Engineering Mathematics II

Prof. Dr. Yong-Su Na
(32-206, Tel. 880-7204)

Text book: Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 9^{th} Edition, Wiley (2006)

Ch. 16 Laurent Series. Residue Integration

Ch. 16 Laurent Series, Residue Integration
(Laurent 급수. 유수적분)

- 내용 : Laurent 급수, 유수적분

$$1/(1-z)$$

$$\text{(a)}\quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1\text{일 때 유효})$$

$$\text{(b)}\quad \frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z(1-z^{-1})} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \cdots \quad (|z| > 1\text{일 때 유효})$$

16.1 Laurent Series (Laurent 급수)

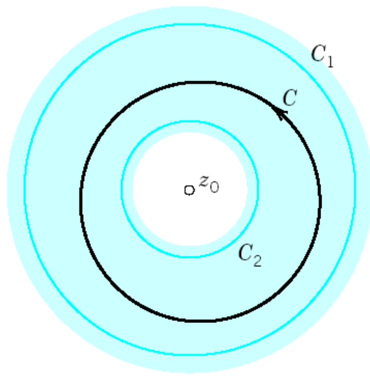
- **Laurent 급수 :** 음이 아닌 거듭제곱과 음수의 거듭제곱으로 이루어진 급수

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots+\frac{b_1}{z-z_0}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\cdots$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z^*)}{(z^*-z_0)^{n+1}}dz^*,\quad b_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C(z^*-z_0)^{n-1}f(z^*)dz^*$$

C : z_0를 둘러싸는 단순 닫힌 경로

적분방향 : 반시계방향



- **Laurent의 정리**

$f(z)$: 중심이 z_0인 두 동심원 C_1, C_2와 동심원 사이의 환형을 포함하는 영역에서 해석적

$\Rightarrow$ $f(z)$는 Laurent 급수로 표현 가능

- **주부(Principal Part)**

z_0가 C_2 내에서 $f(z)$의 유일한 특이점일때, Laurent 급수의 음의 거듭제곱의 급수

16.1 Laurent Series (Laurent 급수)

- **유일성**(Uniqueness)
  - 수렴환형 안에서의 Laurent 급수는 유일하다.
  - 같은 중심을 갖는 두 개의 환형 안에서 서로 다른 Laurent 급수를 가질 수 있다.

- Laurent **급수의 다른 표현**

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z^*)}{(z-z_0)^{n+1}} dz^* \ (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$$

■ Ex. 1 **Maclaurin 급수의 사용**

$z^{-5}\sin z$의 중심이 0인 Laurent 급수를 구하라.

$$z^{-5}\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-4} = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{6z^2} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} z^2 + - \cdots \quad (|z| > 0)$$

수렴 환형 : 원점을 제외한전 복소평면

0에서 급수의 주부 : $z^{-4} - \frac{1}{6} z^{-2}$

16.1 Laurent Series (Laurent 급수)

■ Ex. 2 대입

$z^2 e^{1/z}$의 중심이 0인 Laurent 급수를 구하라.

$$z^2 e^{1/z} = z^2\left(1+\frac{1}{1!z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots\right) = z^2+z+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!z}+\frac{1}{4!z^2}+\cdots$$

■ Ex. 3 전개

$1/(1-z)$을 (a) z의 음수가 아닌 거듭제곱으로, (b) z의 음수 거듭제곱으로 전개하라.

(a) $\dfrac{1}{1-z} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ $\qquad (|z|<1$일 때 유효$)$

(b) $\dfrac{1}{1-z} = \dfrac{-1}{z(1-z^{-1})} = -\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = -\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\cdots$ $\qquad (|z|>1$일 때 유효$)$

16.1 Laurent Series (Laurent 급수)

■ Ex. 4 **서로 다른 동심환형(Concentric Annuli)에서의 Laurent 전개**

$1/(z^3 - z^4)$의 중심이 0인 모든 Laurent 급수를 구하라.

$$\frac{1}{z^3 - z^4} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n-3} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + \cdots \qquad (0 < |z| < 1)$$

$$\frac{1}{z^3 - z^4} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+4}} = -\frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^5} - \cdots \qquad (|z| > 1)$$

16.1 Laurent Series (Laurent 급수)

■ Ex. 5 **부분분수의 이용**

$f(z)=\dfrac{-2z+3}{z^2-3z+2}$의 중심이 0인 모든 테일러 급수와 Laurent 급수를 구하라.

부분분수로 표현하면 $f(z)=-\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{z-2}$

$-\dfrac{1}{z-2}$의 Laurent 급수의 구하면 $-\dfrac{1}{z-2}=\dfrac{1}{2\left(1-\frac{1}{2}z\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}}z^n \qquad (|z|<2)$

$$-\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} \qquad (|z|>2)$$

$\therefore$ $|z|<1$일 때, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)z^n=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{4}z+\dfrac{9}{8}z^2+\cdots$

$1<|z|<2$일 때, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^{n+1}}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}z+\dfrac{1}{8}z^2+\cdots-\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z^2}-\cdots$

$|z|>1$일 때, $f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^n+1\right)\dfrac{1}{z^{n+1}}=-\dfrac{2}{z}-\dfrac{3}{z^2}-\dfrac{5}{z^3}-\dfrac{9}{z^4}-\cdots$

16.1 Laurent Series (Laurent 급수)

PROBLEM SET 16.1

HW: 9, 16, 24 (c)

16.2 Singularities and Zeros. Infinity (특이점과 영점. 무한대)

- **특이점**(Singular Point):

  주어진 함수가 해석적이지 않은 점으로 이 점의 모든 근방은 해석적인 점을 포함한다.

- **고립특이점(**Isolated Singular Point**):**

  다른 특이점을 갖지 않는 근방을 갖고 있는 특이점

예제) $\tan z$는 고립특이점 $\pm \pi/2,\ \pm 3\pi/2,\ \cdots$등을 갖는다.

$\tan\left(1/z\right)$는 비고립특이점 0을 갖는다.

◆ 고립특이점은 Laurent급수에 의해 분류된다.

- **극(**Pole**) :** 음의 거듭제곱을 포함하는 주부가 유한개의 항을 가질 때 ($z=z_0$)

  위수(Order) : 주부의 제일 낮은 차수 (m)

$$\frac{b_1}{z-z_0}+\cdots+\frac{b_m}{(z-z_0)^m} \quad (b_m \neq 0)$$

- **단순극**(Simple Order) : 위수가 1인 극
- **고립진성특이점**(Isolated Essential Singular Point) : 주부가 무한히 많은 항을 가질 때

16.2 Singularities and Zeros. Infinity (특이점과 영점. 무한대)

■ Ex. 1 **극. 진성특이점**

함수 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-2)^5}+\dfrac{3}{(z-2)^2}$은 $z=0$에서 단순극을 갖고, $z=2$에서 위수가 5인 극을 갖는다.

함수 $e^{1/z}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!z^n}=1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2!z^2}+\cdots$과

$\sin\dfrac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!z^{2n+1}}=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{3!z^3}+\dfrac{1}{5!z^5}-+\cdots$은 $z=0$에서고립진성특이점을 갖는다.

16.2 Singularities and Zeros. Infinity
(특이점과 영점. 무한대)

■ Ex.2 **극 가까이에서의 거동**

함수 $f(z)=\dfrac{1}{z^2}$은 $z=0$에서 극을 가지며 임의의 방법으로 $z \to 0$일 때 $|f(z)| \to \infty$이다.

● **극**

$f(z)$가 해석적이고 $z=z_0$에서 극을 가지면 임의의 방법으로 $z \to z_0$일 때 $|f(z)| \to \infty$이다.

■ Ex.3 **진성특이점 가까이에서의 거동**

함수 $f(z)=e^{1/z}$은 $z=0$에서 진성특이점을 갖는다.

(i) 허수축을 따라 0에 접근시키면 극한값을 가지지 않는다.

(ii) 음의 실수값을 통하여 $z \to 0$이면 0에 수렴한다.

(iii) $z=0$의 임의의 작은 $\varepsilon-$근방에서 이 함수는 임의의 주어진 상수값 $c=c_0e^{i\alpha} \neq 0$을 갖는다.

16.2 Singularities and Zeros. Infinity (특이점과 영점. 무한대)

● Picard의 정리

$f(z)$가 해석적이고 점 z_0에서 고립진성특이점을 갖는다면

z_0의 임의의 작은 $\varepsilon-$근방에서 기껏해야 한 개의 값이 제외된 모든값을 갖는다.

● Zeros of Analytic Functions (해석함수의 영점)

- **영점**(Zero): 해석적인 함수의 함수값이 0인 점

  영점은 함수값 뿐만 아니라 도함수의 값도 0일 수 있다.

  위수: 도함수의 값이 0이 되는 가장 많이 미분한 횟수

- **단순영점**(Simple Zero)**:** 위수 1인 영점

■ Ex. 4 **영점**

(i) 함수 $1+z^2$은 $\pm i$에서 단순영점을 갖는다.

(ii) 함수 $(1-z^4)^2$은 ± 1과 $\pm i$에서 위수 2의 영점을 갖는다.

(iii) 함수 e^z은 영점을 갖지 않는다.

16.2 Singularities and Zeros. Infinity
(특이점과 영점. 무한대)

- **영점에서의 테일러 급수**

$f(z)$가 위수 n의 영점 $z=z_0$를 갖는다. $\Leftrightarrow$ 도함수 $f'(z_0),\ \cdots,\ f^{(n-1)}(z_0)$는 0이다.

$\therefore$ 테일러급수에서 $a_0=\cdots=a_{n-1}=0$이고 $a_n\neq 0$이므로

$$f(z)=a_n(z-z_0)^n+a_{n+1}(z-z_0)^{n+1}+\cdots=(z-z_0)^n\left[a_n+a_{n+1}(z-z_0)+a_{n+2}(z-z_0)^2+\cdots\right]$$

- **영점**

해석함수 $f(z)(\neq 0)$의 영점은 고립되어 있다. 즉, 각각은 영점을 갖지 않는 근방을 갖고 있다.

- **극과 영점**

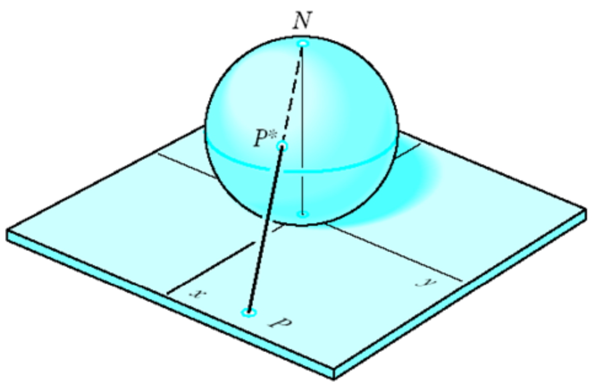
$f(z)$가 $z=z_0$에서 해석적이고 $z=z_0$에서 위수 n의 영점을 가지면

$\Rightarrow\ \dfrac{1}{f(z)}$은 $z=z_0$에서 위수 n인 극을 갖는다.

$h(z)$가 $z=z_0$에서 해석적이고 $h(z_0)\neq 0$이면 $\dfrac{h(z)}{f(z)}$에 대해서도 똑같은 사실이 성립된다.

16.2 Singularities and Zeros. Infinity
(특이점과 영점. 무한대)

- Riemann **구(Riemann Sphere):** $z=0$인 지점에서 복소평면에 닿아 있는 지름 1인 구이다.
- **상(Image):** 지름방향으로 원점의 정반대에 위치한 북극에서 평면의 임의의 점을 잇는 선분이 구와 교차하는 점
- 북극을 제외한 구의 모든 점은 복소수를 나타내고, 북극은 복소평면 내의 어떤 점에도 해당되지 않는다.
- **무한대 점**(Point at Infinity) : 북극의 상으로 설정된 점
- **확장복소평면**(Extended Complex Plane) : 무한대 점이 포함된 복소평면
- **유한복소평면**(Finite Complex Plane) : 무한대 점이 포함되지 않은 단순한 복소평면



16.2 Singularities and Zeros. Infinity
(특이점과 영점. 무한대)

- **무한대에서 해석적이거나 특이한 함수**

  큰 $|z|$에 대하여 함수 $f(z)$에서 $z=\dfrac{1}{w}$로 놓고 $w=0$의 근방에서 $f(z)=f\left(\dfrac{1}{w}\right)=g(w)$를 조사

- $g(w)$가 $w=0$에서 해석적 $\Leftrightarrow$ $f(z)$가 무한대에서 해석적
- $g(w)$가 $w=0$에서 특이하다 $\Leftrightarrow$ $f(z)$가 무한대에서 특이하다
- 극한값이 존재 $\Leftrightarrow$ $g(0)=\lim\limits_{w\to 0} g(w)$
- $w=0$에서 $f\left(\dfrac{1}{w}\right)$가 영점을 갖는다 $\Leftrightarrow$ $f(z)$가 무한대에서 위수 n의 영점을 갖는다.

16.2 Singularities and Zeros. Infinity
(특이점과 영점. 무한대)

PROBLEM SET 16.2

HW: 9, 18

16.3 Residue Integration Method (유수적분법)

- $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \frac{b_1}{z - z_0} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \cdots$에서 $b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\,dz$이다.

  $\therefore \oint_C f(z)\,dz = 2\pi i b_1$

- **유수**(Residue): z = z_0에서의 유수 $b_1 = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$

■ Ex. 1 **유수에 의한 적분 계산**

반시계방향으로 단위원 C를 회전할 때, 함수 $f(z) = z^{-4} \sin z$를 적분하라.

$f(z) = \frac{\sin z}{z^4} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{3!z} + \frac{z}{5!} - \frac{z^3}{7!} + - \cdots$이므로 $b_1 = -\frac{1}{3!}$이다.

$\therefore \oint_C \frac{\sin z}{z^4}\,dz = 2\pi i b_1 = -\frac{\pi i}{3}$

16.3 Residue Integration Method (유수적분법)

■ Ex. 2 **정확한 Laurent 급수 사용**

시계방향으로 $|z| = \frac{1}{2}$인 원 C를 따라서 함수 $f(z) = \frac{1}{z^3 - z^4}$을 적분하라.

$z^3 - z^4 = z^3(1-z)$이므로 $f(z)$의 특이점 : $z = 0$과 $z = 1$

$z = 1$은 원 C의 외부에 존재하므로 고려하지 않는다.

$\frac{1}{z^3 - z^4} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + 1 + z + \cdots \ (0 < |z| < 1)$이므로 $z = 0$에서의 유수는 1이다.

$$\therefore \oint_C \frac{1}{z^3 - z^4} dz = -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = -2\pi i$$

주의

다른 급수인 $\frac{1}{z^3 - z^4} = -\frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^5} - \frac{1}{z^6} - \cdots \ (|z| > 1)$에서 $\frac{1}{z}$항이 존재하지 않으므로 오답인 0이 얻어진다.

16.3 Residue Integration Method (유수적분법)

- **유수에 대한 공식**
- **단순극**

(i) 함수 $f(z)$가 z_0에서 단순극을 가지는 경우

$$: \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1 = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

(ii) $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$에서 $p(z_0) \neq 0$이고 $q(z)$는 z_0에서 단순영을 가지는 경우

$$: \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

- **임의 위수(Order)의 극**

함수 $f(z)$가 z_0에서 위수 m의 극을 가지는 경우 : $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \dfrac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left\{ \dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right] \right\}$

위수 $2(m=2)$인 극 : $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^2 f(z) \right]'$

16.3 Residue Integration Method (유수적분법)

■ Ex. 3 단순극에서의 유수

$z^2+1=(z+i)(z-i)$이므로 $f(z)=\dfrac{9z+i}{z^3+z}$는 i에서 단순극을 가지며,

16.3 Residue Integration Method (유수적분법)

■ Ex. 3 **단순극에서의 유수**

$z^2+1=(z+i)(z-i)$이므로 $f(z)=\dfrac{9z+i}{z^3+z}$는 i에서 단순극을 가지며,

$$\text{(i)}\quad \operatorname*{Res}_{z=i}\frac{9z+i}{z^3+z}=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{9z+i}{z(z+i)(z-i)}=\left[\frac{9z+i}{z(z+i)}\right]_{z=i}=\frac{10i}{-2}=-5i$$

$$\text{(ii)}\quad p(z)=9z+i,\ q(z)=z^3+z \quad\Rightarrow\quad q'(z)=3z^2+1$$

$$\therefore\ \operatorname*{Res}_{z=i}\frac{9z+i}{z^3+z}=\left[\frac{9z+i}{3z^2+1}\right]_{z=i}=\frac{10i}{-2}=-5i$$

16.3 Residue Integration Method (유수적분법)

■ Ex. 3 **단순극에서의 유수**

$z^2+1=(z+i)(z-i)$이므로 $f(z)=\dfrac{9z+i}{z^3+z}$는 i에서 단순극을 가지며,

$$\text{(i)}\quad \operatorname*{Res}_{z=i}\frac{9z+i}{z^3+z}=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{9z+i}{z(z+i)(z-i)}=\left[\frac{9z+i}{z(z+i)}\right]_{z=i}=\frac{10i}{-2}=-5i$$

$$\text{(ii)}\quad p(z)=9z+i,\ q(z)=z^3+z \quad\Rightarrow\quad q'(z)=3z^2+1$$

$$\therefore\ \operatorname*{Res}_{z=i}\frac{9z+i}{z^3+z}=\left[\frac{9z+i}{3z^2+1}\right]_{z=i}=\frac{10i}{-2}=-5i$$

■ Ex. 4 **고위의 극에서의 유수**

$f(z)=\dfrac{50z}{z^3+2z^2-7z+4}$는 분모가 $(z+4)(z-1)^2$과 같기 때문에 $z=1$에서 위수 2의 극을 갖는다.

16.3 Residue Integration Method (유수적분법)

■ Ex. 3 **단순극에서의 유수**

$z^2+1=(z+i)(z-i)$이므로 $f(z)=\dfrac{9z+i}{z^3+z}$는 i에서 단순극을 가지며,

$$\text{(i)}\quad \operatorname*{Res}_{z=i}\frac{9z+i}{z^3+z}=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{9z+i}{z(z+i)(z-i)}=\left[\frac{9z+i}{z(z+i)}\right]_{z=i}=\frac{10i}{-2}=-5i$$

$$\text{(ii)}\quad p(z)=9z+i,\ q(z)=z^3+z \quad\Rightarrow\quad q'(z)=3z^2+1$$

$$\therefore\ \operatorname*{Res}_{z=i}\frac{9z+i}{z^3+z}=\left[\frac{9z+i}{3z^2+1}\right]_{z=i}=\frac{10i}{-2}=-5i$$

■ Ex. 4 **고위의 극에서의 유수**

$f(z)=\dfrac{50z}{z^3+2z^2-7z+4}$는 분모가 $(z+4)(z-1)^2$과 같기 때문에 $z=1$에서 위수 2의 극을 갖는다.

$$\therefore\ \operatorname*{Res}_{z=i} f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2 f(z)\right]=\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\frac{50z}{z+4}\right)=\frac{200}{5^2}=8$$

16.3 Residue Integration Method (유수적분법)

- **유수정리**

C:단순닫힌경로

$z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_k : C$ 내부에 있는 유한개의 특이점

$f(z)$:특이점을 제외한 C 내부와 C상에서 해석적인 함수

$$\Rightarrow \oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z)$$

■ Ex. 6 **유수정리의 또 다른 응용**

원 $C: |z| = \dfrac{3}{2}$를 따라 반시계방향으로 $\dfrac{\tan z}{z^2-1}$을 적분하라.

$\tan z$의 특이점 $\pm\dfrac{\pi}{2},\ \pm\dfrac{3\pi}{2},\ \cdots$는 윤곽선 C의 바깥에 놓여 있다.

주어진 함수의 분모 $z^2-1=(z+1)(z-1)$은 ± 1에서 단순극을 갖는다.

$$\oint_C \frac{\tan z}{z^2-1}dz = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=1}\frac{\tan z}{z^2-1} + \operatorname*{Res}_{z=-1}\frac{\tan z}{z^2-1}\right) = 2\pi i\left(\left.\frac{\tan z}{2z}\right|_{z=1} + \left.\frac{\tan z}{2z}\right|_{z=-1}\right) = 2\pi i \tan 1 = 9.7855i$$

16.3 Residue Integration Method (유수적분법)

■ Ex. 7 **극과 진성특이점**

C가 타원 $9x^2+y^2=9$일 때 적분 $\oint_C \left(\dfrac{ze^{\pi z}}{z^4-16} + ze^{\pi/z} \right) dz$을 수행하여라.(반시계방향)

$\dfrac{ze^{\pi z}}{z^4-16}$는 C내부에 존재하는 $\pm 2i$에서 단순극을 갖는다.

$$\Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=2i} \frac{ze^{\pi z}}{z^4-16} = \left[\frac{ze^{\pi z}}{4z^3} \right]_{z=2i} = -\frac{1}{16}, \qquad \operatorname*{Res}_{z=-2i} \frac{ze^{\pi z}}{z^4-16} = \left[\frac{ze^{\pi z}}{4z^3} \right]_{z=-2i} = -\frac{1}{16}$$

$ze^{\pi/z}$는 0에서 진성특이점을 가지며 $ze^{\pi/z} = z\left(1 + \dfrac{\pi}{z} + \dfrac{\pi^2}{2!z^2} + \dfrac{\pi^3}{3!z^3} + \cdots \right) = z + \pi + \dfrac{\pi^2}{2!z} + \dfrac{\pi^3}{3!z^2} + \cdots (|z| > 0)$

$$\Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=0} ze^{\pi/z} = \frac{\pi^2}{2!}$$

$$\therefore \oint_C \left(\frac{ze^{\pi z}}{z^4-16} + ze^{\pi/z} \right) dz = 2\pi i \left(-\frac{1}{16} - \frac{1}{16} + \frac{\pi^2}{2} \right) = \pi\left(\pi^2 - \frac{1}{4} \right) i = 30.221i$$

16.3 Residue Integration Method (유수적분법)

PROBLEM SET 16.3

HW: 8, 25

16.4 Residue Integration of Real Integrals (실적분의 유수적분)

- $\cos\theta$와 $\sin\theta$의 유리함수의 적분 : $J = \int_0^{2\pi} F(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$

$e^{i\theta} = z$라 치환하면 $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, $\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$

$\Rightarrow \quad F(\cos\theta, \sin\theta) = f(z), \quad d\theta = \frac{dz}{iz}$

$\Rightarrow \quad J = \oint_C f(z) \frac{dz}{iz}, \quad C : |z| = 1$(반시계방향)

16.4 Residue Integration of Real Integrals (실적분의 유수적분)

■ Ex. 1 **적분**

$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta} = 2\pi$임을 보여라

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta} = \oint_C \frac{dz/iz}{\sqrt{2}-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} = \oint_C \frac{dz}{-\frac{i}{2}\left(z^2-2\sqrt{2}z+1\right)} = -\frac{2}{i}\oint_C \frac{dz}{\left(z-\sqrt{2}-1\right)\left(z-\sqrt{2}+1\right)}$$

단순극 $z_1 = \sqrt{2}+1$은 원 C 외부에 존재하므로 제외된다.

단순극 $z_2 = \sqrt{2}-1$은 원 C내부에 있으므로 $\operatorname*{Res}_{z=z_2} \frac{1}{\left(z-\sqrt{2}-1\right)\left(z-\sqrt{2}+1\right)} = \left[\frac{1}{z-\sqrt{2}-1}\right]_{z=\sqrt{2}-1} = -\frac{1}{2}$

$$\therefore \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta} = 2\pi i\left(-\frac{2}{i}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\pi$$

16.4 Residue Integration of Real Integrals (실적분의 유수적분)

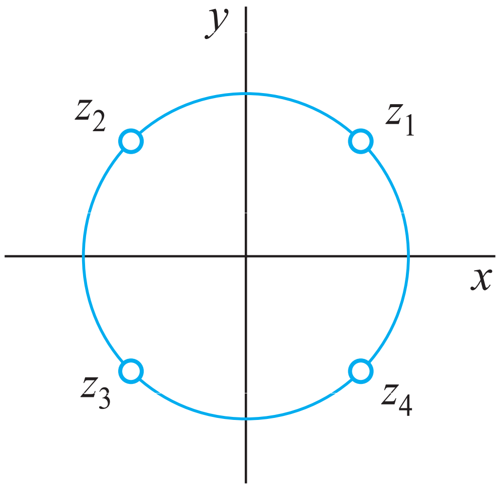
- **이상적분**(Improper Integral)**:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx$$

$$\mathrm{pr.v.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

- Cauchy **주값(**Cauchy Principal Value)**:**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum \mathrm{Res}\, f(z)$$



16.4 Residue Integration of Real Integrals (실적분의 유수적분)

■ Ex. 2 **이상적분**

$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ 임을 보여라.

함수 $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ 은 네 개의 단순극 $z_1 = e^{\pi i/4}$, $z_2 = e^{3\pi i/4}$, $z_3 = e^{-3\pi i/4}$, $z_4 = e^{-\pi i/4}$ 을 갖는다.

극 $z_1 = e^{\pi i/4}$, $z_2 = e^{3\pi i/4}$ 는 상반평면에 존재하므로

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \left[\frac{1}{(1+z^4)'}\right]_{z=z_1} = \left[\frac{1}{4z^3}\right]_{z=z_1} = \frac{1}{4}e^{-3\pi i/4} = -\frac{1}{4}e^{\pi i/4},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) = \left[\frac{1}{(1+z^4)'}\right]_{z=z_2} = \left[\frac{1}{4z^3}\right]_{z=z_2} = \frac{1}{4}e^{-9\pi i/4} = \frac{1}{4}e^{-\pi i/4}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = -\frac{2\pi i}{4}\left(e^{\pi i/4} - e^{-\pi i/4}\right) = -\frac{2\pi i}{4} \cdot 2i \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

16.4 Residue Integration of Real Integrals (실적분의 유수적분)

- **푸리에 적분**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos sx\,dx \quad \text{그리고} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin sx\,dx \quad (s\text{는 실수})$$

$$\Rightarrow \quad 2\pi i \sum \operatorname{Res}\left[f(z)e^{isz}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{isx}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos sx\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin sx\,dx$$

$$\therefore \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos sx\,dx = -2\pi \sum \operatorname{Im}\ \operatorname{Res}\left[f(z)e^{isz}\right], \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin sx\,dx = 2\pi \sum \operatorname{Re}\operatorname{Res}\left[f(z)e^{isz}\right]$$

- Ex. 3 **적분**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos sx}{k^2+x^2}dx = \frac{\pi}{k}e^{-ks}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin sx}{k^2+x^2}dx = 0 \quad (s>0,\ \ k>0)\text{임을 보여라}$$

$\dfrac{e^{isz}}{k^2+z^2}$는 상반평면에서 한 개의 단순극 $z=ik$를 갖는다.

$$\Rightarrow \quad \operatorname*{Res}_{z=ik} \frac{e^{isz}}{k^2+z^2} = \left[\frac{e^{isz}}{2z}\right]_{z=ik} = \frac{e^{-ks}}{2ik} \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isz}}{k^2+z^2}dx = 2\pi i\frac{e^{-ks}}{2ik} = \frac{\pi}{k}e^{-ks}$$

$$\therefore \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos sx}{k^2+x^2}dx = \frac{\pi}{k}e^{-ks}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin sx}{k^2+x^2}dx = 0$$

16.4 Residue Integration of Real Integrals (실적분의 유수적분)

이상적분의 다른 형태

- 피적분함수가 적분구간 내의 점 *a* 에서 무한대가 될 때 ($\lim_{x\to a}|f(x)| = \infty$)

$$\int_A^B f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_A^{a-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\eta\to 0}\int_{a+\eta}^B f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_A^{a-\varepsilon} f(x)dx + \int_{a+\varepsilon}^B f(x)dx\right]$$

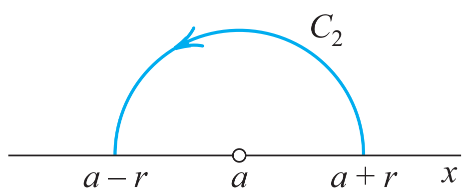
- Cauchy **주값**(Cauchy Principal Value): $\mathrm{pr.v.}\int_A^B f(x)dx$

■ Ex.

$$\mathrm{pr.v.}\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^3} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x^3} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x^3}\right] = 0$$

실축 상의 단순극

함수 $f(z)$가 실축 상의 점 $z = a$에서 단순극을 가질 경우 : $\lim_{r\to 0}\int_{C_2} f(z)dz = \pi i \operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$



16.4 Residue Integration of Real Integrals (실적분의 유수적분)

- $\mathrm{pr.v.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum \mathrm{Res} f(z) + \pi i \sum \mathrm{Res} f(z)$

  첫 번째 합은 상반평면에 있는 모든 극들에 대해 행해지면

  두 번째 합은 실축 위에 있는 모든 극들에 대해 행해진다.

■ Ex. 4 **실축 상의 극**

주값 $\mathrm{pr.v.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-3x+2)(x^2+1)}$을 구하라.

$\frac{1}{(z^2-3z+2)(z^2+1)}$의 단순극은 $z=1,\ z=2,\ z=i,\ z=-i$이다.

$z=-i$은 하반평면에 존재하므로 제외된다.

$$\operatorname*{Res}_{z=1} \frac{1}{(z^2-3z+2)(z^2+1)} = \left[\frac{1}{(z-2)(z^2+1)}\right]_{z=1} = -\frac{1}{2}, \quad \operatorname*{Res}_{z=2} \frac{1}{(z^2-3z+2)(z^2+1)} = \left[\frac{1}{(z-1)(z^2+1)}\right]_{z=2} = \frac{1}{5},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{(z^2-3z+2)(z^2+1)} = \left[\frac{1}{(z^2-3z+2)(z+i)}\right]_{z=i} = \frac{1}{6+2i} = \frac{3-i}{20}$$

$$\therefore\ \mathrm{pr.v.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-3x+2)(x^2+1)} = 2\pi i\left(\frac{3-i}{20}\right) + \pi i\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right) = \frac{\pi}{10}$$

16.4 Residue Integration of Real Integrals (실적분의 유수적분)

PROBLEM SET 16.4

HW: