Engineering Mathematics I

Prof. Dr. Yong-Su Na

(32-206, ysna@snu.ac.kr, Tel. 880-7204)

Text book: Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics,
9th Edition, Wiley (2006)

Ch. 7 Linear Algebra: Matrices, Vectors, Determinants. Linear Systems

7.1 Matrices, Vectors: Addition and Scalar Multiplication

7.2 Matrix Multiplication

7.3 Linear Systems of Equations. Gauss Elimination

7.4 Linear Independence. Rank of a Matrix. Vector Space

7.5 Solutions of Linear Systems: Existence, Uniqueness

7.6 For Reference: Second- and Third-Order Determinants

7.7 Determinants. Cramer's Rule

7.8 Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan Elimination

7.9 Vector Spaces, Inner Product Spaces. Linear Transformations.

Ch. 7 Linear Algebra: Matrices, Vectors, Determinants. Linear Systems

- 선형연립방정식은 전기회로, 기계 구조물, 경계모델, 최적화 문제, 미분방정식의 수치해 등을 다룰 때 나타남.
- 선형연립방정식의 문제를 해결하는데, 행렬과 벡터 이용
- 내용: 행렬 및 벡터 간의 연산에 대한 정의,
  선형연립방정식에 관한 것(Gauss 소거법, 행렬의 계수의 역할),
  역행렬, 행렬식의 정의와 응용

7.1 Matrices, Vectors: Addition and Scalar Multiplication (행렬, 벡터: 합과 스칼라곱)

- **Matrix (행렬):** 수(혹은 함수)를 직사각형 모양으로 괄호 안에 배열한 것
  - **Entry (원소) or Element (요소):** 행렬에 배열되는 수 (혹은 함수)
  - **Row (행):** 수평선
  - **Column (열):** 수직선
- **Vector (벡터):** 한 개의 행이나 열로 구성된 행렬
  - **Row Vector (행벡터):** 하나의 행으로 구성
  - **Column Vector (열벡터):** 하나의 열로 구성

7.1 Matrices, Vectors: Addition and Scalar Multiplication (행렬, 벡터: 합과 스칼라곱)

General Concepts and Notations

$$\mathbf{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} : m \times n \text{ 행렬}$$

- 행렬은 굵은 대문자로 나타낸다
- 첫 번째 아래 첨자 j 는 Row (행)
- 두 번째 아래 첨자 k 는 Column (열)
- a_{jk} : j 행, k 열의 Element (원소)

Square Matrix (정방행렬)

- $m = n$ 이라면 **A**는 정사각형 모양이다.
- 정방행렬에서 원소 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 을 포함하는 대각선을 행렬 **A**의 Principal Diagonal (주대각선) 이라고 한다.

7.1 Matrices, Vectors: Addition and Scalar Multiplication (행렬, 벡터: 합과 스칼라곱)

- **Vectors (벡터):** 하나의 행(열)으로 이루어진 $1 \times n$ $(m \times 1)$ 행렬

■ Ex. *n* 차원 Row Vector (행벡터): $\mathbf{a} = [a_1, \quad a_2, \quad \cdots \quad a_n]$

m 차원 Column Vector (열벡터): $$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

7.1 Matrices, Vectors: Addition and Scalar Multiplication (행렬, 벡터: 합과 스칼라곱)

- **Equality of Matrices (행렬의 상등):**

  행렬의 크기가 같으며 대응되는 원소들이 모두 같은 경우

- **Matrix Addition (행렬의 가법):**

  같은 크기의 행렬에 대해서만 정의되고, 그 합은 대응하는 원소를 각각 더함으로 얻어진다.

- **Scalar Multiplication (스칼라곱):**

  행렬의 각 원소에 상수를 곱하여 얻어진다.

- **행렬의 가법과 스칼라곱에 대한 연산법칙**

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A} \qquad c(\mathbf{A}+\mathbf{B})=c\mathbf{A}+c\mathbf{B}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) \qquad (c+k)\mathbf{A}=c\mathbf{A}+k\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A} \qquad c(k\mathbf{A})=(ck)\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{0} \qquad 1\mathbf{A}=\mathbf{A}$$

7.1 Matrices, Vectors: Addition and Scalar Multiplication (행렬, 벡터: 합과 스칼라곱)

PROBLEM SET 7.1

HW: 16 (d)

7.2 Matrix Multiplication (행렬의 곱)

- **Matrix Multiplication (행렬과 행렬의 곱):**

$m \times n$ 행렬 $\mathbf{A} = \left[a_{jk}\right]$ 의 행수 n 과 $r \times p$ 행렬 $\mathbf{B} = \left[b_{jk}\right]$ 의 열수 r 이 서로 같아야

정의되며 $c_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{jl} b_{lk} = a_{j1} b_{1k} + a_{j2} b_{2k} + \cdots + a_{jn} b_{nk}$ 를 원소로 하는 $m \times p$ 행렬로 정의됨.

❖ **AB**는 정의되지만 **BA**는 정의되지 않을 수 있다.

- **행렬의 곱은 Not Commutative (비가환적):** $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$
- **행렬의 곱에 대한 연산법칙**

$$(k\mathbf{A})\mathbf{B} = k(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}(k\mathbf{B})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C} \qquad (\text{결합법칙}(\text{Associative Low}))$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC} \; (\text{분배법칙}(\text{Distrivutive Low}))$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{CA} + \mathbf{CB} \; (\text{분배법칙}(\text{Distrivutive Low}))$$

7.2 Matrix Multiplication (행렬의 곱)

- **Transposition of Matrices (행렬과 벡터의 전치):**

열과 행이 서로 바뀌어 얻어진 행렬.

$$\mathbf{A} = [a_{jk}] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^T = [a_{kj}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

❖ 정방행렬에 대한 전치는 주대각선에 관하여 대칭으로 위치된 원소들을 서로 바꾼 것임.

- **전치 연산에 대한 법칙**

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$$

$$(c\mathbf{A})^T = c\mathbf{A}^T$$

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$$

7.2 Matrix Multiplication (행렬의 곱)

- **Special Matrices (특수한 행렬)**
- **Symmetric Matrix (대칭행렬):** 전치가 본래의 행렬과 같은 정방행렬 $\left(\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\right)$
- **Skew-symmetric Matrix (반대칭행렬):**
  전치가 본래의 행렬의 음이 되는 정방행렬 $\left(\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}\right)$
- **Triangular Matrix (삼각행렬)**
  - **Upper Triangular Matrix (위삼각행렬):**
    주대각선을 포함하여 그 위쪽으로만 0이 아닌 원소를 갖는 정방행렬
  - **Lower Triangular Matrix (아래삼각행렬):**
    주대각선을 포함하여 그 아래쪽으로만 0이 아닌 원소를 갖는 정방행렬
- **Diagonal Matrix (대각행렬):**
  주대각선 상에서만 0이 아닌 원소를 가질 수 있는 정방행렬
  - **Scalar Matrix (스칼라 행렬):** 주대각선 원소들이 모두 같은 대각행렬
  - **Unit or Identity Matrix (단위행렬):** 주대각선 원소들이 모두 1은 대각행렬

7.2 Matrix Multiplication (행렬의 곱)

■ **Ex. 13** Suppose that the 2004 state of land use in a city of 60 mi2 of built-up area is

C: commercially used 25%, I: Industrially used 20%, R: Residentially used 55%

Find the states in 2009, 2014, and 2019, assuming that the transition probabilities for 5-year intervals are given by the matrix A and remain practically the same over the time considered.

$$\begin{array}{c} \text{From} \quad \text{C} \qquad \text{I} \qquad \text{R} \\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.9 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{To C} \\ \text{To I} \\ \text{To R} \end{array} \end{array}$$

2009: [19.5 34.0 46.5]

2014: [17.05 43.80 39.15]

2019: [16.315 50.660 33.025]

7.2 Matrix Multiplication (행렬의 곱)

PROBLEM SET 7.2

HW: 24, 28 (a), (b)

7.3 Linear Systems of Equations. Gauss Elimination (선형연립방정식, 가우스 소거법)

- **Linear System (선형연립방정식):**

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- **Homogeneous Simultaneous System (제차연립방정식):**

  b_j 가 모두 0인 경우

- **Nonhomogeneous Simultaneous System (비제차연립방정식):**

  b_j 중 적어도 하나는 0이 아닌 경우

7.3 Linear Systems of Equations. Gauss Elimination (선형연립방정식, 가우스 소거법)

- 선형연립방정식의 행렬표현: $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

- **Coefficient Matrix (계수행렬): A**
- **Solution Vector (해벡터):** ***x***
- **Augmented matrix (첨가행렬):** 계수행렬 ***A*** 에 열벡터 ***b*** 를 첨가한 행렬

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array}\right]$$

7.3 Linear Systems of Equations. Gauss Elimination (선형연립방정식, 가우스 소거법)

- **Gauss Elimination and Back Substitution (가우스 소거법과 후치환)**

Linear system　　　Augmented matrix

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &= 2 \\ -4x_1 + 3x_2 &= -30 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -4 & 3 & -30 \end{bmatrix}$$

Step 1　x_1 을 소거: 첫 번째 식에 두 배 한 후, 이를 두 번째 식에 더한다.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &= 2 \\ 13x_2 &= -26 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 13 & -26 \end{bmatrix}$$

Step 2　후치환(Back Substitution)을 통해 x_2, x_1 순으로 해를 구한다.

마지막 방정식에서 $x_2 = -26/13 = -2$ 를 구한 후, 그 결과를 역순으로 첫째 방정식에

대입하여 x_1 에 대하여 정리하면, $x_1 = \frac{1}{2}(2 - 5x_2) = \frac{1}{2}(2 - 5(-2)) = 6$ 을 얻는다.

7.3 Linear Systems of Equations. Gauss Elimination (선형연립방정식, 가우스 소거법)

- **Elementary Row Operations. Row-Equivalent Systems (기본행연산. 행 동치 연립방정식)**

<방정식에 대한 기본연산>	⟷	**<행렬에 대한 기본행연산>**
• 두 방정식을 교환하는 것		• 두 행을 교환하는 것
• 한 방정식의 상수배를 다른 방정식에 더하는 것		• 한 행의 상수배를 다른 행에 더하는 것
• 한 방정식에 0이 아닌 상수를 곱하는 것		• 한 행에 0이 아닌 상수를 곱하는 것

❖ 기본 행연산을 이용하여 미지수를 하나씩 소거하여 대각선 아래의 계수를 0으로 만든다

- **Row-Equivalent (행 동치):**

선형시스템 S_1 이 선형시스템 S_2 에 유한번의 기본행연산을 가하여 얻어질 수 있다면 S_1 을 S_2 의 **행 동치**라 한다.

- **Row-Equivalent Systems (행 동치 연립방정식):**

행 동치 연립방정식들은 같은 해집합을 갖는다.

7.3 Linear Systems of Equations. Gauss Elimination (선형연립방정식, 가우스 소거법)

- **Gauss Elimination (가우스 소거법): 연립방정식의 세가지 경우**
  - 무한히 많은 해가 존재하는 경우(미지수의 수가 방정식의 수보다 많은 경우)
  - 유일한 해가 존재하는 경우
  - 해가 존재하지 않는 경우(연립방정식의 해가 존재하지 않는 경우)

7.3 Linear Systems of Equations. Gauss Elimination (선형연립방정식, 가우스 소거법)

■ **Ex. 3** Solve the following linear systems of three equations in four unknowns whose augmented matrix is

$$\begin{bmatrix} 3.0 & 2.0 & 2.0 & -5.0 & \vdots & 8.0 \\ 0.6 & 1.5 & 1.5 & -5.4 & \vdots & 2.7 \\ 1.2 & -0.3 & -0.3 & 2.4 & \vdots & 2.1 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} 3.0x_1 + 2.0x_2 + 2.0x_3 - 5.0x_4 &= 8.0 \\ 0.6x_1 + 1.5x_2 + 1.5x_3 - 5.4x_4 &= 2.7 \\ 1.2x_1 - 0.3x_2 - 0.3x_3 + 2.4x_4 &= 2.1 \end{aligned}$$

Step 1 x_1 을 소거

첫째 방정식에 $-0.6/3.0 = -0.2$ 배 하여 두 번째 방정식에 더하라.

첫째 방정식에 $-1.2/3.0 = -0.4$ 배 하여 세 번째 방정식에 더하라.

$$\begin{bmatrix} 3.0 & 2.0 & 2.0 & -5.0 & \vdots & 8.0 \\ 0 & 1.1 & 1.1 & -4.4 & \vdots & 1.1 \\ 0 & -1.1 & -1.1 & 4.4 & \vdots & -1.1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ 2\text{행} + (-0.2) \times 1\text{행} \\ 3\text{행} + (-0.4) \times 1\text{행} \end{array} \qquad \begin{aligned} 3.0x_1 + 2.0x_2 + 2.0x_3 - 5.0x_4 &= 8.0 \\ 1.1x_2 + 1.1x_3 - 4.4x_4 &= 1.1 \\ -1.1x_2 - 1.1x_3 + 4.4x_4 &= -1.1 \end{aligned}$$

7.3 Linear Systems of Equations. Gauss Elimination (선형연립방정식, 가우스 소거법)

Step 2 x_2 를 소거: 두 번째 방정식에 $1.1/1.1=1$ 배 하여 세 번째 방정식에 더하라

$$\begin{bmatrix} 3.0 & 2.0 & 2.0 & -5.0 & \vdots & 8.0 \\ 0 & 1.1 & 1.1 & -4.4 & \vdots & 1.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 3\text{행}+2\text{행} \end{matrix} \qquad \begin{aligned} 3.0x_1+2.0x_2+2.0x_3-5.0x_4&=8.0 \\ 1.1x_2+1.1x_3-4.4x_4&=1.1 \\ 0&=0 \end{aligned}$$

Step 3 후치환 $x_2=1-x_3+4x_4, \quad x_1=2-x_4$

x_3와 x_4 는 임의로 결정할 수 있는 수이므로, 무한히 많은 해가 얻어진다.

7.3 Linear Systems of Equations. Gauss Elimination (선형연립방정식, 가우스 소거법)

■ **Ex. 4 Gauss Elimination if no Solution Exists**

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 6 & 2 & 4 & \vdots & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Step 1 x_1 을 소거

첫째 방정식에 $-2/3$ 배 하여 두 번째 방정식에 더하라.

첫째 방정식에 $-6/3 = -2$ 배 하여 두 번째 방정식에 더하라.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \vdots & -2 \\ 0 & -2 & 2 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ 2\text{행} + \left(-\frac{2}{3}\right) \times 1\text{행} \\ 3\text{행} + (-2) \times 1\text{행} \end{matrix} \qquad \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ -\frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 &= -2 \\ -2x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

7.3 Linear Systems of Equations. Gauss Elimination (선형연립방정식, 가우스 소거법)

Step 2 x_2 를 소거: 세 번째 식에서 x_2 를 소거

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 12 \end{bmatrix} \text{3행} + (-6) \times \text{2행}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ -\frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 &= -2 \\ 0 &= 12 \end{aligned}$$

모순이 되어 연립방정식은 해를 갖지 않는다.

7.3 Linear Systems of Equations. Gauss Elimination (선형연립방정식, 가우스 소거법)

PROBLEM SET 7.3

HW: 21

7.4 Linear Independence. Rank of a Matrix. Vector Space (일차독립. 행렬의 계수. 벡터공간)

- **벡터의 일차 독립과 종속성**

$$c_1\mathbf{a}_{(1)} + c_2\mathbf{a}_{(2)} + \cdots + c_m\mathbf{a}_{(m)} = \mathbf{0} \quad (c: \text{스칼라},\ \mathbf{a}: \text{벡터})$$

- **Linearly Independent (일차 독립):** 모든 $c_j = 0$ 일 때만 위 식이 만족
- **Linearly Dependent (일차 종속):** 어떤 $c_j \neq 0$ 이어도 위 식이 만족

7.4 Linear Independence. Rank of a Matrix. Vector Space (일차독립. 행렬의 계수. 벡터공간)

- **행렬의** Rank (**계수**): 행렬에서 1차독립인 행벡터의 최대 수이며 rank **A**라 표시

- **행 동치인 행렬**

  행 동치인 행렬들은 같은 계수를 갖는다.

- **일차종속성**과 **일차독립성**

  각각 n 개의 성분을 갖는 p 개의 벡터들은 이 벡터들을 행벡터로 취하여 구성된 행렬의 계수가 p 이면 일차독립이고, 그 계수가 p 보다 작으면 일차종속이다.

- **열벡터에 의한 계수**

  행렬의 계수는 행렬의 일차독립인 열벡터의 최대수와 같다.

  → 행렬과 행렬의 전치는 같은 계수를 갖는다.

- **벡터의 일차종속**

  $n\,(<p)$ 개의 성분을 갖는 p 개의 벡터들은 항상 일차종속이다.

7.4 Linear Independence. Rank of a Matrix. Vector Space (일차독립. 행렬의 계수. 벡터공간)

■ **Ex. 3** Determination of Rank

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 54 \\ 21 & -21 & 0 & -15 \end{bmatrix}$$

7.4 Linear Independence. Rank of a Matrix. Vector Space (일차독립. 행렬의 계수. 벡터공간)

- **Vector Space (벡터공간):**

공집합이 아닌 벡터의 집합에 속해 있는 임의의 두 원소에 대하여, 이들의 일차결합이 다시 집합의 원소가 되며, 다음 법칙을 만족하는 벡터들의 집합

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A} \qquad c(\mathbf{A}+\mathbf{B})=c\mathbf{A}+c\mathbf{B}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) \qquad (c+k)\mathbf{A}=c\mathbf{A}+k\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A} \qquad c(k\mathbf{A})=(ck)\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{0} \qquad 1\mathbf{A}=\mathbf{A}$$

- **Dimension (차원):** 벡터공간내의 일차독립인 벡터들의 최대수이며 dim V로 표기

7.4 Linear Independence. Rank of a Matrix. Vector Space (일차독립. 행렬의 계수. 벡터공간)

- **Basis (기저):**

  벡터공간내의 최대로 가능한 수의 일차독립인 벡터로 구성되는 부분집합이며, 기저가 되는 벡터의 수는 차원과 같다.

- **Span (생성공간) = Vector Space:**

  성분의 수가 같은 벡터들에 관한 일차결합으로 표현되는 모든 벡터들의 집합

- **Subspace (부분공간):**

  벡터공간에서 정의된 벡터합과 스칼라곱에 관하여 닫혀있는 부분집합

7.4 Linear Independence. Rank of a Matrix. Vector Space (일차독립. 행렬의 계수. 벡터공간)

- **$\mathbf{R}^n$ 벡터공간**

  n 개의 성분을 갖는 모든 벡터들로 이루어진 벡터공간 $\mathbf{R}^n$ 의 차원은 n 이다.

- **Row Space (행공간):** 행벡터들의 생성공간

- **Column Space (열공간):** 열벡터들의 생성공간

- **행공간과 열공간**

  행렬의 행공간과 열공간은 차원이 같고, 행렬의 계수와도 동일하다.

- **Null Space (영공간):** $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 의 해집합

- **Nullity (퇴화차수):** 영공간의 차원

$$\text{A의 계수} + \text{A의 퇴화차수} = \text{A의 행 개수}$$

7.4 Linear Independence. Rank of a Matrix. Vector Space (일차독립. 행렬의 계수. 벡터공간)

PROBLEM SET 7.4

HW: 11, 36

7.5 Solutions of Linear Systems: Existence, Uniqueness (선형연립방정식의 해: 존재성, 유일성)

- **선형연립방정식에 대한 기본정리**
- **Existence (존재성):**

선형연립방정식이 Consistent, 다시 말해서 모순이 없기 위한, 해를 갖기 위한, 필요충분조건은 계수행렬과 첨가행렬이 같은 계수를 갖는 것이다.

- **Uniqueness (유일성):**

선형연립방정식이 유일한 해를 갖기 위한 필요충분조건은 계수행렬과 첨가행렬이 같은 계수를 갖는 것이다.

- **Infinitely Many Solutions (무수히 많은 해):**

계수행렬의 계수가 미지수의 개수보다 작으면 무수히 많은 해가 존재

- **Gauss Elimination (Gauss 소거법):**

해가 존재하면 Gauss 소거법에 의해 모두 구해질 수 있다.

7.5 Solutions of Linear Systems: Existence, Uniqueness (선형연립방정식의 해: 존재성, 유일성)

- **제차연립방정식**
  - 제차연립방정식은 항상 Trivial Solution(자명한 해)을 갖는다.

    계수행렬의 계수 $=r$, 미지수의 갯수 $=n$라 하자.
  - 자명하지 않은 해가 존재할 필요충분조건: $r<n$
  - $r<n$ 이면 해공간은 $n-r$ 차원 벡터공간이다.
  - 제차연립방정식의 두 해벡터의 일차결합도 제차연립방정식의 해이다.

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

- **미지수보다 방정식의 수가 적은 제차 선형연립방정식**

방정식의 수가 미지수의 수보다 적은 제차연립방정식은 항상 자명하지 않은 해 (Nontrivial Solution)를 갖는다.

- 비제차연립방정식

만약 비제차 연립방정식이 해를 갖는다면 모든 해는 $\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+\mathbf{x}_h$ 와 같은 형태가 된다. $\mathbf{x}_0$ 은 고정된 임의의 해이고 $\mathbf{x}_h$ 는 대응하는 제차연립방정식의 모든 해를 대표한다.

7.6 For Reference: Second- and Third-Order Determinants (참고사항: 2차 및 3차 행렬식)

- **Determinant of Second Order (2차 행렬식)**

$$D = \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- 선형연립방정식

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \xrightarrow[D \neq 0]{\text{Cramer의 법칙}} \quad x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{D} = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{D}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{D}$$

■ **Ex. 1** Cramer's Rule for Two Equations

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &= 12 \\ 2x_1 + 5x_2 &= -8 \end{aligned} \qquad x_1 = 6, \quad x_2 = -4$$

7.6 For Reference: Second- and Third-Order Determinants (참고사항: 2차 및 3차 행렬식)

- **Determinant of Third Order (3차 행렬식)**

$$D = \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{13}a_{32} + a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}$$

7.6 For Reference: Second- and Third-Order Determinants (참고사항: 2차 및 3차 행렬식)

- 선형연립방정식

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \xrightarrow[D \neq 0]{\text{Cramer의 법칙}} x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ x_3 = \frac{D_3}{D}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

7.7 Determinants. Cramer's Rule (행렬식. 크래머의 법칙)

- **Determinant of Order *n* (*n* 차 행렬식)**

$$D = \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$n = 1$ 이면 $D = a_{11}$

$n \geq 2$ 이면 $D = a_{j1}C_{j1} + a_{j2}C_{j2} + \cdots + a_{jn}C_{jn} \quad (j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

또는 $D = a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \cdots + a_{nk}C_{nk} \quad (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$,

$C_{jk} = (-1)^{j+k} M_{jk}$, M_{jk}는 $n-1$차의 행렬식

- **Minor (소행렬식):** M_{jk}
- **Cofactor (여인수):** C_{jk}

7.7 Determinants. Cramer's Rule (행렬식. 크래머의 법칙)

- **Ex. 2, 3**

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix},\quad D=\begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

-12, -60

7.7 Determinants. Cramer's Rule (행렬식. 크래머의 법칙)

- **Behavior of an n th-Order Determinant under Elementary Row Operations**
  - 두 행을 바꾸는 것은 행렬식의 값에 -1을 곱하는 것이다.
  - 한 행의 상수배를 다른 행에 더하는 것은 행렬식의 값에 변화를 주지 않는다.
  - 한 행에 상수를 곱하는 것은 행렬식의 값에 상수를 곱하는 것이다.
- **Further Properties of n th-Order Determinants**
  - 두 열을 바꾸는 것은 행렬식의 값에 -1을 곱하는 것이다.
  - 한 열의 상수배를 다른 열에 더하는 것은 행렬식의 값에 변화를 주지 않는다.
  - 한 열에 상수를 곱하는 것은 행렬식의 값에 상수를 곱하는 것이다.
  - Transposition은 행렬식의 값에 변화를 주지 않는다.
  - 0행 또는 0열은 행렬식의 값을 0으로 만든다.
  - 같은 비율의 행 또는 열은 행렬식의 값을 0으로 만든다.

7.7 Determinants. Cramer's Rule (행렬식. 크래머의 법칙)

Rank in Terms of Determinants

$m \times n$ 행렬 $\mathbf{A} = [a_{jk}]$가 계수 $r(\geq 1)$을 갖기 위한 필요충분조건은 **A**의 $r \times r$ 부분행렬의 행렬식은 0이 되지 않는 반면, **A**의 $(r+1)\times(r+1)$ 또는 그 이상의 행을 갖는 모든 정방 부분행렬의 행렬식은 0이 되는 것이다. 특히, **A**가 정방행렬 $n \times n$ 일 때, 계수가 n 일 필요충분조건은 $\det(\mathbf{A}) \neq 0$이다.

Cramer의 정리(행렬식에 의한 선형연립방정식의 해)

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
\quad \xrightarrow[D \neq 0]{\text{Cramer의 법칙}} \quad
x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n = \frac{D_n}{D}$$

D_k는 D의 k번째 열을 $b_1, \cdots, b_n$인 원소로 갖는 열로 대치하여 얻은 행렬식

7.7 Determinants. Cramer's Rule (행렬식. 크래머의 법칙)

PROBLEM SET 7.7

HW: 17

7.8 Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan Elimination (역행렬. Gauss-Jordan 소거법)

- **Inverse Matrix (역행렬)**

$$\mathbf{A}^{-1} : \mathbf{A} = \left[a_{jk}\right] \text{의 역행렬} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

- **Nonsingular Matrix (정칙행렬)**: 역행렬을 갖는 경우
- **Singular Matrix (특이행렬)**: 역행렬을 갖지 않는 경우
- 역행렬을 가지면 그 역행렬은 유일하다.

- **Existence of the Inverse (역행렬의 존재성)**

$$\mathbf{A}\text{가 } n \times n \text{행렬일 때, 역행렬 } \mathbf{A}^{-1}\text{이 존재} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rank}(\mathbf{A}) = n \quad \Leftrightarrow \quad \det(\mathbf{A}) \neq 0$$

$$\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = n \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}\text{는 정칙행렬}$$

$$\operatorname{rank}(\mathbf{A}) < n \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}\text{는 특이행렬}$$

7.8 Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan Elimination (역행렬. Gauss-Jordan 소거법)

- **Gauss-Jordan 소거법에 의한 역행렬의 결정**

$n \times n$ 행렬 $\mathbf{A}$의 역행렬 $\mathbf{A}^{-1}$을 결정하기 위한 방법

$$\tilde{\mathbf{A}} = [\mathbf{A} \ \vdots \ \mathbf{I}] \xrightarrow{\text{Gauss 소거법}} [\mathbf{I} \ \vdots \ \mathbf{K}] \quad \Rightarrow \quad \therefore \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{K}$$

7.8 Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan Elimination (역행렬. Gauss-Jordan 소거법)

- **Ex. 1**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

7.8 Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan Elimination (역행렬. Gauss-Jordan 소거법)

- **Ex. 1**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{A} \;\vdots\; \mathbf{I}] = \left[\begin{array}{ccccccc} -1 & 1 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{cl} \left[\begin{array}{ccccccc} -1 & 1 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \vdots & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & \vdots & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \text{2행}+3\times\text{1행} \\ \text{3행}-\text{1행} \end{array} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{cl} \left[\begin{array}{ccccccc} -1 & 1 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \vdots & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & \vdots & -4 & -1 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \\ \text{3행}-\text{2행} \end{array} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cl} \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & -1 & -2 & \vdots & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3.5 & \vdots & 1.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right] & \begin{array}{l} -\text{1행} \\ 0.5\times\text{2행} \\ -0.2\times\text{3행} \end{array} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{cl} \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & -1 & 0 & \vdots & 0.6 & 0.4 & -0.4 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \text{1행}+2\times\text{3행} \\ \text{2행}-3.5\times\text{3행} \\ \\ \end{array} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cl} \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & \vdots & -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \text{1행}+\text{2행} \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

7.8 Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan Elimination (역행렬. Gauss-Jordan 소거법)

- **Useful Formulas for Inverses**

$n \times n$ 행렬 $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ 의 역행렬은 $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathbf{A}} [\mathbf{C}_{jk}]^T = \dfrac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{21} & \cdots & \mathbf{C}_{n1} \\ \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{22} & \cdots & \mathbf{C}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{1n} & \mathbf{C}_{2n} & \cdots & \mathbf{C}_{nn} \end{bmatrix}$

$\mathbf{C}_{jk}$ 는 $\det \mathbf{A}$에서 a_{jk}의 여인수

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 의 역행렬은 $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$

7.8 Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan Elimination (역행렬. Gauss-Jordan 소거법)

- **Ex. 3**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

7.8 Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan Elimination (역행렬. Gauss-Jordan 소거법)

- **Ex. 3**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = -1(-7) - 1\cdot 13 + 2\cdot 8 = 10, \quad \mathbf{C}_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -7, \quad \mathbf{C}_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad \mathbf{C}_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$\mathbf{C}_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -13, \quad \mathbf{C}_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad \mathbf{C}_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7,$$

$$\mathbf{C}_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8, \quad \mathbf{C}_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2, \quad \mathbf{C}_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{bmatrix}$$

7.8 Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan Elimination (역행렬. Gauss-Jordan 소거법)

- **대각행렬의 역행렬**

대각행렬 $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ 의 역행렬이 존재 $\Leftrightarrow$ $a_{jj} \neq 0 \ (j = 1, \ 2, \ \cdots, \ n)$

$\mathbf{A}^{-1}$은 $1/a_{11}, \ \cdots, \ 1/a_{nn}$ 이 대각원소인 행렬

Ex. 4

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **두 행렬의 곱 :** $(\mathbf{AC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

$$(\mathbf{AC}\cdots\mathbf{PQ})^{-1} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P}^{-1}\cdots\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

- **역행렬의 역행렬 :** $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$

7.8 Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan Elimination (역행렬. Gauss-Jordan 소거법)

- **행렬의 곱에 대한 특이 성질. Cancellation Laws (약분법)**
  - 행렬의 곱은 교환법칙이 성립하지 않는다. $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ (일반적으로 성립하지 않는다.)
  - $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ 일 때 $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ 또는 $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ 이 아닐 수도 있다.
  - 예) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
  - $\mathbf{AC} = \mathbf{AD}$ 일 때 $\mathbf{C} \neq \mathbf{D}$ 일 수도 있다 (심지어 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ 일 때에도).
- **Cancellation Laws (약분법칙)**

  $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$를 $n \times n$ 행렬이라 하자.
  - $\operatorname{rank} \mathbf{A} = n$ 이고 $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ 이면, $\mathbf{B} = \mathbf{C}$ 이다.
  - $\operatorname{rank} \mathbf{A} = n$ 이면 $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ 은 $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ 을 의미한다.

    $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$이면서 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$이고 $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$이면 $\operatorname{rank} \mathbf{A} < n$이고 $\operatorname{rank} \mathbf{B} < n$
  - $\mathbf{A}$ 가 특이행렬이면 $\mathbf{AB}$ 와 $\mathbf{BA}$ 도 또한 특이행렬이다.
- **행렬곱의 행렬식 :** $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$

7.8 Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan Elimination (역행렬. Gauss-Jordan 소거법)

PROBLEM SET 7.8

HW: 15

7.9 Vector Spaces, Inner Product Spaces, Linear Transformations (벡터공간, 내적공간, 일차변환)

- **Real Vector Space (실벡터공간)**

- **Vector Addition (벡터의 덧셈):** $\mathbf{a}+\mathbf{b}$

  Commutativity (가환성) $\quad \mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$

  Associativity (결합성) $\quad (\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$

  Zero Vector (영벡터) $\quad \mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$

  $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$

- **Scalar Multiplication (스칼라곱):** $k\mathbf{a}$

  Distributivity (분배성) $\quad c(\mathbf{a}+\mathbf{b})=c\mathbf{a}+c\mathbf{b}$

  Distributivity (분배성) $\quad (c+k)\mathbf{a}=c\mathbf{a}+k\mathbf{a}$

  Associativity (결합성) $\quad c(k\mathbf{a})=(ck)\mathbf{a}$

  $1\mathbf{a}=\mathbf{a}$

- **Ex. 1 Basis of the real 2 X 2 matrices**

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

7.9 Vector Spaces, Inner Product Spaces, Linear Transformations (벡터공간, 내적공간, 일차변환)

- **Real Inner Product Space (실내적공간)**

  Inner or dot Product (내적): $\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

  1. Linearity $\quad (q_1\mathbf{a} + q_2\mathbf{b}, \mathbf{c}) = q_1(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + q_2(\mathbf{b}, \mathbf{c})$
  2. Symmetry $\quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$
  3. Positive-definiteness $\quad (\mathbf{a}, \mathbf{a}) \geq 0,$
     (양의정치성) $\quad (\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$ 일 필요충분조건은 $\mathbf{a} = 0$

- **Hilbert space**: an inner product space which, as a metric space, is complete

- Orthogonal: 내적이 영인 두 벡터
- 벡터의 길이 또는 노름(Norm) : $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}$
- Unit Vector : 길이가 1인 벡터

- **Basic Inequality (기본부등식)**
  - Cauchy-Schwarz 부등식 : $|(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \leq \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|$
  - 삼각부등식 : $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$
  - 평행사변형 등식 : $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = 2\left(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2\right)$

- **Euclidean space:**

1. 두 점을 잇는 직선은 유일하다.
2. 두 점을 잇는 선분은 무한대로 늘릴 수 있다.(직선으로 만들 수 있다.)
3. 임의의 한 점과 임의의 길이를 반지름으로 하는 원을 그릴 수 있다.
4. 직각은 모두 합동이다.
5. 직선l과 그 직선밖의 한 점 P가 있을 때, P를 지나면서 직선l에 평행한 직선은 유일하다.

7.9 Vector Spaces, Inner Product Spaces, Linear Transformations (벡터공간, 내적공간, 일차변환)

- **Linear Transformations (일차변환)**

- X에서 Y로의 Mapping (사상) 또는 Transformation (변환) 또는 Operator (연산자) :
  공간 X 의 벡터 $\mathbf{x}$에 대하여 공간 Y 의 유일한 벡터 $\mathbf{y}$를 대응

- F를 Linear Mapping (선형사상) 또는 Linear Transformation (일차변환) :
  X 의 임의의 벡터 $\mathbf{v}, \mathbf{x}$ 와 임의의 스칼라 c에 대하여

  $* \ F(\mathbf{v}+\mathbf{x}) = F(\mathbf{v}) + F(\mathbf{x})$

  $* \ F(c\mathbf{x}) = cF(\mathbf{x})$ 를 만족

- $\mathbf{R}^n$ 공간에서 $\mathbf{R}^m$ 공간으로의 일차변환.

- $\mathbf{R}^n$ 에서 $\mathbf{R}^m$ 으로의 일차변환은 선형이다. $(\mathrm{y} = \mathrm{Ax})$

- $\mathbf{R}^n$ 에서 $\mathbf{R}^m$ 으로의 일차변환 F는 $m \times n$ 행렬 $\mathbf{A}$에 의해 주어진다.

7.9 Vector Spaces, Inner Product Spaces, Linear Transformations (벡터공간, 내적공간, 일차변환)

- Ex. 3

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a reflection in the line $x_2 = x_1$, a reflection in the x_1–axis, a reflection in the origin, and a stretch (when $a > 1$, or contraction when $0 < a < 1$) in the x_1–direction, respectively.

- Ex. 4 Find A representing the linear transformation that maps (x_1, x_2) onto $(2x_1\text{-}5x_2, 3x_1+4x_2)$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

7.9 Vector Spaces, Inner Product Spaces, Linear Transformations (벡터공간, 내적공간, 일차변환)

PROBLEM SET 7.9

HW: 13, 28