Engineering Mathematics I

Prof. Dr. Yong-Su Na

(32-206, ysna@snu.ac.kr, Tel. 880-7204)

Text book: Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 9th Edition, Wiley (2006)

Ch. 5 Series Solutions of ODEs. Special Functions

Ch. 5 Series Solutions of ODEs. Special Functions (상미분방정식의 급수해법. 특수함수)

- 변수계수를 갖는 선형미분 방정식을 풀이하는 표준적인 방법인 power series method (멱급수 해법)을 소개한다
- 멱급수 해법으로 얻을 수 있는 유명한 특수함수: Bessel function (베셀 함수), Legendre function (르장드르 함수), Gauss의 hypergeometric function (초기화함수)

5.1 Power Series Method (거듭제곱급수 해법)

- **Power Series (거듭제곱급수):** $\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x-x_0)^m = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots$
  - 계수: $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \cdots$
  - 중심: x_0
  - 중심이 0 인 경우: $\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$

- Maclaurin 급수

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + \cdots \quad (|x| < 1)$$

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \cdots$$

$$\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \cdots$$

5.1 Power Series Method (거듭제곱급수 해법)

- **Idea of the Power Series Method:**

  상미분방정식 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 에 적용

- $p(x)$와 $q(x)$를 x의 거듭제곱급수로 표현
- 해를 미지의 계수를 갖는 거듭제곱급수 $y=\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$ 로 가정
- y와 y를 항별미분하여 얻은 급수를 상미분방정식에 대입

$$y'=\sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$$

$$y''=\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) a_m x^{m-1} = 2a_2 + 3\cdot 2a_3 x + \cdots$$

- 미지계수 a_m을 계산

5.1 Power Series Method (거듭제곱급수 해법)

■ Ex. 1 **Solve the following ODE by power series.**

$$y' = 2xy$$

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

$$y' = \sum_{m=1}^{\infty} m a_m x^{m-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots$$

$$\Rightarrow \quad a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots = 2x\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right)$$

$$\Rightarrow \quad a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots = 2a_0 x + 2a_1 x^2 + 2a_2 x^3 + \cdots$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = 0,\ 2a_2 = 2a_0,\ 3a_3 = 2a_1,\ 4a_4 = 2a_2,\ 5a_5 = 2a_3,\ 6a_6 = 2a_4,\ \cdots$$

$$\Rightarrow \quad a_2 = a_0,\ a_4 = \frac{a_2}{2} = \frac{a_0}{2!},\ a_6 = \frac{a_4}{3} = \frac{a_0}{3!},\ \cdots$$

$$\therefore\ y = a_0\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \cdots\right) = a_0 e^{x^2}$$

5.1 Power Series Method (거듭제곱급수 해법)

- Ex. 2 **Solve the following ODE by power series.**

$$y''+y=0$$

$$y=\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m \qquad y''=\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-1}$$

$$\Rightarrow \sum_{m=2}^{\infty} m(m-1)a_m x^{m-2}+\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m=0$$

$$\Rightarrow \sum_{s=0}^{\infty}(s+2)(s+1)a_{s+2}x^s=-\sum_{s=0}^{\infty} a_s x^s$$ (첫 번째 항은 $m=s+2$, 두 번째 항은 $m=s$)

Recursion Formula (순환공식): $a_{s+2}=-\dfrac{a_s}{(s+2)(s+1)}$ $(s=0,\ 1,\ \cdots)$

$$a_2=-\frac{a_0}{2\cdot 1}=-\frac{a_0}{2!},\quad a_3=-\frac{a_1}{3\cdot 2}=-\frac{a_1}{3!}$$

$$a_4=-\frac{a_2}{4\cdot 3}=\frac{a_0}{4!},\quad a_5=-\frac{a_3}{5\cdot 4}=\frac{a_1}{5!}$$

$$\therefore\ y=a_0+a_1x-\frac{a_0}{2!}x^2-\frac{a_1}{3!}x^3+\frac{a_0}{4!}x^4+\frac{a_1}{5!}x^5+\cdots=a_0\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-+\cdots\right)+a_1\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-+\cdots\right)$$

$$=a_0\cos x+a_1\sin x$$

5.1 Power Series Method (거듭제곱급수 해법)

PROBLEM SET 5.1

HW: 16

5.2 Theory of the Power Series Method (거듭제곱급수 해법의 이론)

- **Basic Concepts**

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m (x-x_0)^m = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots$$

- ***n* th Partial Sum (*n* 번째까지의 부분합)**:

$$s_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n$$

- **Remainder (나머지)**: $R_n(x) = a_{n+1}(x-x_0)^{n+1} + a_{n+2}(x-x_0)^{n+2} + \cdots$

- **Convergent (수렴)**: 부분합의 수열이 수렴할 때 $\lim_{n\to\infty} s_n(x_1) = s(x_1) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x_1 - x_0)^m$
- **Value(수렴값) 또는 Sum (합)**: 부분합의 수열이 수렴할 때, 부분합 수열의 극한값

❖ 거듭급수는 중심에서 항상 수렴한다.

- **발산**: 부분합의 수열이 발산할 때

5.2 Theory of the Power Series Method
(거듭제곱급수 해법의 이론)

- **Convergence Interval (수렴구간), Radius of Convergence (수렴반지름)**

- **수렴구간**: 급수가 수렴하는 값들의 구간 ($|x - x_0| < R$ 의 형태로 나타남)
- **수렴반지름** (R):

  급수는 $|x - x_0| < R$ 인 모든 x 에 대하여 수렴하고, $|x - x_0| > R$ 인 모든 x 에 대하여 발산할 때

  $$R = \frac{1}{\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{|a_m|}} \quad \text{또는} \quad R = \frac{1}{\lim_{m\to\infty} \left| a_{m+1} / a_m \right|}$$

5.2 Theory of the Power Series Method (거듭제곱급수 해법의 이론)

- Ex. 1-3

$$\sum_{m=0}^{\infty} m!\,x^m = 1 + x + 2x^2 + 6x^3 + \cdots$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

5.2 Theory of the Power Series Method (거듭제곱급수 해법의 이론)

■ Ex. 1-3

$$\sum_{m=0}^{\infty} m!x^m = 1 + x + 2x^2 + 6x^3 + \cdots$$

Converges only at the center x = 0.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

R = 1, converges when |x| < 1

$$e^x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

Converges for all x

5.2 Theory of the Power Series Method (거듭제곱급수 해법의 이론)

■ Ex. 4 **Find the radius of convergence of the series**

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{8^m} x^{3m} = 1 - \frac{x^3}{8} + \frac{x^6}{64} - \frac{x^9}{512} + - \cdots$$

이 급수는 계수가 $a_m = {(-1)^m}/{8^m}$ 인 $t = x^3$ 의 거듭제곱급수이다.

$\left| \frac{a_{m+1}}{a_m} \right| = \frac{8^m}{8^{m+1}} = \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad R = 8$ 이고 $|t| = |x^3| < 8$ 일 때,

즉, $|x| < 2$ 인 조건에서 수렴.

5.2 Theory of the Power Series Method (거듭제곱급수 해법의 이론)

- **Operations on Power Series (거듭제곱급수 연산)**

- **Termwise Differentiation (항별미분)**: 거듭제곱급수는 항별로 미분가능하다.
- **Termwise Addition (항별덧셈)**: 두 개의 거듭제곱급수는 각 항별로 더할 수 있다.
- **Termwise Multiplication (항별곱셈)**: 두 거듭제곱급수는 각 항별로 곱할 수 있다.
- **Vanishing of All Coefficients (모든 계수가 영이 됨)**:

만일 어떤 거듭제곱급수가 양의 수렴반지름을 갖고, 수렴구간 전체에서 합이 항등적으로 0이라면, 급수의 모든 계수는 0이다.

- **Existence of Power Series Solutions of ODEs. Real Analytic Functions (실수 해석함수)**

- **Real Analytic Function (실수 해석함수)**: 거듭제곱급수로 표현되어지는 실수함수
- **거듭제곱급수 해의 존재**

미분방정식 $y''+p(x)y'+q(x)y=r(x)$ 의 p, q, r 이 $x = x_0$에서 해석적이면 주어진 미분방정식의 모든 해는 $x = x_0$에서 해석적이고 $R > 0$인 수렴반지름을 갖는 $x-x_0$의 거듭제곱급수로 나타낼 수 있다. 미분방정식 $\tilde{h}(x)y''+\tilde{p}(x)y'+\tilde{q}(x)y=\tilde{r}(x)$ 의 $\tilde{h}$, $\tilde{p}$, $\tilde{q}$, $\tilde{r}$ 이 $x = x_0$에서 해석적이고, $\tilde{r}$ 이 $x = x_0$에서 해석적이고 $\tilde{h}(x_0) \neq 0$ 이면, 동일한 결과가 성립한다.

5.2 Theory of the Power Series Method
(거듭제곱급수 해법의 이론)

PROBLEM SET 5.2

HW: 15

5.3 Legendre's Equation. Legendre Polynomials $P_n(x)$ (르장드르 방정식. 다항식)

- **Legendre's Equation:** $\left(1-x^2\right)y''-2xy'+n\left(n+1\right)y=0$

$y=\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m,\ y'=\sum_{m=1}^{\infty}ma_m x^{m-1}$과 $y''=\sum_{m=2}^{\infty}m\left(m\text{-}1\right)a_m x^{m-2}$를 대입

5.3 Legendre's Equation. Legendre Polynomials $P_n(x)$ (르장드르 방정식. 다항식)

- **Legendre's Equation:** $\left(1-x^2\right)y''-2xy'+n\left(n+1\right)y=0$

$y=\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m,\ y'=\sum_{m=1}^{\infty}ma_m x^{m-1}$과 $y''=\sum_{m=2}^{\infty}m(m\text{-}1)a_m x^{m-2}$를 대입

$$\Rightarrow \quad \left(1-x^2\right)\sum_{m=2}^{\infty}m(m\text{-}1)a_m x^{m-2}-2x\sum_{m=1}^{\infty}ma_m x^{m-1}+n(n+1)\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m=0$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{m=2}^{\infty}m(m\text{-}1)a_m x^{m-2}-\sum_{m=2}^{\infty}m(m\text{-}1)a_m x^m-\sum_{m=1}^{\infty}ma_m x^m+\sum_{m=0}^{\infty}n(n+1)a_m x^m=0$$

첫번째 급수는 $m-2=s$라 놓고,나머지 세 개의 급수들은 단순히 m대신에 s로 치환

$$\Rightarrow \quad \sum_{s=0}^{\infty}(s+2)(s+1)a_{s+2}x^s-\sum_{s=2}^{\infty}s(s\text{-}1)a_s x^s-\sum_{s=1}^{\infty}sa_s x^s+\sum_{s=0}^{\infty}n(n+1)a_s x^s=0$$

5.3 Legendre's Equation. Legendre Polynomials $P_n(x)$ (르장드르 방정식. 다항식)

$$\therefore\ a_{s+2} = -\frac{(n-s)(n+s+1)}{(s+2)(s+1)} a_s \qquad (s = 0,\ 1,\ \cdots)$$

5.3 Legendre's Equation. Legendre Polynomials $P_n(x)$ (르장드르 방정식. 다항식)

x^0 의 계수 : $2\cdot 1 a_2 + n(n+1)a_0 = 0$

x^1 의 계수 : $3\cdot 2 a_3 + [-2 + n(n+1)]a_1 = 0$

$\vdots$

일반적으로 $(s+2)(s+1)a_{s+2} + [-s(s-1) - 2s + n(n+1)]a_s = 0$

$$\therefore\ a_{s+2} = -\frac{(n-s)(n+s+1)}{(s+2)(s+1)}a_s \qquad (s = 0,\ 1,\ \cdots)$$

$$a_2 = -\frac{n(n+1)}{2!}a_0 \qquad a_3 = -\frac{(n-1)(n+2)}{3!}a_1$$

$$a_4 = -\frac{(n-2)(n+3)}{4\cdot 3}a_2 = \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}a_0 \qquad a_5 = -\frac{(n-3)(n+4)}{5\cdot 4}a_3 = \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}a_1$$

$\therefore$ 일반해 : $y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$

5.3 Legendre's Equation. Legendre Polynomials $P_n(x)$ (르장드르 방정식. 다항식)

x^0 의 계수 : $2\cdot 1 a_2 + n(n+1)a_0 = 0$

x^1 의 계수 : $3\cdot 2a_3 + [-2 + n(n+1)]a_1 = 0$

$\vdots$

일반적으로 $(s+2)(s+1)a_{s+2} + [-s(s-1) - 2s + n(n+1)]a_s = 0$

$$\therefore\ a_{s+2} = -\frac{(n-s)(n+s+1)}{(s+2)(s+1)}a_s \qquad (s = 0,\ 1,\ \cdots)$$

$$a_2 = -\frac{n(n+1)}{2!}a_0 \qquad a_3 = -\frac{(n-1)(n+2)}{3!}a_1$$

$$a_4 = -\frac{(n-2)(n+3)}{4\cdot 3}a_2 = \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}a_0 \qquad a_5 = -\frac{(n-3)(n+4)}{5\cdot 4}a_3 = \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}a_1$$

$\therefore$ 일반해 : $y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$

$$y_1(x) = 1 - \frac{n(n+1)}{2!}x^2 + \frac{(n-2)n(n+1)(n+3)}{4!}x^4 - + \cdots$$

$$y_2(x) = x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!}x^3 + \frac{(n-3)(n-1)(n+2)(n+4)}{5!}x^5 - + \cdots$$

5.3 Legendre's Equation. Legendre Polynomials $P_n(x)$ (르장드르 방정식. 다항식)

- **Legendre Polynomials**

$$a_s = -\frac{(s+2)(s+1)}{(n-s)(n+s+1)} a_{s+2} \qquad (s \le n-2)$$

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = \begin{cases} 1 & n=0 \\ \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!} & n \ne 0 \end{cases}$$ 로 선택

Why? Homework

$$\therefore\ a_{n-2m} = (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!}$$

$$\Rightarrow\ P_n(x) = \sum_{m=0}^{M} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} x^{n-2m} \qquad \left(M = \frac{n}{2} \text{ 또는 } \frac{n-1}{2}\right)$$

5.3 Legendre's Equation. Legendre Polynomials $P_n(x)$ (르장드르 방정식. 다항식)

- **Legendre Polynomials**

$$a_s = -\frac{(s+2)(s+1)}{(n-s)(n+s+1)} a_{s+2} \qquad (s \le n-2)$$

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!} & n \ne 0 \end{cases} \text{ 로 선택}$$

Why? Homework

$$\Rightarrow \quad a_{n-2} = -\frac{n(n-1)}{2(2n-1)} a_n = -\frac{n(n-1)(2n)!}{2(2n-1)2^n (n!)^2}$$

$$= -\frac{n(n-1)2n(2n-1)(2n-2)!}{2(2n-1)2^n n(n-1)! n(n-1)(n-2)!} = -\frac{(2n-2)!}{2^n (n-1)!(n-2)!}$$

$$a_{n-4} = -\frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-3)} a_{n-2} = \frac{(2n-4)!}{2^n 2!(n-2)!(n-4)!}$$

$$\therefore \; a_{n-2m} = (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!}$$

$$\Rightarrow P_n(x) = \sum_{m=0}^{M} (-1)^m \frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!} x^{n-2m} \qquad \left(M = \frac{n}{2} \text{ 또는 } \frac{n-1}{2} \right)$$

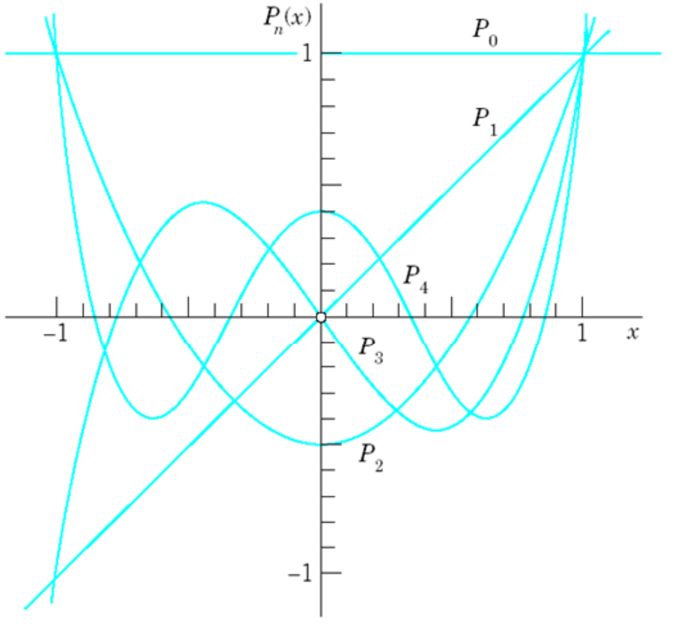
5.3 Legendre's Equation. Legendre Polynomials $P_n(x)$ (르장드르 방정식. 다항식)

- **Legendre 다항식의 예**

$$P_0(x) = 1, \qquad P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \qquad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \qquad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$$



5.3 Legendre's Equation. Legendre Polynomials $P_n(x)$ (르장드르 방정식. 다항식)

PROBLEM SET 5.3

HW: 15

5.4 Frobenius Method (Frobenius 해법)

- **Frobenius Method**

함수 $b(x)$와 $c(x)$가 $x=0$에서 해석적일 경우 상미분방정식 $y''+\frac{b(x)}{x}y'+\frac{c(x)}{x^2}y=0$은

$$y(x)=x^r\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^m = x^r\left(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots\right) \qquad \left(a_0\neq 0\right)$$

같은 형태의 해를 적어도 하나 갖는다.

5.4 Frobenius Method (Frobenius 해법)

- **Indicial Equation (결정방정식), Indicating the Form of Solutions**

$$y'' + \frac{b(x)}{x} y' + \frac{c(x)}{x^2} y = 0 \xrightarrow{x^2\text{을 곱한다.}} x^2 y'' + x b(x) y' + c(x) y = 0$$

- $b(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots, \quad c(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$로 표현
- $y(x) = x^r \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = x^r \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right)$

x^r의 계수 :

5.4 Frobenius Method (Frobenius 해법)

- **Indicial Equation (결정방정식), Indicating the Form of Solutions**

$$y'' + \frac{b(x)}{x} y' + \frac{c(x)}{x^2} y = 0 \xrightarrow{x^2\text{을 곱한다.}} x^2 y'' + x b(x) y' + c(x) y = 0$$

- $b(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots, \quad c(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$로 표현
- $y(x) = x^r \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m = x^r (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)$을 항별미분하면

$$y'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r) a_m x^{m+r-1} = x^{r-1} [r a_0 + (r+1) a_1 x + (r+2) a_2 x^2 + \cdots]$$

$$y''(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1) a_m x^{m+r-2} = x^{r-2} [r(r-1) a_0 + (r+1) r a_1 x + (r+2)(r+1) a_2 x^2 + \cdots]$$을 대입

$$\Rightarrow \quad x^r [r(r-1) a_0 + \cdots] + (b_0 + b_1 x + \cdots) x^r [r a_0 + \cdots] + (c_0 + c_1 x + \cdots) x^r (a_0 + a_1 x + \cdots) = 0$$

x^r의 계수 : $[r(r-1) + b_0 r + c_0] a_0 = 0$

$a_0 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad r(r-1) + b_0 r + c_0 = 0$ (결정방정식(**Indicial Equation**))

5.4 Frobenius Method (Frobenius 해법)

- **Forbenius Method, Basis of Solutions. Three Cases**

- **Case 1. Distinct Roots Not Differing by an Integer**
  (두 근의 차가 정수가 아닌 서로 다른 근들)

$$y_1(x) = x^{r_1}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) \text{과} \quad y_2(x) = x^{r_2}\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots\right)$$

- **Case 2. Double Root (이중근)**

$$y_1(x) = x^{r}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) \text{과} \quad y_2(x) = y_1(x)\ln x + x^{r}\left(A_1 x + A_2 x^2 + \cdots\right)$$

- **Case 3. Roots Differing by an Integer**
  (두 근의 차가 정수인 서로 다른 근들)

$$y_1(x) = x^{r_1}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right) \text{과} \quad y_2(x) = k y_1(x)\ln x + x^{r_2}\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots\right)$$

$$r_1 - r_2 > 0$$

- **결정방정식의 근이 결정되면, Frobenius 해법은 기술적으로 거듭제곱급수해법과 유사. 두 번째 해는 차수축소에 의해 보다 신속히 구할 수 있음.**

5.4 Frobenius Method (Frobenius 해법)

- Ex.2 **Solve the ODE.**

$$x(x-1)y''+(3x-1)y'+y=0$$

5.4 Frobenius Method (Frobenius 해법)

- Ex.2 **Solve the ODE.**

$$x(x-1)y''+(3x-1)y'+y=0$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r}-\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r-1}+3\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_m x^{m+r}-\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_m x^{m+r-1}+\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r}=0$$

5.4 Frobenius Method (Frobenius 해법)

- Ex.2 **Solve the ODE.**

$$x(x-1)y''+(3x-1)y'+y=0$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r}-\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r-1}+3\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_m x^{m+r}-\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_m x^{m+r-1}+\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r}=0$$

가장 낮은 차수인 x^{r-1}의 계수 : $[-r(r-1)-r]a_0=0 \quad \Rightarrow \quad \therefore\ r=0$

$$\sum_{m=0}^{\infty}m(m-1)a_m x^{m}-\sum_{m=0}^{\infty}m(m-1)a_m x^{m-1}+3\sum_{m=0}^{\infty}ma_m x^{m}-\sum_{m=0}^{\infty}ma_m x^{m-1}+\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m}=0$$

첫번째 해

$$s(s-1)a_s-(s+1)sa_{s+1}+3sa_s-(s+1)a_{s+1}+a_s=0 \quad \Rightarrow \quad a_{s+1}=a_s$$

$a_0=1$로 선택하면 $y_1(x)=\sum_{m=0}^{\infty}x^m=\dfrac{1}{1-x} \quad (|x|<1)$

두번째 해 차수축소법에 의하여

$$u'=y_1^{-2}e^{-\int p\,dx}$$

5.4 Frobenius Method (Frobenius 해법)

■ Ex.2 **Solve the ODE.**

$$x(x-1)y''+(3x-1)y'+y=0$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r}-\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r-1}+3\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_m x^{m+r}-\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_m x^{m+r-1}+\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r}=0$$

가장 낮은 차수인 x^{r-1}의 계수 : $[-r(r-1)-r]a_0=0 \quad \Rightarrow \quad \therefore\ r=0$

$$\sum_{m=0}^{\infty}m(m-1)a_m x^{m}-\sum_{m=0}^{\infty}m(m-1)a_m x^{m-1}+3\sum_{m=0}^{\infty}ma_m x^{m}-\sum_{m=0}^{\infty}ma_m x^{m-1}+\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m}=0$$

첫번째 해

$$s(s-1)a_s-(s+1)sa_{s+1}+3sa_s-(s+1)a_{s+1}+a_s=0 \quad \Rightarrow \quad a_{s+1}=a_s$$

$a_0=1$로 선택하면 $y_1(x)=\sum_{m=0}^{\infty}x^m=\dfrac{1}{1-x} \quad (|x|<1)$

두번째 해 차수축소법에 의하여

$$-\int p\,dx=-\int\frac{3x-1}{x(x-1)}dx=-\int\left(\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x}\right)dx=-2\ln(x-1)-\ln x$$

$$u'=y_1^{-2}e^{-\int p\,dx}=\frac{(x-1)^2}{(x-1)^2x}=\frac{1}{x}, \qquad u=\ln x, \qquad y_2=uy_1=\frac{\ln x}{x-1}$$

5.4 Frobenius Method (Frobenius 해법)

PROBLEM SET 5.4

HW: 18 (a)

5.5 Bessel's Equation. Bessel Functions $J_\nu(x)$ (Bessel의 방정식. 함수)

- **Bessel 방정식** : $x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right)y = 0$

  Frobenius 해법 적용 : $y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r}$과 그 도함수를 대입

$$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r+2} - \nu^2 \sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r} = 0$$

5.5 Bessel's Equation. Bessel Functions $J_\nu(x)$ (Bessel의 방정식. 함수)

- **Bessel 방정식** : $x^2y''+xy'+\left(x^2-\nu^2\right)y=0$

  Frobenius 해법 적용 : $y=\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r}$과 그 도함수를 대입

  $$\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)(m+r-1)a_m x^{m+r}+\sum_{m=0}^{\infty}(m+r)a_m x^{m+r}+\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r+2}-\nu^2\sum_{m=0}^{\infty}a_m x^{m+r}=0$$

  $s=0$일 때, $r(r-1)a_0+ra_0-\nu^2a_0=0$

  $s=1$일 때, $(r+1)ra_1+(r+1)a_1-\nu^2a_1=0$

  $s=2,\ 3,\ \cdots$일 때, $(s+r)(s+r-1)a_s+(s+r)a_s+a_{s-2}-\nu^2a_s=0$

  $\therefore$ 결정방정식 : $(r+\nu)(r-\nu)=0$

  $$r_1=\nu(\geq 0),\quad r_2=-\nu$$

5.5 Bessel's Equation. Bessel Functions $J_\nu(x)$ (Bessel의 방정식. 함수)

- $r = r_1 = \nu$에 대한 계수 점화(Coefficient Recursion)

$$\left.\begin{array}{l}(2\nu+1)a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 0 \\ (s+2\nu)sa_s + a_{s-2} = 0\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad a_3 = a_5 = \cdots = 0$$

$s = 2m$을 대입하면 $(2m+2\nu)2ma_{2m} + a_{2m-2} = 0$

$$\Rightarrow \quad a_{2m} = -\frac{1}{2^2 m(m+\nu)} a_{2m-2}, \quad m = 1,\ 2,\ \cdots$$

$$\Rightarrow \quad a_2 = -\frac{1}{2^2(\nu+1)} a_0$$

$$a_4 = -\frac{1}{2^2 2(\nu+2)} a_2 = \frac{1}{2^4 2!(\nu+1)(\nu+2)} a_0$$

$$\Rightarrow \quad \therefore\ a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m} m!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+m)} a_0, \quad m = 1,\ 2,\ \cdots$$

5.5 Bessel's Equation. Bessel Functions $J_\nu(x)$ (Bessel의 방정식. 함수)

- 정수 $\nu = n$에 대한 Bessel 함수 $J_n(x)$

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m} m!(n+1)(n+2)\cdots(n+m)} a_0, \qquad m = 1,\ 2,\ \cdots$$

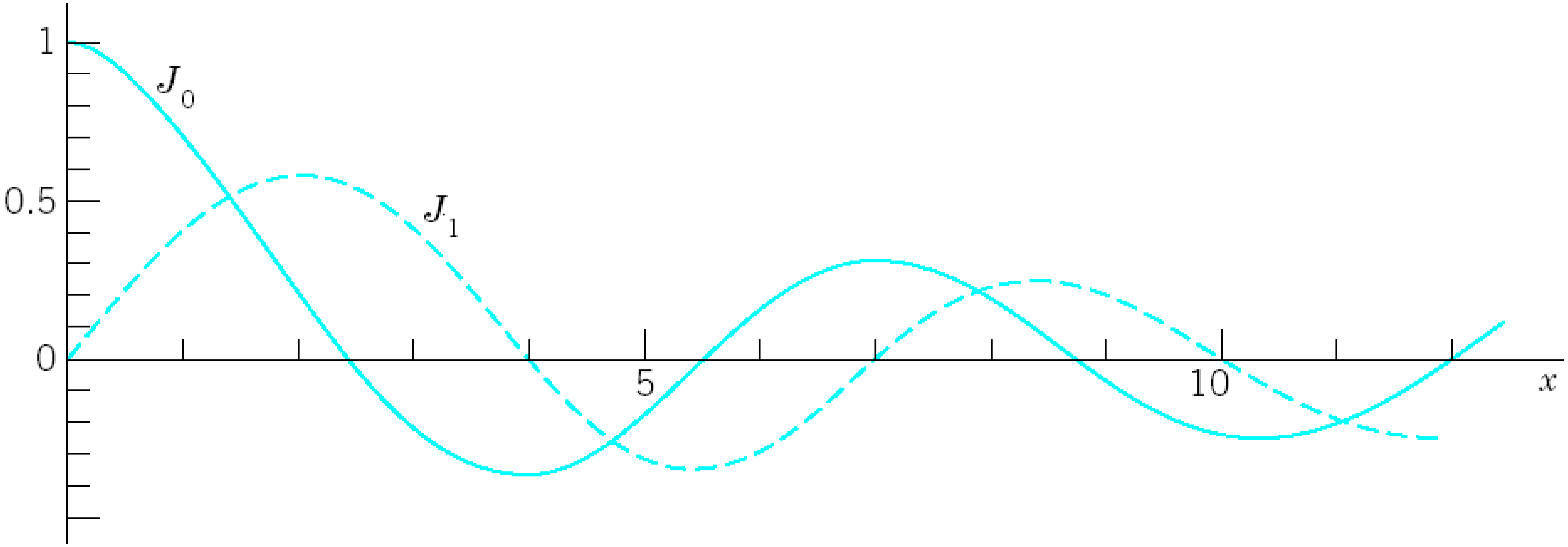
$a_0 = \dfrac{1}{2^n n!}$으로 선택하면 $a_{2m} = \dfrac{(-1)^m}{2^{2m+n} m!(n+m)!}, \qquad m = 1,\ 2,\ \cdots$

$\therefore\ J_n(x) = x^n \sum_{m=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+n} m!(n+m)!}$: n 차 제 1종 **Bessel** 함수

$$\leftarrow \quad y = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r}$$

5.5 Bessel's Equation. Bessel Functions $J_\nu(x)$ (Bessel의 방정식. 함수)

$$J_n(x) = x^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+n} m!(n+m)!} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{for large } x$$



5.5 Bessel's Equation. Bessel Functions $J_\nu(x)$ (Bessel의 방정식. 함수)

$$\Gamma(\nu+1)=\int_0^\infty e^{-t}t^{\nu}dt = -e^{-t}t^{\nu}\Big|_0^\infty+\nu\int_0^\infty e^{-t}t^{\nu-1}dt$$

- 임의의 $\nu \ge 0$에 대한 Bessel 함수 $J_\nu(x)$. Gamma Function

Gamma Function (감마함수) : $\Gamma(\nu)=\int_0^\infty e^{-t}t^{\nu-1}dt \quad (\nu>0)$

감마함수의 성질 : $\Gamma(\nu+1)=\nu\Gamma(\nu), \quad \Gamma(n+1)=n! \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$

$$a_0=\frac{1}{2^n n!}\rightarrow\frac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}$$

$$\therefore\ J_\nu(x)=x^\nu\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu}m!\Gamma(\nu+m+1)}$$: ν차 제 1종 **Bessel** 함수

$$\leftarrow\quad a_{2m}=\frac{(-1)^m}{2^{2m}m!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+m)}a_0$$

5.5 Bessel's Equation. Bessel Functions $J_\nu(x)$ (Bessel의 방정식. 함수)

$$\Gamma(\nu+1)=\int_0^\infty e^{-t}t^\nu dt = -e^{-t}t^\nu\Big|_0^\infty+\nu\int_0^\infty e^{-t}t^{\nu-1}dt$$

- 임의의 $\nu \ge 0$에 대한 Bessel 함수 $J_\nu(x)$. Gamma Function

Gamma Function (감마함수) : $\Gamma(\nu)=\int_0^\infty e^{-t}t^{\nu-1}dt \quad (\nu>0)$

감마함수의 성질 : $\Gamma(\nu+1)=\nu\Gamma(\nu), \quad \Gamma(n+1)=n! \qquad (n=0,\ 1,\ \cdots)$

$a_0=\dfrac{1}{2^n n!}\rightarrow\dfrac{1}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}$ 으로 선택하면 $a_{2m}=\dfrac{(-1)^m}{2^{2m+\nu}m!\Gamma(\nu+m+1)}, \qquad m=1,\ 2,\ \cdots$

$$\therefore\ J_\nu(x)=x^\nu\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu}m!\Gamma(\nu+m+1)}$$: ν차 제 1종 **Bessel** 함수

$$\leftarrow\quad J_n(x)=x^n\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+n}m!(n+m)!}$$

5.5 Bessel's Equation. Bessel Functions $J_\nu(x)$ (Bessel의 방정식. 함수)

- 두 번째 1차 독립해: $J_{-\nu}(x) = x^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m-\nu} m! \Gamma(m-\nu+1)}$

- **Bessel 방정식의 일반해**

  ν가 정수가 아니면, 모든 $x \neq 0$에 대한 Bessel 방정식의 일반해

  $$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x)$$

- **Bessel 함수 J_n와 J_{-n}의 일차종속성:** $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-n}}{2^{2m-n} m!(m-n)!} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+s} x^{2s+n}}{2^{2s+n} (n+s)! s!} \quad (m = n+s)$$

5.5 Bessel's Equation. Bessel Functions $J_\nu(x)$ (Bessel의 방정식. 함수)

- 두 번째 1차 독립해: $J_{-\nu}(x) = x^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m-\nu} m! \Gamma(m-\nu+1)}$
- **Bessel 방정식의 일반해**

ν가 정수가 아니면, 모든 $x \neq 0$에 대한 Bessel 방정식의 일반해

$$y(x) = c_1 J_\nu(x) + c_2 J_{-\nu}(x)$$

- **Bessel 함수 J_n와 J_{-n}의 일차종속성**: $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$
- **Derivatives, Recursions**

미분관계 : $[x^\nu J_\nu(x)]' = x^\nu J_{\nu-1}(x)$

$$[x^{-\nu} J_\nu(x)]' = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)$$

점화관계 : $J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_\nu(x)$

$$J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2J_\nu'(x)$$

$$J_\nu(x) = x^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu+m+1)}$$

5.5 Bessel's Equation. Bessel Functions $J_\nu(x)$ (Bessel의 방정식. 함수)

- 반정수 차수 ν 에 대한 **Elementray Bessel Functions** J_ν

차수 $\nu = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \cdots$ 인 Bessel 함수 J_ν는 초등함수이다.

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x, \qquad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right), \qquad J_{-3/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{\cos x}{x} + \sin x\right)$$

5.5 Bessel's Equation. Bessel Functions $J_\nu(x)$ (Bessel의 방정식. 함수)

PROBLEM SET 5.5

HW: 20, 26

5.6 Bessel Functions of the Second Kind $Y_\nu(x)$ (제 2종 Bessel 함수)

- Bessel 방정식 $xy''+y'+xy=0$의 일반해 (n = 0)

첫번 째 해 : $J_0(x)$

두번 째 해: $y_2(x)=J_0(x)\ln x+\sum_{m=1}^{\infty}A_m x^m$ (r = 0의 이중근을 가질 경우)

미분하면, $y_2'(x)=J_0'\ln x+\dfrac{J_0}{x}+\sum_{m=1}^{\infty}mA_m x^{m-1}$, $y_2''(x)=J_0''\ln x+\dfrac{2J_0'}{x}-\dfrac{J_0}{x^2}+\sum_{m=1}^{\infty}m(m-1)A_m x^{m-2}$

$$\Rightarrow \quad 2J_0'+\sum_{m=1}^{\infty}m(m-1)A_m x^{m-1}+\sum_{m=1}^{\infty}mA_m x^{m-1}+\sum_{m=1}^{\infty}A_m x^{m+1}=0$$

5.6 Bessel Functions of the Second Kind $Y_\nu(x)$ (제 2종 Bessel 함수)

- Bessel 방정식 $xy''+y'+xy=0$의 일반해 (n = 0)

첫번 째 해 : $J_0(x)$

두번 째 해: $y_2(x)=J_0(x)\ln x+\sum_{m=1}^{\infty}A_m x^m$ (r = 0의 이중근을 가질 경우)

미분하면, $y_2'(x)=J_0'\ln x+\dfrac{J_0}{x}+\sum_{m=1}^{\infty}mA_m x^{m-1}$, $y_2''(x)=J_0''\ln x+\dfrac{2J_0'}{x}-\dfrac{J_0}{x^2}+\sum_{m=1}^{\infty}m(m-1)A_m x^{m-2}$

$$\Rightarrow \quad 2J_0'+\sum_{m=1}^{\infty}m(m-1)A_m x^{m-1}+\sum_{m=1}^{\infty}mA_m x^{m-1}+\sum_{m=1}^{\infty}A_m x^{m+1}=0$$

$$J_0(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2} \quad \Rightarrow \quad J_0'(x)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m-1}m!(m-1)!}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m-2}m!(m-1)!}+\sum_{m=1}^{\infty}m^2A_m x^{m-1}+\sum_{m=1}^{\infty}A_m x^{m+1}=0$$

5.6 Bessel Functions of the Second Kind $Y_\nu(x)$ (제 2종 Bessel 함수)

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m-2}m!(m-1)!}+\sum_{m=1}^{\infty}m^2A_mx^{m-1}+\sum_{m=1}^{\infty}A_mx^{m+1}=0$$

$$\Rightarrow \quad A_1=0$$

x^{2s} 의 계수들의 합 : $(2s+1)^2A_{2s+1}+A_{2s-1}=0 \quad (s=1,\ 2,\ \cdots)$

$$\Rightarrow \quad A_3=A_5=\cdots=0,$$

x^{2s+1} 의 계수들의 합 : $\dfrac{(-1)^{s+1}}{2^{2s}(s+1)!s!}+(2s+2)^2A_{2s+2}+A_{2s}=0$

5.6 Bessel Functions of the Second Kind $Y_\nu(x)$ (제 2종 Bessel 함수)

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m-1}}{2^{2m-2}m!(m-1)!}+\sum_{m=1}^{\infty}m^2A_m x^{m-1}+\sum_{m=1}^{\infty}A_m x^{m+1}=0$$

$$\Rightarrow \quad A_1=0$$

x^{2s} 의 계수들의 합 : $(2s+1)^2A_{2s+1}+A_{2s-1}=0 \quad (s=1,\ 2,\ \cdots)$

$$\Rightarrow \quad A_3=A_5=\cdots=0,$$

x^{2s+1} 의 계수들의 합 : $\dfrac{(-1)^{s+1}}{2^{2s}(s+1)!s!}+(2s+2)^2A_{2s+2}+A_{2s}=0$

$$\Rightarrow \quad s=0:\ -1+4A_2=0,\quad A_2=1/4$$

$$\Rightarrow \quad s=1:\ 1/8+16A_4+A_2=0,\quad A_4=-3/128$$

$$\Rightarrow \quad A_{2m}=\frac{(-1)^{m-1}}{2^{2m}(m!)^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{m}\right)=\frac{(-1)^{m-1}h_m}{2^{2m}(m!)^2}\quad (m=1,\ 2,\ \cdots)$$

$$\therefore\ y_2(x)=J_0(x)\ln x+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}h_m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m}=J_0(x)\ln x+\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{128}x^4+\frac{11}{13824}x^6-+\cdots$$

5.6 Bessel Functions of the Second Kind $Y_\nu(x)$ (제 2종 Bessel 함수)

- **0차 제 2종 Bessel 함수 또는 0차 Neumann 함수**

$$Y_0(x)=\frac{2}{\pi}\left[J_0(x)\left(\ln\frac{x}{2}+\gamma\right)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}h_m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m}\right]\qquad y_2\to a(y_2+bJ_0),\quad a=2/\pi,\quad b=\gamma-\ln 2$$

- **ν차 제 2종 Bessel 함수 또는 ν차 Neumann 함수**

$$Y_\nu(x)=\frac{1}{\sin\nu\pi}\left[J_\nu(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)\right]$$

$$Y_n(x)=\lim_{\nu\to n}Y_\nu(x)=\frac{2}{\pi}J_n(x)\left(\ln\frac{x}{2}+\gamma\right)+\frac{x^n}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}(h_m+h_{m+n})}{2^{2m+n}m!(m+n)!}x^{2m}-\frac{x^{-n}}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-m-1)!}{2^{2m-n}m!}x^{2m}$$

- **Bessel 방정식의 일반해**

모든 ν 값(그리고 $x>0$)에 대한 Bessel 방정식의 일반해 : $y(x)=C_1J_\nu(x)+C_2Y_\nu(x)$

5.6 Bessel Functions of the Second Kind $Y_\nu(x)$ (제 2종 Bessel 함수)

PROBLEM SET 5.6

HW: 5, 13

5.7 Sturm-Liouville Problems. Orthogonal Functions (Sturm-Liouville 문제. 직교함수)

- **Sturm – Liouville problem**

  Sturm – Liouville equation : $[p(x)y']' + [q(x) + \lambda r(x)]y = 0$

  Sturm – Liouville boundary condition : $k_1 y(a) + k_2 y'(a) = 0$

  $$l_1 y(b) + l_2 y'(b) = 0$$

■ Ex. 1 **Legendre's and Bessel's Equations are Sturm-Liouville Equations**

Legendre 방정식 , $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$는

$$\left[(1-x^2)y'\right]' + \lambda y = 0, \quad \lambda = n(n+1)$$

와 같은 형태로 쓸수 있다.

여기서 , $p = 1 - x^2,\ q = 0,\ r = 1$

5.7 Sturm-Liouville Problems. Orthogonal Functions (Sturm-Liouville 문제. 직교함수)

Bessel 방정식, $x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ 은

$$[xy']' + \left(-\frac{n^2}{x} + \lambda x\right)y = 0, \quad \lambda = 1$$

와 같은 형태로 쓸수 있다.

여기서, $p = x,\ q = -\frac{n^2}{x},\ r = x$

cf) $x = k\tilde{x}$

$$\tilde{x}^2 y'' + \tilde{x} y' + (k^2 \tilde{x}^2 - n^2)y = 0$$

$$\left[\tilde{x} y'\right]' + \left(-\frac{n^2}{\tilde{x}} + \lambda \tilde{x}\right)y = 0, \quad \lambda = k^2$$

5.7 Sturm-Liouville Problems. Orthogonal Functions (Sturm-Liouville 문제. 직교함수)

- Ex. 2 **Trigonometric Functions as Eigenfunctions. Vibrating String**

  Find the eigenvalues and eigenfunctions of the Sturm-Liouville Problem.

  $y''+\lambda y=0, \quad y(0)=0, \quad y(\pi)=0$

$p=1,\ q=0,\ r=1$이고, $a=0,\ b=\pi,\ k_1=l_1=1,\ k_2=l_2=0$

$$[p(x)y']'+[q(x)+\lambda r(x)]y=0$$
$$k_1 y(a)+k_2 y'(a)=0$$
$$l_1 y(b)+l_2 y'(b)=0$$

5.7 Sturm-Liouville Problems. Orthogonal Functions (Sturm-Liouville 문제. 직교함수)

■ Ex. 2 **Trigonometric Functions as Eigenfunctions. Vibrating String**

Find the eigenvalues and eigenfunctions of the Sturm-Liouville Problem.

$$y''+\lambda y = 0, \quad y(0)=0, \quad y(\pi)=0$$

$p=1,\ q=0,\ r=1$이고, $a=0,\ b=\pi,\ k_1=l_1=1,\ k_2=l_2=0$

* 음의 $\lambda=-\nu^2$에 대하여 일반해 $y(x)=c_1e^{\nu x}+c_2e^{-\nu x}$이다.
  경계조건으로부터 $c_1=c_2=0 \ \therefore\ y\equiv 0$

* $\lambda=0$인 경우도 $y\equiv 0$

* $\lambda=\nu^2$에 대하여 일반해 $y(x)=A\cos\nu x+B\sin\nu x$이다.

$y(0)=A=0,\ y(\pi)=B\sin\nu\pi=0 \quad \Rightarrow \quad \nu=0,\ \ \pm1,\ \ \pm2,\ \ \cdots$

$\nu=0$일 때, $y\equiv 0$

고유값 $\lambda=\nu^2=1,\ 4,\ 9,\ 16,\ \cdots$ 이고, 이에 대응하는 고유함수는

$y(x)=\sin\nu x \ \ (\nu=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$

5.7 Sturm-Liouville Problems. Orthogonal Functions (Sturm-Liouville 문제. 직교함수)

- **Existence of Eigenvalues:**

Sturm – Liouville문제의 고유값들은 식 $p,\ q,\ r$에 대한 일반적인 조건하에서 무수히 많이 존재한다.

- **Reality of Eigenvalues:**

$p,\ q,\ r$과 p'이 구간 $a \le x \le b$에서 실수값을 갖고 연속이며, r이 구간 내에서 양(또는 음)이면 Sturm – Liouville문제 의 고유값들은 실수이다.

- **Orthogonality (직교성):**

함수 $y_1(x),\ y_2(x),\ \cdots$은 가중함수(Weight Function) $r(x) > 0$에 관하여 주어진 구간 $a \le x \le b$에서 직교함수(Orthogonal Function)

$$\Leftrightarrow \int_a^b r(x)y_m(x)y_n(x)dx = 0$$

- y_m의 노름 $\|y_m\| = \sqrt{\int_a^b r(x)y_m{}^2(x)dx}$

5.7 Sturm-Liouville Problems. Orthogonal Functions (Sturm-Liouville 문제. 직교함수)

■ Ex. 3 **Orthogonal Functions. Orthonormal (정규직교) Functions.**

$$y_m = \sin mx, \quad m = 1, 2, \cdots$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} y_m(x) y_n(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0$$

$$\|y_m\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx = \pi$$

$$\frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}}$$

5.7 Sturm-Liouville Problems. Orthogonal Functions (Sturm-Liouville 문제. 직교함수)

- **Orthonormal Function (정규직교함수):**

직교하고 모든 함수들이 노름값 1을 가지는 함수

- **Orthogonality of Eigenfunctions:**

p, q, r과 p'이 구간 $a \le x \le b$에서 실수값을 갖고 연속이며, $r(x) > 0$이라 가정하자. $y_m(x)$와 $y_n(x)$가 서로다른 고유값 λ_m과 λ_n에 대응하는 Sturm – Liouville문제 의 고유함수라 하면 $y_m(x)$와 $y_n(x)$는 가중함수 r에 관하여 주어진 구간에서 직교한다.

→ **Legendre polynomials, Bessel functions are all orthogonal.**

5.7 Sturm-Liouville Problems. Orthogonal Functions (Sturm-Liouville 문제. 직교함수)

PROBLEM SET 5.7

HW: 15

5.8 Orthogonal Eigenfunction Expansions
(직교 고유함수 전개)

- 정규직교인 함수들 $y_0,\ y_1,\ y_2,\cdots$에 대하여
  - $(y_m, y_n) = \int_a^b r(x) y_m(x) y_n(x) dx = \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 1 & m = n \end{cases}$ Kronecker's delta
  - $\|y\| = \sqrt{(y, y)} = \sqrt{\int_a^b r(x) y^2(x) dx}$

- **Orthogonal expansion or generalized Fourier series**

직교인 함수들 $y_0,\ y_1,\ y_2,\cdots$에 대하여

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m y_m(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x) + \cdots$$

$$a_m = \frac{(f, y_m)}{\|y_m\|^2} = \frac{1}{\|y_m\|^2} \int_a^b r(x) f(x) y_m(x) dx \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

5.8 Orthogonal Eigenfunction Expansions
(직교 고유함수 전개)

$$(f, y_n) = \int_a^b r f y_n dx = \int_a^b r\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m y_m\right) y_n dx = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (y_m, y_n)$$

$$a_n (y_n, y_n) = a_n \|y_n\|^2$$

$$a_m = \frac{(f, y_m)}{\|y_m\|^2} = \frac{1}{\|y_m\|^2} \int_a^b r(x) f(x) y_m(x) dx \quad (m = 0, 1, 2, \cdots)$$

5.8 Orthogonal Eigenfunction Expansions (직교 고유함수 전개)

■ Ex. 1 **Periodic Sturm-Liouville problem**

$$y''+\lambda y=0, \quad y(\pi)=y(-\pi), \quad y'(\pi)=y'(-\pi)$$

$$y(x)=A\cos kx+B\sin kx, \quad k=\sqrt{\lambda}$$

$$k=m$$

$$f(x)=a_0+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos mx+b_m\sin mx)$$ Eigenfunction expansion

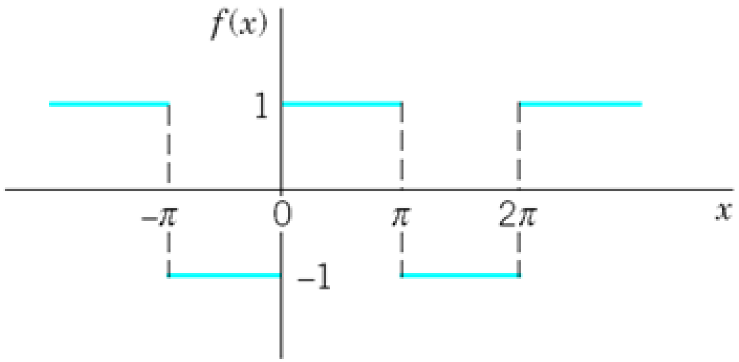
$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx, \quad a_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos mxdx, \quad b_m=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin mxdx$$

$$\leftarrow \quad a_m=\frac{(f,y_m)}{\|y_m\|^2}=\frac{1}{\|y_m\|^2}\int_a^b r(x)f(x)y_m(x)dx \quad (m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

Fourier series, Fourier coefficients (Ch. 11, 12)

5.8 Orthogonal Eigenfunction Expansions
(직교 고유함수 전개)

- **Fourier series of a periodic rectangular wave**



$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{if} \quad -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{if} \quad -\pi < x < 0 \end{cases} \quad \text{and} \quad f(x+2\pi) = f(x)$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x + \cdots \right)$$

5.8 Orthogonal Eigenfunction Expansions (직교 고유함수 전개)

- **Fourier-Legendre and Fourier-Bessel**

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m P_m(x)$$

$$a_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_m(x) dx$$

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_n(k_{n,m} x)$$

$$a_m = \frac{2}{R^2 J_{n+1}^2(\alpha_{n,m})} \int_0^R x f(x) J_n(k_{n,m} x) dx$$

5.8 Orthogonal Eigenfunction Expansions (직교 고유함수 전개)

- **Completeness (완비성)**

"충분히 많은" 함수들로 구성된 정규직교집합만을 이용하여 다양한 종류의 함수를 일반화된 푸리에 급수에 의해 나타낼 수 있는데, 이런 정규집합을 "complete(완비)" 하다고 한다.

y_0, y_1, $\cdots$을 구간 $a \le x \le b$에서 함수들의 집합 S에서 완비한 정규직교집합이라 하자.
만약 함수 f가 S에 속하는 모든 y_m에 직교한다면 그 함수은 노름값 0을 가져야만한다.
특히 f가 연속이라면, f는 0이어야만 한다.

5.8 Orthogonal Eigenfunction Expansions
(직교 고유함수 전개)

PROBLEM SET 5.8

HW: 5