Engineering Mathematics I

Prof. Dr. Yong-Su Na

(32-206, ysna@snu.ac.kr, Tel. 880-7204)

Text book: Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 9th Edition, Wiley (2006)

Ch. 3 Higher Order Linear ODEs

Ch. 3 Higher Order Linear ODEs (고계 선형 상미분방정식)

- 2계 선형 상미분방정식에 대한 개념과 방법을 고계 선형 상미분방정식으로 확장

3.1 Homogeneous Linear ODEs (제차 선형 상미분방정식)

- ***n*계 상미분방정식**: $F\left(x, y, y', \cdots, y^{(n)}\right) = 0 \quad \left(y^{(n)} = \dfrac{d^n y}{dx^n} \right)$
- ***n*계 선형 상미분방정식**: $y^{(n)} + p_{n-1}(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x) y' + p_0(x) y = r(x)$
- **Standard Form (표준형)**: $y^{(n)}$ 을 첫 번째 항으로 갖는 식
  - Homogeneous (**제차**): $r(x) = 0$
  - Nonhomogeneous (**비제차**): $r(x) \neq 0$

3.1 Homogeneous Linear ODEs (제차 선형 상미분방정식)

- **Superposition or Linearity Principle (중첩의 원리 또는 선형성의 원리)**

> - **제차 선형 상미분방정식에 대한 기본 정리**
>
> 제차 선형 미분방정식에 대해 어떤 열린 구간 I 에서 해들의 합과 상수곱은 다시 구간 I 에서 다시 제차 선형 미분방정식의 해가 된다.
> (이것은 비제차 선형 방정식 또는 비선형 방정식에서는 성립하지 않는다.)

- **General Solution(일반해)의 형태** : $y(x) = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)$
- **Basis of Solution (기저)** : $y_1(x), \ \cdots, \ y_n(x)$
- **Particular Solution (특수해)** : n개의 상수 $c_1, \ \cdots, \ c_n$ 에 특정한 값을 부여하면, 구간 I 에서 제차 방정식의 particular solution(특수해)을 얻는다.

3.1 Homogeneous Linear ODEs (제차 선형 상미분방정식)

- **Linearly Independent (일차독립)**

$k_1 y_1(x) + \cdots + k_n y_n(x) = 0$ 일 때 , n개의 함수 $y_1(x),\ \cdots,\ y_n(x)$ 에 대해 이들 함수가 정의된 어떤 구간에서 방정식이 모두 $k_1 = \cdots = k_n = 0$ 이 됨을 의미

- **Linearly Dependent (일차종속):**

방정식 $k_1 y_1(x) + \cdots + k_n y_n(x) = 0$ 이 구간에서 적어도 하나의 0이 아닌 상수 $k_1,\ \cdots,\ k_n$ 에 대하여도 성립함.

- **Initial Value Problem (초기값 문제):**

제차 선형상미분방정식과 n개의 초기조건으로 구성

- **Existence and Uniqueness (존재성과 유일성 정리)**

$p_0(x),\ \cdots,\ p_{n-1}(x)$ 가 어떤 열린 구간 I에서 연속함수이고, x_0 가 구간 I 내에 있다면, 초기값 문제는 구간 I에서 유일한 해를 갖는다.

- Ex. 3 $\quad y^{iv} - 5y'' + 4y = 0 \qquad y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} + c_3 e^{x} + c_4 e^{2x}$

3.1 Homogeneous Linear ODEs (제차 선형 상미분방정식)

■ Ex. 4 Solve the following initial value problem on any open interval I on the positive x-axis containing $x = 1$.

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$$

$$y(1) = 2, \quad y'(1) = 1, \quad y''(1) = -4$$

3.1 Homogeneous Linear ODEs (제차 선형 상미분방정식)

■ Ex. 4 Solve the following initial value problem on any open interval I on the positive x-axis containing $x = 1$.

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = 0$$

$$y(1) = 2, \;\; y'(1) = 1, \;\; y''(1) = -4$$

$$y = x^m$$

$$m^3 - 6m^2 + 11m - 6 = 0$$

$$y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$$

$$y = 2x + x^2 - x^3$$

3.1 Homogeneous Linear ODEs
(제차 선형 상미분방정식)

- **3차 방정식의 해법**

- 지롤라모 카르다노 (Girolamo Cardano, 1501-1576):
자신의 죽음을 예언하고 날짜를 맞추기 위해 자살.
- 니콜로 타르탈리아(Niccolo Fontana Tartaglia)가 발견해 혼자 알고 있던 것을, 카르다노에게 절대로 공개하지 않는다는 약속을 받고 알려줌.
카르다노는 그의 저서 '위대한 기술 (la Ars Magna de Rebus Algebraicis)'에 3차, 4차 방정식의 풀이법을 실음.
- 제자 로도비코 페라리가 4차 방정식의 해법을 발견.
- 아벨은 5차 이상의 방정식은 대수적으로 풀 수 없음을 증명함.

3.1 Homogeneous Linear ODEs
(제차 선형 상미분방정식)

일 반 적인 3차 방정식 $x^3+ax^2+bx+c=0$ 을 살펴 보자.

(단, x^3의 계수가 있을 때는 x^3의 계수로 나눠 준다. x^3 의 계수 $\neq 0$ 3차방정식이므로)

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

$$x^3+ax^2+bx+c+\frac{a^3}{27}-\frac{3a^3}{27}+\frac{2a^3}{27}+\frac{a^2x}{3}-\frac{a^2x}{3}+\frac{ab}{3}-\frac{ab}{3}\,\mathbf{X}=0$$

$$x^3+x^2a+\frac{a^2x}{3}+\frac{a^3}{27}+bx-\frac{a^2x}{3}+\frac{ab}{3}-\frac{a^3}{9}+\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c=0$$

$$\left(x+\frac{a}{3}\right)^3+\left(x+\frac{a}{3}\right)\left(b-\frac{a^2}{3}\right)+\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c=0$$

여기서 $x=y-\frac{a}{3}$ 라 하면

$$y^3+3py+q=0$$

(단, $p=\frac{1}{3}\left(b-\frac{a^2}{3}\right)$, $q=\frac{2}{27}a^3-\frac{ab}{3}+c$)

$y=n+m$ 이라 하면,

$$(n+m)^3+3p(n+m)+q=0$$

$$n^3+3n^2m+3nm^2+m^3+3pn+3pm+q=0$$

$$n^3+3nm(n+m)+m^3+3p(n+m)+q=0$$

$$n^3+m^3+q+3(nm+p)(n+m)=0$$

http://blog.naver.com/joonkeek/20051308412

3.1 Homogeneous Linear ODEs
(제차 선형 상미분방정식)

여기서 $n^3+m^3=-q$, $nm=-p$ 일때 식이 성립 한다.

$n^3+m^3=-q$ ········ ① , $n^3m^3=-p^3$ ·········· ②

근과 계수와의 관계를 이용하면

n^3, m^3은 $t^2+qt-p^3=0$ 의 근이다.

$$\therefore n^3=\frac{-q+\sqrt{q^2+4p^3}}{2} \qquad m^3=\frac{-q-\sqrt{q^2+4p^3}}{2}$$

여기서 ②에 의해 $nm=-p$ 가 되어야 한다.

i) $$\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+4p^3}}{2}}\times\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+4p^3}}{2}}=\sqrt{\frac{q^2-q^2-4p^3}{4}}=\sqrt[3]{\frac{-4p^3}{4}}=\sqrt[3]{-p^3}$$

$=-p$ 이므로 $n=\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+4p^3}}{2}}$, $m=\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+4p^3}}{2}}$

$$\therefore x=\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+4p^3}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+4p^3}}{2}}-\frac{a}{3}$$

ii) $$\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+4p^3}}{2}}\,\omega\times\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+4p^3}}{2}}\,\omega^2=\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+4p^3}}{2}}\times\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+4p^3}}{2}}=-p$$

($\because m\omega\cdot n\omega^2$, $m\omega^2\cdot n\omega$ 도 동일) (단, ω는 $x^3=1$ 이 되는 허근 중 하나.)

$$\therefore x=\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+4p^3}}{2}}\,\omega+\sqrt[3]{\frac{-q-\sqrt{q^2+4p^3}}{2}}\,\omega^2-a/3,\quad \sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+4p^3}}{2}}\,\omega^2+\sqrt[3]{\frac{-q+\sqrt{q^2+4p^3}}{2}}\,\omega-a/3$$

3.1 Homogeneous Linear ODEs
(제차 선형 상미분방정식)

- **Wronskian or Wronski Determinant**

$$W(y_1, \cdots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

- **Linear Dependence and Independence of Solutions (해의 일차종속과 일차독립)**

상미분방정식의 계수 $p_0(x), \cdots, p_{n-1}(x)$ 가 어떤 열린 구간 I 에서 연속이라고 가정하자. 구간 I 에서 제차 선형상미분방정식의 n개의 해 $y_1(x), \cdots, y_n(x)$ 가 구간 I 에서 일차종속이 되는 필요충분조건은 그들의 Wronskian이 구간 I 내의 어떤 $x = x_0$ 에서 0이 되는 것이다. 더욱이, $x = x_0$ 에서 $W = 0$ 이라면, 구간 I 에서 $W \equiv 0$ 이다. 그러므로, 만약 W 가 0이 아닌 x_1 이 구간 I 내에 존재하면, 구간 I 에서 $y_1(x), \cdots, y_n(x)$는 일차독립이고, 이 해들은 구간 I 에서 제차 선형상미분방정식의 해들의 기저를 형성한다.

3.1 Homogeneous Linear ODEs (제차 선형 상미분방정식)

- **Existence of a General Solution (일반해의 존재성)**

제차 선형 상미분방정식의 계수 $p_0(x),\ \cdots,\ p_{n-1}(x)$가 어떤 열린 구간 I에서 연속이면, 제차 선형 상미분방정식은 구간 I에서 일반해를 갖는다.

- **General Solution Includes All Solutions (일반해는 모든 해를 포함함)**

제차 선형 상미분방정식이 어떤 열린 구간 I에서 연속인 계수 $p_0(x),\ \cdots,\ p_{n-1}(x)$ 를 갖는다고 하면, 구간 I에서 제차 선형 상미분방정식의 모든 해 $y=Y(x)$ 는

$$Y(x)=C_1y_1(x)+\cdots+C_ny_n(x)$$

의 형태인데, 여기서 $y_1(x),\ \cdots,\ y_n(x)$ 는 구간 I에서 제차 선형 상미분방정식의 해의 어떤 기저이고, $C_1,\ \cdots,\ C_n$ 는 적당한 상수이다.

3.1 Homogeneous Linear ODEs
(제차 선형 상미분방정식)

PROBLEM SET 3.1

HW:

3.2 Homogeneous Linear ODEs with Constant Coefficients (상수계수를 갖는 제차 선형 상미분방정식)

- 상수계수를 갖는 n계 제차 선형 상미분방정식:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

- Characteristic Equation (특성방정식):

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

3.2 Homogeneous Linear ODEs with Constant Coefficients (상수계수를 갖는 제차 선형 상미분방정식)

일반해

특성방정식 $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$

- Distinct Real Roots (서로 다른 실근)

$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 이 서로 다른 것이면, 이에 대응하는 n 개의 일차독립인 해 :

$$y_1 = e^{\lambda_1 x}, \ \cdots, \ y_n = e^{\lambda_n x}$$

- Simple Complex Roots (단순 복소근)

Conjugate pairs (공액쌍) ($\lambda = \gamma \pm i\omega$)으로 나타남.

이에 대응하는 두 개의 일차독립인 해 : $y_1 = e^{\gamma x}\cos\omega x, \ y_2 = e^{\gamma x}\sin\omega x$

- Ex. 1 $\quad y''' - 2y'' - y' + 2y = 0 \qquad y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{2x}$

- Ex. 2 $\quad y''' - y'' + 100y' - 100y = 0$, $\quad y(0) = 4, \ y'(0) = 11, \ y''(0) = -299 \qquad y = e^{x} + 3\cos 10x + \sin 10x$

3.2 Homogeneous Linear ODEs with Constant Coefficients (상수계수를 갖는 제차 선형 상미분방정식)

● 일반해

- Multiple Real Roots (다중 실근)

λ 가 m차 실근이면, 이에 대응하는 m 개의 일차독립인 해:

$$e^{\lambda x},\ xe^{\lambda x},\ x^2 e^{\lambda x}, \cdots,\ x^{m-1}e^{\lambda x}$$

- Multiple Complex Roots (다중 복소근)

$\lambda = \gamma \pm i\omega$ 이 복소이중근이면,

이에 대응하는 일차독립인 해 :

$$e^{\gamma x}\cos\omega x,\ e^{\gamma x}\sin\omega x,\ xe^{\gamma x}\cos\omega x,\ xe^{\gamma x}\sin\omega x$$

■ Ex. 3 $y^{v} - 3y^{iv} + 3y''' - y'' = 0 \qquad y = c_1 + c_2 x + (c_3 + c_4 x + c_5 x^2)e^x$

3.2 Homogeneous Linear ODEs with Constant Coefficients (상수계수를 갖는 제차 선형 상미분방정식)

PROBLEM SET 3.2

HW: 20 (b)

3.3 Nonhomogeneous Linear ODEs (비제차 선형 상미분방정식)

- ***n* 계 비제차 선형상미분방정식**:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = r(x), \quad r(x) \neq 0$$

- **General Solution:** $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$

여기서 $y_h = c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$ 는 구간 I 에서의 제차 상미분방정식의 일반해이고 y_p 는 구간 I 에서의 임의의 상수를 포함하지 않는 비제차방정식의 어떤 해이다.

- **Particular Solution**

- Method of undetermined coefficients
- Method of variation of parameters

$$y_p(x) = y_1(x)\int \frac{W_1(x)}{W(x)} r(x)dx + \cdots + y_n(x)\int \frac{W_n(x)}{W(x)} r(x)dx$$

$W_j\ (j = 1, \cdots, n)$ 는 W 의 j 번째 열을 열벡터 $[0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]^T$ 로 치환하여 얻음.

3.3 Nonhomogeneous Linear ODEs (비제차 선형 상미분방정식)

■ Ex. 2 Solve the nonhomogeneous Euler-Cauchy equation.

$$x^3 y''' - 3x^2 y'' + 6xy' - 6y = x^4 \ln x$$

Step 1 제차 상미분방정식의 일반해

보조방정식: $m(m-1)(m-2) - 3m(m-1) + 6m - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = 1,\ 2,\ 3$

일반해: $y_h = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$

Step 2 매개변수변환법에 적용되는 행렬식

$$W = \begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix} = 2x^3,$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x^2 & x^3 \\ 0 & 2x & 3x^2 \\ 1 & 2 & 6x \end{vmatrix} = x^4, \quad W_2 = \begin{vmatrix} x & 0 & x^3 \\ 1 & 0 & 3x^2 \\ 0 & 1 & 6x \end{vmatrix} = -2x^3, \quad W_3 = \begin{vmatrix} x & x^2 & 0 \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = x^2$$

3.3 Nonhomogeneous Linear ODEs (비제차 선형 상미분방정식)

Step 3 적분

$$y_p = x\int \frac{x}{2} x \ln x dx - x^2 \int x \ln x dx + x^3 \int \frac{1}{2x} x \ln x dx = \frac{1}{6} x^4 \left(\ln x - \frac{11}{6} \right)$$

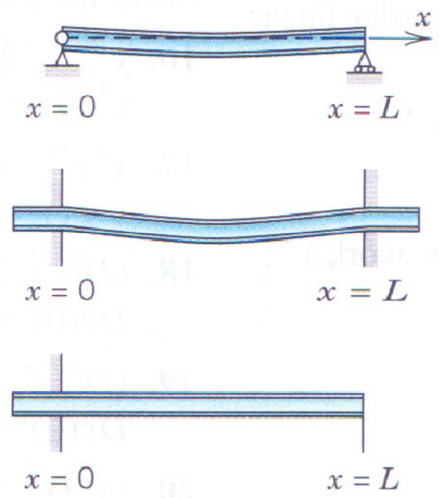
$$\therefore \; y = c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \frac{1}{6} x^4 \left(\ln x - \frac{11}{6} \right)$$

3.3 Nonhomogeneous Linear ODEs (비제차 선형 상미분방정식)

■ Ex. 3 Bending of an Elastic Beam Under a Load.

Bending moment $M(x) = EIy''(x)$.
E is Young's modulus of elasticity.
I is the moment of inertia of the cross section about the (horizontal) z-axis.
f(x) is the load per unit length.

$$M''(x) = EIy^{iv} = f(x) = f_0$$



(A) Simply supported

$y = y'' = 0$ at $x = 0$ and L

(B) Clamped at both ends

$y = y' = 0$ at $x = 0$ and L

(C) Clamped at the left end, free at the right end

$y(0) = y'(0) = 0,\ y''(L) = y'''(L) = 0$

$$(A)\ \ y = \frac{f_0}{24EI}\left(x^4 - 2Lx^3 + L^3x\right)$$

3.3 Nonhomogeneous Linear ODEs
(비제차 선형 상미분방정식)

PROBLEM SET 3.3

HW: 9, 11