[2008] [01-1]

Planning Procedure of Naval Architecture & Ocean Engineering

September, 2008

Prof. Kyu-Yeul Lee

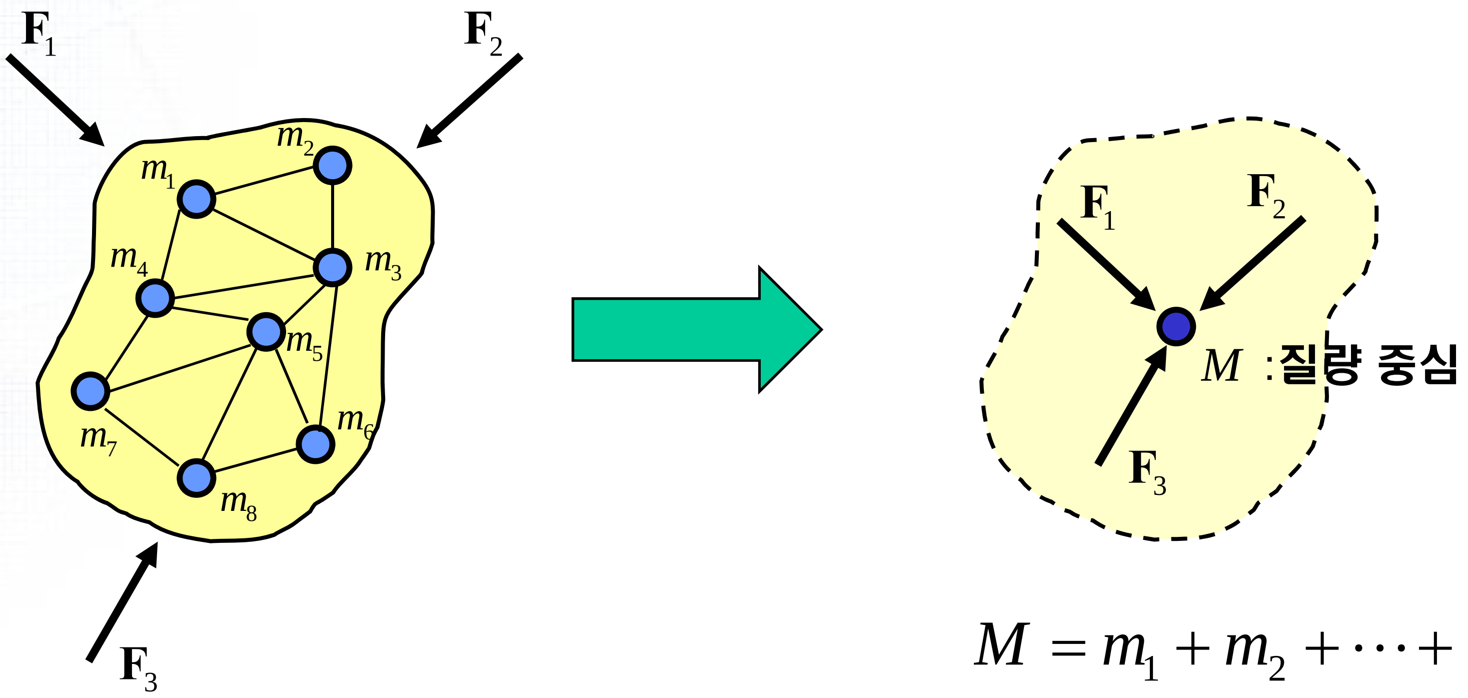
Department of Naval Architecture and Ocean Engineering,
Seoul National University of College of Engineering

Part 1. Stability & Trim

[01-1] Center of mass
Momentum, Force, Moment
Parallel-axis theorem
Static equilibrium state

질량중심 (Center of Mass)

1) 모든 질량이 그 점에 모여있고,
2) 외부 힘이 모두 그 점에 작용하는 것처럼 움직이는 점



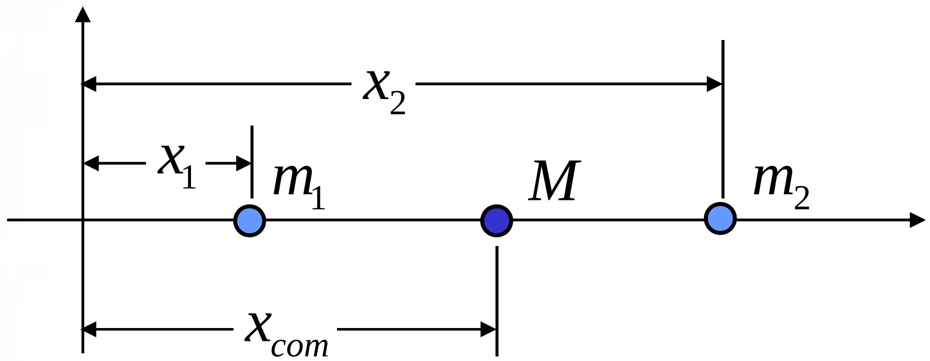
$$M = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

$$M\mathbf{a} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$$

Halliday, **일반물리학** 7/E chap.9-2, p.246

질량중심 구하기

질량중심에 모든 질량이 모여 있으므로,
질량중심에서의 질량에 대한 모멘트는 0이다.



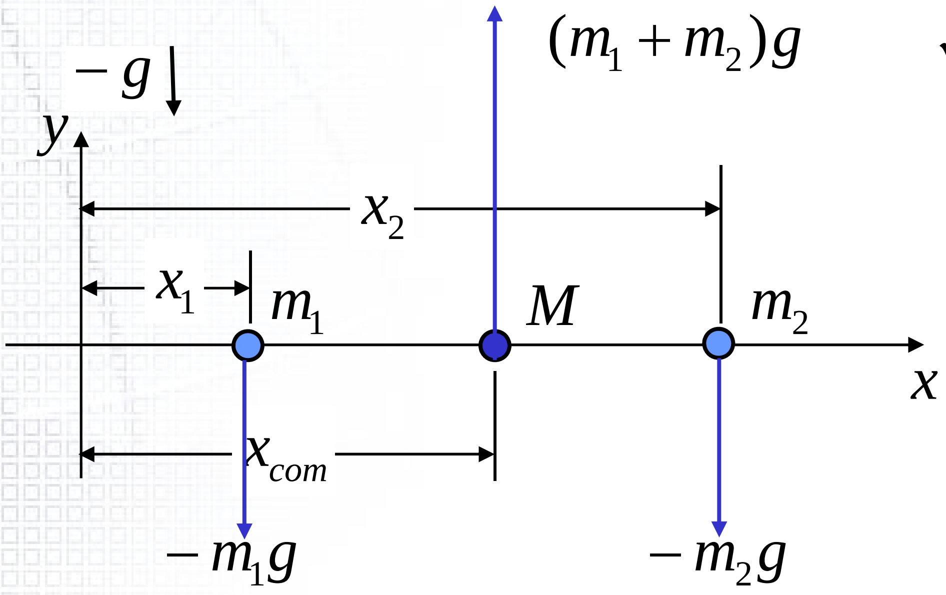
$$m_1(x_{com}-x_1)-m_2(x_2-x_{com})+(m_1+m_2)\cdot 0=0$$

$$x_{com}=\frac{m_1x_1+m_2x_2}{m_1+m_2}$$

따라서 n개의 미소 질량에 대한 질량 중심은 다음과 같다.

$$\boxed{x_{com}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n}m_ix_i}\quad ,(M=m_1+m_2+\cdots+m_n)$$

질량중심 구하기



✓힘과 모멘트 평형 조건 이용

질량 m_1과 m_2에 각각 $-m_1g$, $-m_2g$의 힘이 아래로 작용할때, 힘과 모멘트 평형을 이루기 위해서 질량 중심에 $(m_1+m_2)g$의 힘이 작용해야함

원점을 통하여 면에 수직한 축에 대한 모멘트

$$-m_1gx_1 - m_2gx_2 + (m_1 + m_2)gx_{com} = 0$$

$$-m_1x_1 - m_2x_2 + (m_1 + m_2)x_{com} = 0$$

$$x_{com} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{(m_1 + m_2)}$$

질량중심 구하기

$$x_{com} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

y방향, z방향 질량중심도 동일하게 구할 수 있다.

$$y_{com} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i y_i$$

$$z_{com} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i z_i$$

$$\boxed{\mathbf{r}_{com} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i}$$

고체인 물체는 수많은 입자를 포함하고 있으므로, 물질이 연속적으로 분포한 것으로 생각할 수 있다.

$$\boxed{\mathbf{r}_{com} = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}_i \, dm}$$

하나 더!

무게중심:

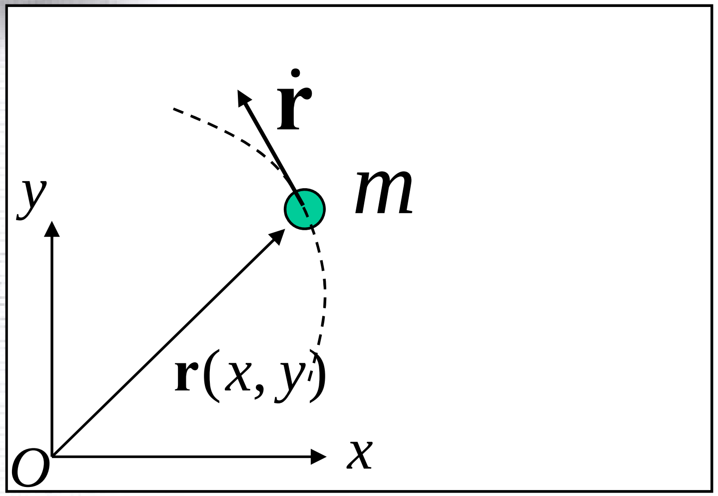
물체에서 총 중력 $\mathbf{F}_g$가 작용하는 것으로 생각되는 점을 그 물체의 무게 중심 G 라고 한다.

일반적으로, 질량 전체에 일정한 중력가속도가 작용할 경우 질량중심M과 무게중심G은 일치한다.

Part 1. Stability & Trim

[01-1] Center of mass
Momentum, Force, Moment
Parallel-axis theorem
Static equilibrium state

선 운동량(Linear Momentum) 과 힘(force)의 관계



질량 m 의 물체가 속도 $\dot{\mathbf{r}}$ 로 운동할 때,
이 물체의 Linear Momentum $\mathbf{p}$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$\boxed{\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}}$$

$\mathbf{r}(x, y)$: *position vector*

$$\dot{\mathbf{r}}(x, y) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

선운동량을 시간에 대해 미분하자

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\dot{\mathbf{r}})}{dt} = \frac{d(m)}{dt}\dot{\mathbf{r}} + m\frac{d(\dot{\mathbf{r}})}{dt}$$

질량 m이 시간에 따라 변화하지 않는다면,

$$(m : \text{constant})$$

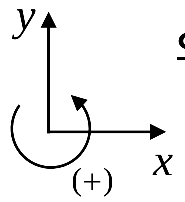
$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\frac{d(\dot{\mathbf{r}})}{dt} = m\ddot{\mathbf{r}}$$

$$\boxed{m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{net}}$$

물체의 시간에 따른 Linear Momentum 의 변화는 물체에 가해진 외력의 합과 같다.   (Newton 제 2법칙)

$$\boxed{\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}_{net}}$$

모멘트



오른손 좌표계에 따라 좌표계를 설정

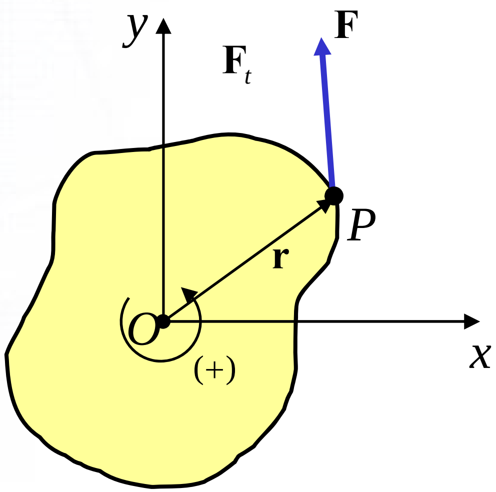
→z축은 화면에서 튀어 나오는 방향

, 반시계 방향이 (+)회전 방향이 됨

<물리적 현상>

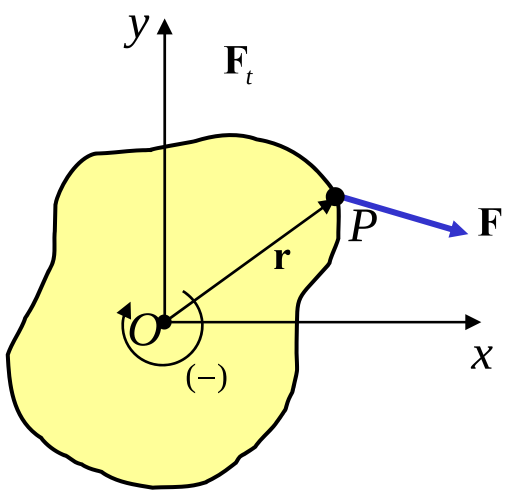
기준점 O로부터 r만큼 떨어진 점 P에 힘 F가 작용 하였다.

질문: 물체는 어느 방향으로 회전할까?



회전방향: (+)

회전모멘트 방향: (+)



회전방향: (−)

회전모멘트 방향: (−)

$\mathbf{r}(x, y)$: *position vector*

회전방향 = 회전 모멘트 방향

모멘트(Moment)

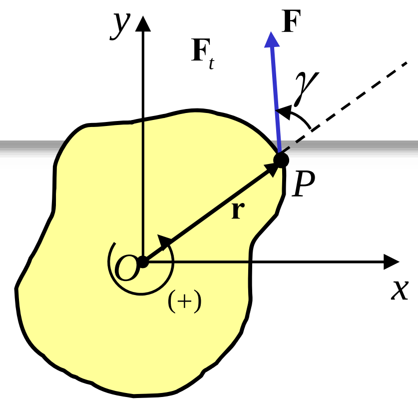
<수학적 표현>

회전 모멘트를 다음과 같이 정의함

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

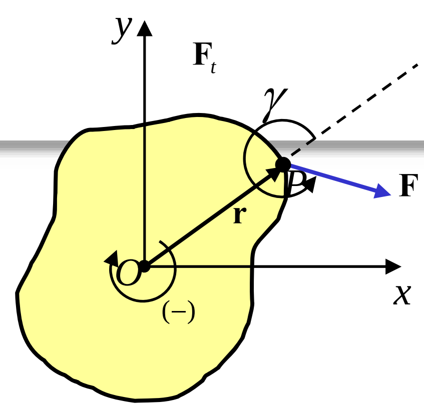
$$= |\mathbf{r}||\mathbf{F}|\underline{\sin\gamma}\ \mathbf{k}$$

γ : **r을 기준으로 F와 이루는 각**



회전방향: (+)

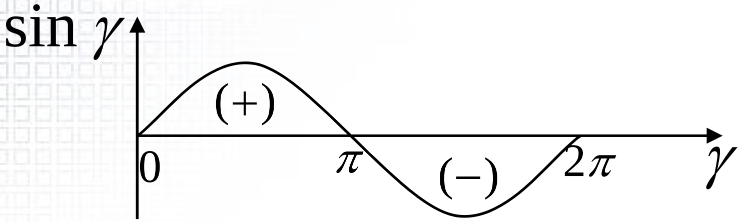
회전모멘트 방향: (+)



회전방향: (−)

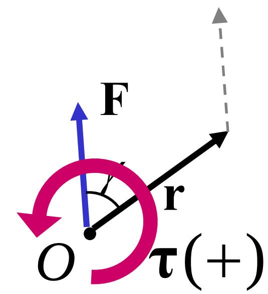
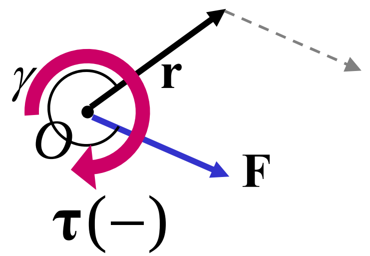
회전모멘트 방향: (−)

$\boldsymbol{\tau}$ 의 부호는 $\sin\gamma$ 의 부호에 의해 결정



$$\sin\gamma = (+) \quad (0 < \gamma < \pi)$$

$$\sin\gamma = (-) \quad (\pi < \gamma < 2\pi)$$

		
γ	$0 < \gamma < \pi$	$\pi < \gamma < 2\pi$
$\sin\gamma$	$(+)$	$(-)$
$\boldsymbol{\tau}$	$(+)$	$(-)$

$\mathbf{r}(x,y)$: *position vector*

$\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$: x, y, z축 방향의단위벡터

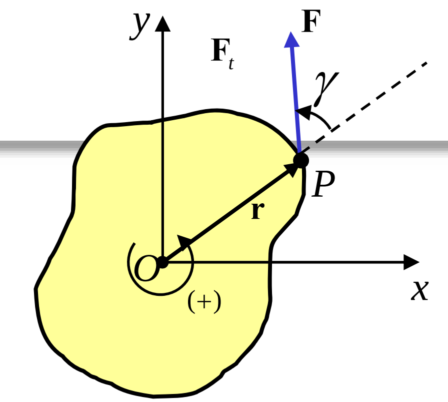
물리적 현상과 회전 모멘트 방향이 일치함

모멘트(Moment)

<수학적 표현>

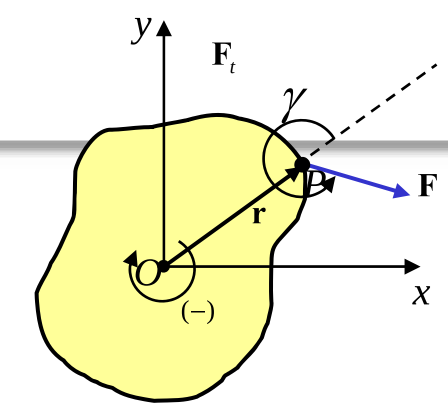
회전 모멘트를 다음과 같이 정의함

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$



회전방향: (+)

회전모멘트 방향: (+)



회전방향: (−)

회전모멘트 방향: (−)

이를 벡터 성분으로 나타내면 다음과 같다.

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_p & y_p & z_p \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= (F_z y_p - F_y z_p)\mathbf{i} + (F_x z_p - F_z x_p)\mathbf{j} + (F_y x_p - F_x y_p)\mathbf{k}$$

x-y 평면 2차원 예제의 경우, $z_p = 0$, $F_z = 0$ 이라고 하면,

$$\boldsymbol{\tau} = (F_y x_p - F_x y_p)\mathbf{k}$$

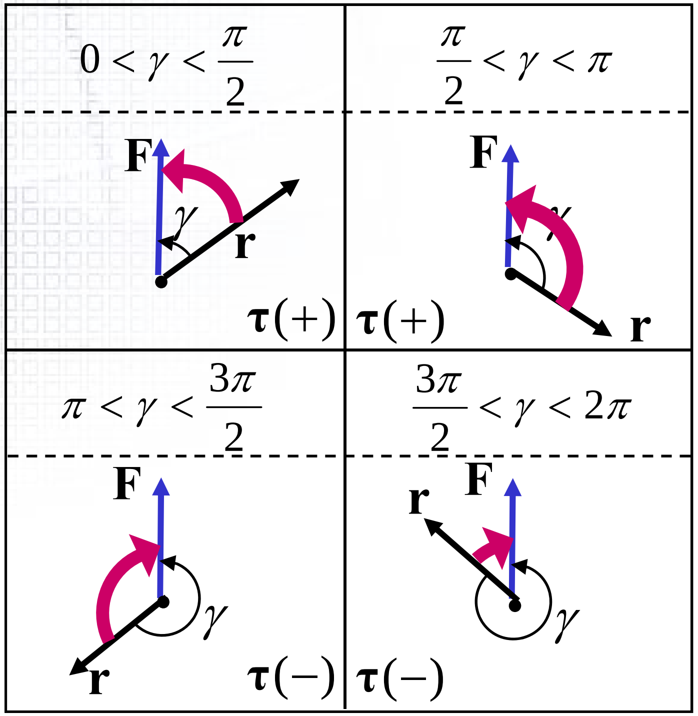
모멘트(Moment)

<오른손 법칙을 이용한 모멘트 방향 판별>

벡터 r에서부터 벡터 F로 감싸는 방향

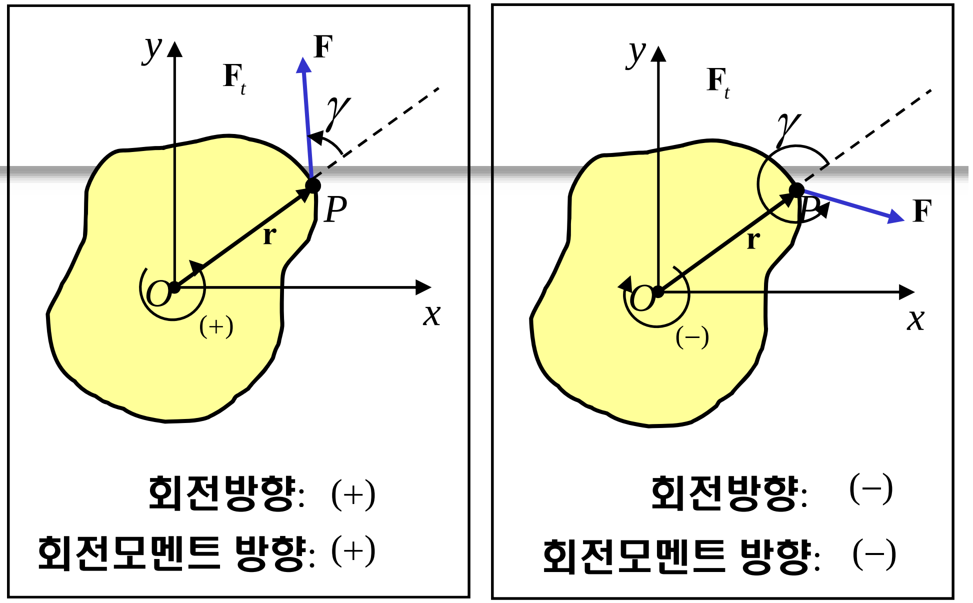
(단, 두 벡터가 이루는 각 중,

π 보다 작은 각 방향으로)

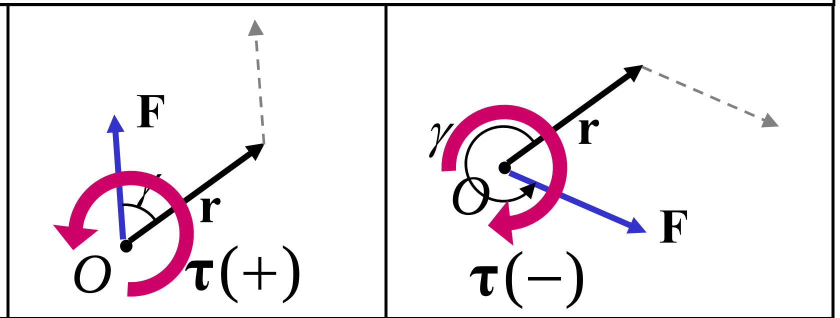


$\mathbf{r}(x, y)$: *position vector*

$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$: x, y, z축 방향의단위벡터

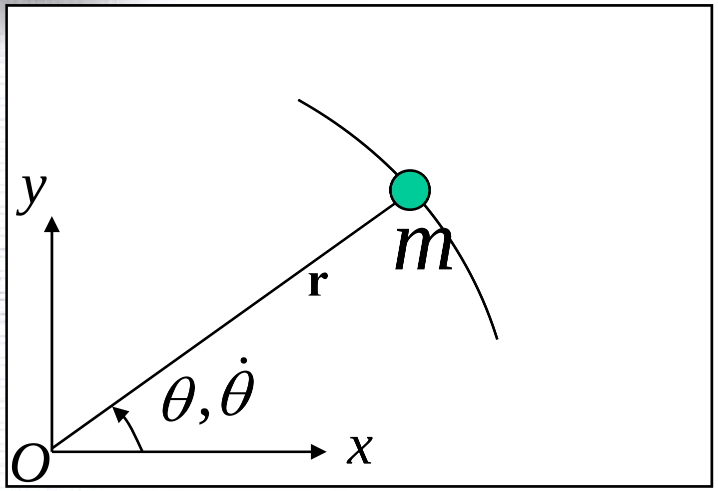


$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = |\mathbf{r}||\mathbf{F}|\sin\gamma \ \mathbf{k}$$



γ	$0 < \gamma < \pi$	$\pi < \gamma < 2\pi$
$\sin\gamma$	$(+)$	$(-)$
$\boldsymbol{\tau}$	$(+)$	$(-)$

각 운동량(Angular Momentum)과 모멘트(Moment)의 관계



질량 m의 물체가 각속도 $\dot{\theta}$로 회전 할 때, 이 물체의 Angular Momentum L 을 다음과 같이 정의한다.

$$\boxed{L = I\dot{\theta}}$$

$$,(I = m\mathbf{r}^2)$$

:Moment of inertia

각운동량을 시간에 대해 미분하자

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(I\dot{\theta})}{dt}$$

$$= \frac{d(I)}{dt}\dot{\theta} + I\frac{d(\dot{\theta})}{dt}$$

I 가 시간에 따라 변화하지 않는다면,

$$(I : \text{constant})$$

$$\frac{dL}{dt} = I\frac{d(\dot{\theta})}{dt} = I\ddot{\theta}$$

$$\boxed{I\ddot{\theta} = \tau_{net}}$$

물체의 시간에 따른 Angular Momentum 의 변화는 물체에 가해진 모멘트의 합과 같다. (Euler 법칙)

$$\boxed{\frac{dL}{dt} = \tau_{net}}$$

Angular Momentum L의 차원해석

$$I = m\mathbf{r}^2$$

$$= [ML^2]$$

$$L = I\dot{\theta}$$

$$= [ML^2][1/T]$$

$[M]: mass$

$[L]: lengh$

$[T]: time$

$$L = [ML^2][1/T][T/T]$$

$$= \underline{[M][L/T^2]}[L][T]$$

$$= \underline{\underline{[Force]}[L]}[T]$$

$$= \underline{[Work\ or\ Moment]}[T]$$

Angular Momentum의 단위는 Work or Moment에 시간 T를 곱한 것과 같다.

따라서, Angular Momentum의 시간에 따른 변화율은 Work or Moment의 차원을 갖는다는 것을 알 수 있다.

$$\boxed{\frac{dL}{dt} = \tau_{net}}$$

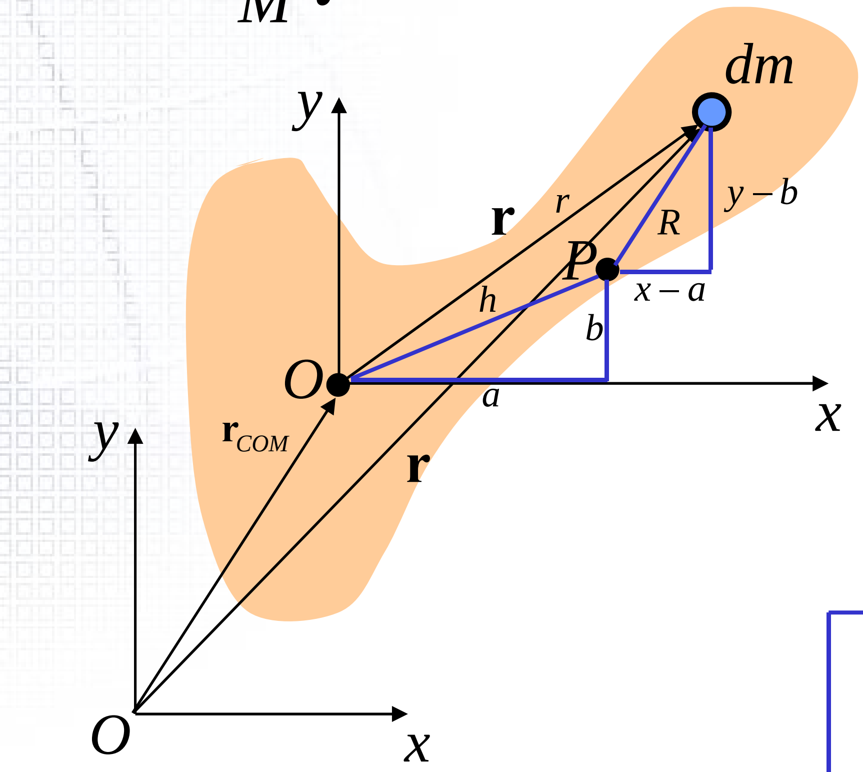
Part 1. Stability & Trim

[01-1] Center of mass
Momentum, Force, Moment
Parallel-axis theorem
Static equilibrium state

NAOE/SNU
SDAL
Advanced Ship Design Automation Lab.
http://asdal.snu.ac.kr

- 질량중심 구하기

$$\mathbf{r}_{com} = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}_i \, dm$$



원점을 질량 중심에 두자.

$$\therefore \boxed{\mathbf{r}_{com} = \frac{1}{M}\int \mathbf{r}_i \, dm = 0}$$

질량중심 O를 관통하는 회전축에 대한 관성모멘트 I_{com}

$$I_{com} = \int r^2 dm$$

점 p를 관통하는 회전 축에 대한 관성 모멘트 I_p

$$I_P = \int R^2 dm = \int [(x-a)^2 + (y-b)^2] dm$$

$$= \int (x^2 + y^2) dm - \cancel{2a\int x \, dm}$$

$$\cancel{-2b\int y \, dm} + \int (a^2 + b^2) dm$$

$$I_p = \int r^2 dm + \int h^2 dm \quad , \begin{pmatrix} r^2 = x^2 + y^2 \\ h^2 = a^2 + b^2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{I_p = I_{com} + Mh^2}$$

Part 1. Stability & Trim

[01-1] Center of mass
Momentum, Force, Moment
Parallel-axis theorem
Static equilibrium state

물체의 평형 상태

Halliday, 일반물리학 7/E chap.12-3, p.371

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}_{net} \quad , \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{net}$$

아래 두 가지를 만족할 경우에
물체가 **평형상태**에 있다고 한다.

$$\begin{cases} \mathbf{P} = m\dot{\mathbf{r}} = C_1 \\ \mathbf{L} = I\dot{\theta} = C_2 \end{cases} \quad ,(C_1, C_2 = const.)$$

1. 질량중심의 **선운동량** P**는 일정**하다.
2. 질량중심이나 임의의 점에 대한 **각 운동량** L**은 일정**하다

특히, $C_1, C_2 = 0$ 일 경우 물체가
정적 평형상태에 있다고 한다.

$$\begin{cases} \mathbf{P} = 0 \\ \mathbf{L} = 0 \end{cases}$$

왼쪽의 두 식을 각각 t에 관해 미분하자.

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{P}}{dt} = \dfrac{d(m\dot{\mathbf{r}})}{dt} = 0 \\ \dfrac{d\mathbf{L}}{dt} = \dfrac{d(I\dot{\theta})}{dt} = 0 \end{cases}$$

따라서, 물체가 평형상태에 있기 위한
조건을 다음과 같이 표현할 수도 있다.

$$\begin{cases} \mathbf{F}_{net} = 0 & \text{(힘의 평형)} \\ \boldsymbol{\tau}_{net} = 0 & \text{(모멘트 평형)} \end{cases}$$

➔ 물체에 힘이 가해지지 않으면
물체의 운동량은 일정하게 보존된다.

NAOE/SNU

@SDAL Advanced Ship Design Automation Lab. http://asdal.snu.ac.kr

물체의 평형 조건

1. 물체에 가해지는 모든 외부힘의 벡터합은 0이어야 한다.

$$\mathbf{F}_{net} = m\mathbf{a}$$

($\mathbf{F}_{net}$: 외부힘의 벡터합, m : 물체의 질량, $\mathbf{a}$: 물체의 가속도)

- 물체가 병진운동에 대해 평형상태에 있으면 가속도 **a**가 **0**이므로 외부힘의 벡터합도 **0**이다.

2. 물체에 가해지는 모든 외부 Moment의 벡터합은 어느 축에 대해서도 0이어야 한다.

$$\mathbf{M}_{net} = I\boldsymbol{\alpha}$$

($\mathbf{M}_{net}$: 외부 moment의 벡터합, I : 질량관성모멘트, $\boldsymbol{\alpha}$: 각가속도)

- 물체가 회전운동에 대해 평형상태에 있으면 각가속도 **α** 가 **0**이므로 Moment 의 벡터합도 **0**이다.