frac{T}{\rho}=\frac{8}{2}=4\left[\mathrm{ft}^2/\mathrm{sec}^2\right]$$

$$\text{초기속도}=0 \quad \Rightarrow \quad B_m=0$$

$$R=1$$

$$J_2(\alpha_m)=\frac{2}{\alpha_m}J_1(\alpha_m)-J_0(\alpha_m)=\frac{2}{\alpha_m}J_1(\alpha_m)$$

$$\Rightarrow \quad A_m=\frac{2}{J_1^2(\alpha_m)}\int_0^1 r(1-r^2)J_0(\alpha_m r)dr=\frac{4J_2(\alpha_m)}{\alpha_m{}^2J_1^2(\alpha_m)}=\frac{8}{\alpha_m{}^3J_1(\alpha_m)}$$

$$\therefore \ f(r)=1.108J_0(2.4048r)-0.140J_0(5.5201r)+0.045J_0(8.6537r)-\cdots$$

12.9 Laplacian in Polar Coordiantes. Circular Membrane. Fourier-Bessel Series (극좌표에서의 라플라스 연산자. 원형박막. 푸리에-베셀 급수)

PROBLEM SET 12.9

HW: 4, 16

12.10 Laplace's Equation in Cylindrical and Spherical Coordinates. Potential (원통좌표 및 구좌표에서의 라플라스 방정식. 포텐셜)

- **Laplace's Equation:** $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$
- $\nabla^2 u$: u의 라플라스 연산자 (Lapacian)
- **Potential Theory (퍼텐셜이론)** : 라플라스 방정식의 해에 관한 이론
- **Harmonic Functions (조화함수)** : 연속인 2계 편도함수를 갖는 라플라스 방정식의 해
- **중력**, **정전기학**, 정상상태 **열흐름** 및 **유체흐름** 등에서 등장

12.10 Laplace's Equation in Cylindrical and Spherical Coordinates. Potential (원통좌표 및 구좌표에서의 라플라스 방정식. 포텐셜)

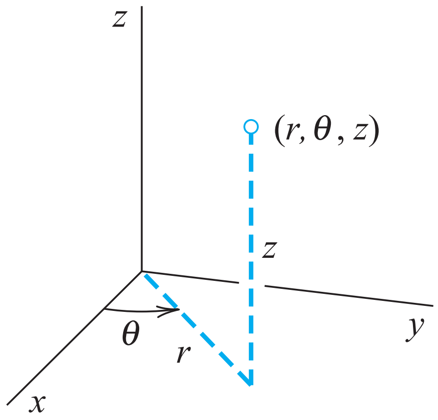
- 원통좌표에서의 라플라스 연산자

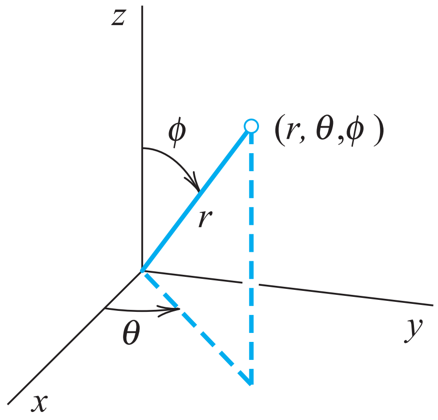
$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \xrightarrow{\text{원통좌표 적용}} \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

- 원통좌표에서의 라플라스 연산자

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \xrightarrow{\text{구좌표 적용}} \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\cot\phi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{1}{r^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

$$= \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\sin\phi\frac{\partial u}{\partial \phi}\right) + \frac{1}{\sin^2\phi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right]$$





12.10 Laplace's Equation in Cylindrical and Spherical Coordinates. Potential (원통좌표 및 구좌표에서의 라플라스 방정식. 포텐셜)

- **구좌표에서의 경계값 문제** – θ와 무관하다고 가정

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\sin\phi\frac{\partial u}{\partial \phi}\right)\right] = 0$$

$$u(R,\phi) = f(\phi)$$

$$\lim_{r\to\infty} u(r,\phi) = 0$$

변수분리

$$u(r,\phi) = G(r)H(\phi) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{G}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dG}{dr}\right) = -\frac{1}{H\sin\phi}\frac{d}{d\phi}\left(\sin\phi\frac{dH}{d\phi}\right) = k$$

$$\therefore\ r^2\frac{d^2G}{dr^2} + 2r\frac{dG}{dr} = kG, \quad \frac{1}{\sin\phi}\frac{d}{d\phi}\left(\sin\phi\frac{dH}{d\phi}\right) + kH = 0$$

12.10 Laplace's Equation in Cylindrical and Spherical Coordinates. Potential (원통좌표 및 구좌표에서의 라플라스 방정식. 포텐셜)

1. $r^2 \dfrac{d^2G}{dr^2} + 2r\dfrac{dG}{dr} = kG$에서 $k = n(n+1)$라 하자.

$$r^2 \frac{d^2G}{dr^2} + 2r\frac{dG}{dr} - n(n+1)G = 0 \ : \text{오일러–코시방정식}$$

Section 2.5

$$a(a-1) + 2a - n(n+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = n,\ -n-1 \quad \Rightarrow \quad G_n(r) = r^n, \quad G_n{}^*(r) = \frac{1}{r^{n+1}}$$

2. $\dfrac{1}{\sin\phi}\dfrac{d}{d\phi}\left(\sin\phi \dfrac{dH}{d\phi}\right) + kH = 0$에서 $\cos\phi = w$라 치환하자.

$$\frac{d}{d\phi} = \frac{d}{dw}\frac{dw}{d\phi} = -\sin\phi\frac{d}{dw} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dw}\left[(1-w^2)\frac{dH}{dw}\right] + n(n+1)H = 0$$

$$\Rightarrow \quad (1-w^2)\frac{d^2H}{dw^2} - 2w\frac{dH}{dw} + n(n+1)H = 0 \ : \text{Legendre 방정식}$$

$$\therefore\ H = P_n(w) = P_n(\cos\phi), \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

$$\therefore\ u_n(r,\phi) = A_n r^n P_n(\cos\phi), \qquad u_n{}^*(r,\phi) = \frac{B_n}{r^{n+1}} P_n(\cos\phi)$$

12.10 Laplace's Equation in Cylindrical and Spherical Coordinates. Potential (원통좌표 및 구좌표에서의 라플라스 방정식. 포텐셜)

- **Fourier-Legendre 급수의 사용**

- **내부문제 : 구 S의 내부 퍼텐셜**

$$u(r,\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(r,\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n r^n P_n(\cos\phi) \qquad (r \le R)$$

S상에서의 Dirichlet 조건 적용 $\Rightarrow$ $u(R,\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n R^n P_n(\cos\phi)=f(\phi)$

Fourier - Legendre 급수 적용 $\Rightarrow$ $A_n R^n=\dfrac{2n+1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}\tilde{f}(w)P_n(w)dw$ **Section 5.8 (7)**

$$\Rightarrow \therefore\ A_n=\frac{2n+1}{2R^n}\int_0^{\pi}f(\phi)P_n(\cos\phi)\sin\phi\, d\phi$$

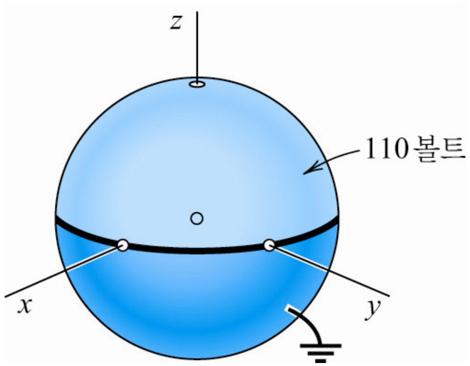
- **외부문제 : 구 S의 외부 퍼텐셜** $u(r,\phi)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{r^{n+1}}P_n(\cos\phi) \qquad (r \ge R)$

$$\therefore\ B_n=\frac{2n+1}{2}R^{n+1}\int_0^{\pi}f(\phi)P_n(\cos\phi)\sin\phi\, d\phi$$

12.10 Laplace's Equation in Cylindrical and Spherical Coordinates. Potential (원통좌표 및 구좌표에서의 라플라스 방정식. 포텐셜)

■ Ex. 1 Spherical Capacitor

반지름 1피트의 두 금속 반구로 구성된 구형 축전기의 내부 및 외부의 퍼텐셜을 구하라. 두 반구는 절연을 위하여 작은 틈으로 분리되어 있고, 윗쪽의 반구는 110볼트로 유지되며, 아랫쪽은 접지되어 있다.



주어진 경계조건은 $f(\phi)=\begin{cases}110 & (0\le\phi\le\pi/2)\\ 0 & (\pi/2\le\phi\le\pi)\end{cases}$

$R=1 \quad \Rightarrow$

$$A_n=\frac{2n+1}{2}\cdot 110\int_0^{\pi/2}P_n(\cos\phi)\sin\phi\, d\phi=\frac{2n+1}{2}\cdot 110\int_0^1 P_n(w)dw$$

$$=55(2n+1)\sum_{m=0}^{M}(-1)^m\frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!}\int_0^1 w^{n-2m}dw$$

$$=\frac{55(2n+1)}{2^n}\sum_{m=0}^{M}(-1)^m\frac{(2n-2m)!}{m!(n-m)!(n-2m+1)!}$$

∴ 구의 내부 퍼텐셜 : $u(r,\phi)=55+\frac{165}{2}rP_1(\cos\phi)-\frac{385}{8}r^3P_3(\cos\phi)+\cdots$

∴ 구의 외부 퍼텐셜 : $u(r,\phi)=\frac{55}{r}+\frac{165}{2r^2}P_1(\cos\phi)-\frac{385}{8r^4}P_3(\cos\phi)+\cdots$

12.10 Laplace's Equation in Cylindrical and Spherical Coordinates. Potential (원통좌표 및 구좌표에서의 라플라스 방정식. 포텐셜)

PROBLEM SET 12.10

HW: 1, 11

12.11 Solution of PDEs by Laplace Transforms (라플라스 변환에 의한 편미분방정식의 해)

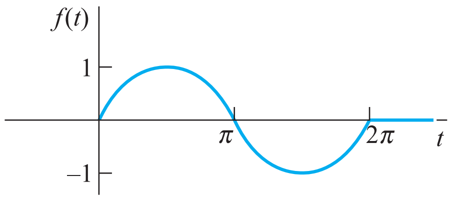
- **라플라스 변환에 의하여 두 개의 독립변수를 갖는 편미분방정식의 해를 얻는 과정**

  - 두 변수 중 하나에 관하여 라플라스 변환을 한다. 그러면 미지함수의 변환식에 대한 상미분방정식이 얻어진다. 주어진 경계 및 초기 조건은 변환된 방정식에 통합된다.
  - 상미분방정식을 풀어서 미지함수의 변환식을 얻는다.
  - 구한 변환식에 역변환을 적용하여 주어진 문제의 해를 얻는다.

12.11 Solution of PDEs by Laplace Transforms (라플라스 변환에 의한 편미분방정식의 해)

■ Ex. 1 **반무한 현**

다음 조건을 따르는 탄성현의 변위 $w(x,t)$를 구하라.



(i) 현은 처음에 $x = 0$에서 ∞까지 x축 상에 정지해 있다.(반무한현)

(ii)시간 $t > 0$에서는 현의 왼쪽 끝은 다음과 같은 방식으로운동한다.

$$w(0,t) = f(t) = \begin{cases} \sin t & (0 \le t \le 2\pi) \\ 0 & (\text{그 밖의 경우}) \end{cases}$$

(iii)또한 $t \ge 0$에 대하여 $\lim_{x\to\infty} w(x,t) = 0$이다.

물론 무한히 긴 현은 있을 수 없지만, 이 모델은 그 오른쪽 끝이 x축의 먼 곳에서 고정된 긴 현 또는 밧줄(중량을 무시할 수 있는)을 나타낸 것이다.

파동방정식 : $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ $\qquad c^2 = \dfrac{T}{\rho}$

경계 조건 : $w(0,t) = f(t), \quad \lim_{x\to\infty} w(x,t) = 0 \qquad (t \ge 0)$

초기 조건 : $w(x,0) = 0, \quad w_t(x,0) = 0$

12.11 Solution of PDEs by Laplace Transforms (라플라스 변환에 의한 편미분방정식의 해)

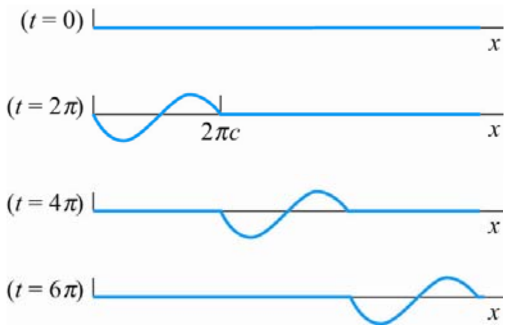
t에 관하여 라플라스 변환 $\Rightarrow$ $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right\} = s^2\mathcal{L}\{w\} - sw(x,0) - w_t(x,0) = c^2\mathcal{L}\left\{\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right\}$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\infty e^{-st}w(x,t)dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{L}\{w(x,t)\} \quad \Rightarrow \quad s^2\mathcal{L}\{w\} = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{L}\{w(x,t)\}$$

$$W = \mathcal{L}\{w\} \quad \Rightarrow \quad s^2 W = c^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{s^2}{c^2}W = 0 \quad \Rightarrow \quad W(x,s) = A(s)e^{sx/c} + B(s)e^{-sx/c}$$

$$W(0,s) = \mathcal{L}\{w(0,t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s), \quad \lim_{x\to\infty} W(x,s) = \lim_{x\to\infty}\int_0^\infty e^{-st}w(x,t)dt = \int_0^\infty e^{-st}\lim_{x\to\infty} w(x,t)dt = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} W(x,s) = A(s) = 0, \quad W(0,s) = A(s) + B(s) = F(s)$$



$$\therefore\ W(x,s) = F(s)e^{-sx/c}$$

역변환 $\Rightarrow$ $w(x,t) = f\left(t - \dfrac{x}{c}\right)u\left(t - \dfrac{x}{c}\right) = \begin{cases} \sin\left(t - \dfrac{x}{c}\right) & \left(\dfrac{x}{c} < t < \dfrac{x}{c} + 2\pi\right) \\ 0 & (\text{그 밖의 경우}) \end{cases}$