(Lecture 1) Review of Classical Mechanics

고전역학, 열역학, 통계역학, 전자기학, 광학과 파동, 현대물리(상대론,양자론)

1. Newtonian Mechanics

Newton 의 법칙 $\quad \boldsymbol{F} = \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{p} \quad , \quad \boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = m\dfrac{d}{dt}\boldsymbol{r}$

↑ 힘(vector), 물체에 作用하는 힘

(cf. scalar 운동량 mv 의 개념 : R. Descartes)

(Implications)

i) $\boldsymbol{F} = 0$ 인 경우 $\quad \dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F} = 0 \qquad \therefore\ \boldsymbol{p} = const$: Newton 제 1 法則

Linear momentum conservation (최초 C. Huygens)

또는 어느 특정 方向(**s**) (i.e. $\boldsymbol{F}$의 수직방향)에 대해 $\boldsymbol{F}$의 성분이 0 일때

$F_s = \boldsymbol{F} \bullet \boldsymbol{s} = \dot{\boldsymbol{p}} \bullet \boldsymbol{s} = 0 \quad \rightarrow$ **s** 가 일정 방향이면 $\boldsymbol{p} \bullet \boldsymbol{s} = p_s = const$

cf. Tangential motion when the central force (acceleration) is suddenly is diminished.

ii) Torque (또는 Moment of force) $\quad \boldsymbol{N} \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$

↑ 힘의 作用點의 위치 vector

Angular momentum (角運動量) $\boldsymbol{L} \equiv \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$

$$\dot{\boldsymbol{L}} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) = \dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{N}$$

따라서 $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{0}$ 인 경우 $\quad \dot{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{N} = \boldsymbol{0} \qquad \therefore\ \boldsymbol{L} = const$

마찬가지로 어느 특정한 일정 방향 **s**에 대해 N_s (= **N** · **s**) 성분이 0 일 때

$\boldsymbol{L}$ 의 **s** 방향 성분 $L_s = \boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{s} = \text{const}$

→ **Angular Momentum Conservation**

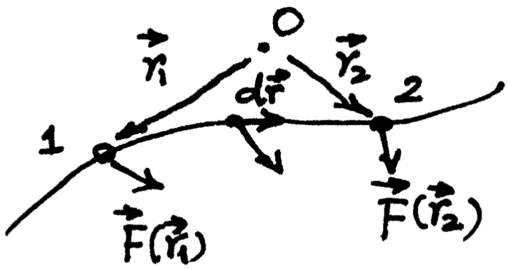
cf. Elliptical motion under the central force (acceleration) of gravitation is always acting.

iii) $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(t)$ 시간에 따른 함수 형태인 경우 적분에 의한 解

$$\boldsymbol{p}_f = \boldsymbol{p}_i + \int_{t_i}^{t_f} \boldsymbol{F}(t)dt$$

保存(力)場의 경우 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$: 위치 함수의 형태.

위치 1 에서 위치 2 로 옮겨가는 동안 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ 의 힘이 점입자에 작용한 경우 힘이 입자에 대해 한 일 W_{12}



$$W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{r}$$

여기서

$$\boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{r} = \dot{\boldsymbol{p}} \bullet d\boldsymbol{r} = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \bullet \left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}dt\right) = m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \bullet \boldsymbol{v}dt = \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\boldsymbol{v} \bullet \boldsymbol{v})dt$$

$$= \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(v^2)dt = d\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right) \equiv dT \qquad \left(T \equiv \tfrac{1}{2}mv^2 : \textbf{kinetic energy}\right)$$

이므로 (cf. 운동에너지 mv^2 개념, *vis viva* : C. Huygens, 1669 ;

correct definition of *vis viva* = $mv^2/2$: G.G. de Coriolis, 1829)

$$W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \boldsymbol{F} \bullet d\boldsymbol{r} = \int_1^2 d\left(\tfrac{1}{2}mv^2\right) = \tfrac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = T_2 - T_1$$ 이다. 이는 T_1, T_2 가

위치에만 의존하는 scalar 량일 경우, 즉 운동에 관련된 힘이 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$의 형태일 때 W_{12}는 중간 경로에 무관한 결과이다.

→ $\boldsymbol{F}$ 는 보존력(保存力, conservative force)

→ 보존력이 작용하는 공간을 보존장(保存場, conservative field)

→ 보존력 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$에 대해서 수학적으로 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ = -grad $U(\boldsymbol{r})$ 또는 $-\nabla U(\boldsymbol{r})$을 만족하는 scalar 함수 $U(\boldsymbol{r})$이 存在함.

(cf. 위치 에너지 개념 : G.W. Leibniz, 1695)

iv) Newton 의 제 1,2 법칙 = "힘의 정의"로 보는 관점과 개별 힘(중력, 전자기력 등)과 질량, 가속도 간의 관계 "법칙"으로 보는 관점이 있음.

v) Newton 제 2 법칙에서의 힘은 물체에 작용하는 "힘의 (벡터)합력"으로 간주함이 타당함.

vi) Newton 제 3 법칙 (작용과 반작용)은 항상 성립하는 것은 아니며, 아주 멀리 떨어진 물체 간에 작용하는 힘이라든가, 힘의 전파에 유한한 시간이 걸리는 경우에는 맞지 않음.

vii) Newton 법칙에서는 가속도를 정해야 하는 좌표계에 관해서 언급이 없음.

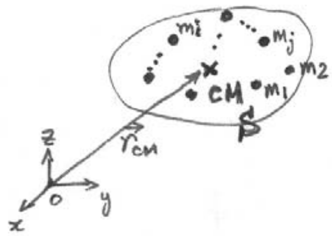
→ 하나의 좌표계(관성좌표계)에서 성립하면 이에 대해 일정 상대속도로 움직이는 다른 모든 좌표계에서도 성립.

2. Motion of a System of Particles (입자계의 운동)

여러 입자로 구성된 입자계 (S) : 입자간 상호작용(힘) 존재

● 질량 중심 (Center of Mass : CM)

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots}{m_1 + m_2 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i \qquad (1)$$



$$M \equiv \sum_i m_i = \text{총질량}$$

질량 중심(CM)의 이동속도 $\vec{v}_{CM}$:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{v}_i = \frac{1}{M}\sum_i \vec{p}_i \qquad (2)$$

입자계의 총 선운동량 $\vec{P} \equiv \sum_i \vec{p}_i$ 이라면 $\vec{P} \equiv \sum_i \vec{p}_i = M\vec{v}_{CM}$ (3)

: 입자계 S의 전체운동량은 전체 입자질량 M이 CM 위치에 가상적으로 밀집되어 속도 v_{CM}으로 운동하는 단일가상입자의 운동량과 동일.

● 질량 중심 좌표계 (center-of-mass frame of reference, C-frame or CM-frame, CM coordinate system)

CM 위치에 원점을 두는 좌표계 (lab-frame 에서 볼 때 CM-frame 은 이동좌표계) → CM-frame 에서는 $\vec{v}_{CM} = 0$, 즉 $(\vec{v}_{CM})_{CM} = 0$ (4)

→ (3)&(4)로부터 $(\vec{P})_{CM} \equiv \sum_i (\vec{p}_i)_{CM} = M(\vec{v}_{CM})_{CM} = 0$

● 힘의 분류

Fundamental forces (or interactions) :

강력 또는 핵력 (strong force or nuclear force)

전자기력 (electromagnetic force)

약력 (weak force) $\rightarrow$ (통일이론) 전자기력+약력 = electroweak force

중력 (gravitational force)

물질 구조적 결합력 :

공유결합 (covalent bonding) ---

이온결합 (ionic bonding) 원자간 결합

금속결합 (metallic bonding) ---

분자(간)결합 (van der Waals bond, hydrogenic bond)

현상론적 힘 :

마찰력, 인장력, 전단력 ... (기계공학, 강체역학)

점성력, 압력 ... (유체역학, 열수력학)

응집(cohesive)력, 부착(adhesive)력, ... (표면학, 계면학)

부력, 복원력 ... (조선공학), (부)양력, 항력, 추진력... (항공우주공학)

전향력(Coriolis force), 원심력, ... (가상적인 힘)

전력(electric power), 기전력(electromotive force) : 힘이 아님 (번역 오류)

- 입자계에 미치는 힘 : 힘의 근원의 위치에 따라 외력, 내력

외력 (external force) $\vec{F}_{ext}$ = 입자계 S 의 외부에서 근원하는 힘

내력 (internal force) $\vec{F}_{\text{int}}$ = 입자계 S 의 내부 입자 상호 간에 미치는 힘.

모든 개별 입자 짝(pair)에 대한 내력이 작용-반작용의 법칙에 따른다면, 개별 입자의 운동은 내력과 외력의 합력에 좌우되나, 입자계 S 전체의 운동(=CM 운동)은 외력 만에 의해 결정됨 :

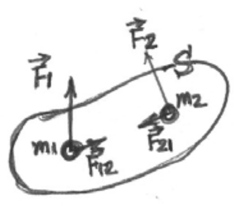
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{p}_i = \sum_i \frac{d}{dt}\vec{p}_i = \sum_i \left(\vec{F}_{ext} + \vec{F}_{\text{int}}\right)_i = \sum_i \left(\vec{F}_{ext}\right)_i \tag{5}$$

여기서 내력의 합력은 zero (작용-반작용의 법칙)

(예) 2-입자계 S : $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ 는 입자 1, 2 에 각각 미치는 외력

$\vec{F}_{12}$ 은 입자 2 에 의해 입자 1 에 미치는 내력

$\vec{F}_{21}$ 은 입자 1 에 의해 입자 2 에 미치는 내력



내력이 작용-반작용의 법칙에 따른다면, $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ (6)

개별 입자의 운동식 :

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_{12}, \quad \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_2 + \vec{F}_{21} \rightarrow$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{p}_i = \frac{d}{dt}\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right) = \vec{F}_1 + \vec{F}_{12} + \vec{F}_2 + \vec{F}_{21} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \tag{7}$$

(7)식과 (3)식의 결합 →

$$\vec{F}_{ext} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \frac{d\vec{P}}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = M\vec{a}_{CM} \tag{8}$$

즉, 입자계 S 의 CM 운동은 외력의 총합에 좌우됨. 입자계 S 가 외부와 상호작용이 단절된 고립계라면 외력이 없음을 의미하며 이때 CM 운동은 정지 또는 일정속도(등속도) 운동 → CM-frame 은 inertial frame 이 됨 → (가상력이 없이) 뉴턴의 물리법칙이 성립 !!

● 입자계 내부 운동 : 내력(=상호작용)에 의한 운동의 기술

2-입자계 문제 → 두 입자 간의 상대운동 (상대위치 벡터의 운동)

3-입자계 또는 그 이상의 소수입자계 → 이론적 접근의 난해

다체계 (수 백개 - 아보가드로수 규모) 문제 → 통계역학적 접근

2-입자계의 운동 기술 (외력이 없는 경우) : CM-frame 에서 간단해 짐 → 내력이 작용-반작용 법칙에 따르면 개별 입자의 운동을 기술할 필요 없이 두 입자 간의 상대 위치 운동을 기술함으로 충분.

$$m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_{12}, \qquad m_2\frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F}_{21}$$

두 입자의 좌표 : $\vec{r}_1, \vec{r}_2$

상대 좌표 : $\vec{r}_{12} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ → 상대 속도 $\vec{v}_{12} \equiv \vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \dfrac{d\vec{r}_{12}}{dt}$

여기서 상대위치 벡터 $\boldsymbol{r}_{12}$(=입자 2 에 대한 입자 1 의 상대위치)의 운동 방정식은

$$\frac{d}{dt}\vec{v}_{12} = \frac{d}{dt}\vec{v}_1 - \frac{d}{dt}\vec{v}_2 = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} - \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{12} \equiv \frac{1}{\mu}\vec{F}_{12}, \tag{9}$$

$$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \text{reduced mass of particle 1 and 2}$$

(9)식은 상대위치 $\boldsymbol{r}_{12}$에 환산질량 μ의 가상입자가 힘 $\boldsymbol{F}_{12}$ (입자 1 에 미치는 내력)에 의해 운동하는 상황임을 의미함.

3. Lagrangian Mechanics

Newton 역학 체계 :

단순 운동의 경우 또는 직각좌표계(Rectangular or Cartesian coordinates)에서 운동 방정식이 단순하고 간결.

보다 복잡한 운동, 예를 들면 구형좌표(球型座標, spherical coordinates)계에서 표시되는 가속도 vector 나, 구속된 운동(constraint movement)의 경우 운동 방정식(미분 방정식)이 복잡함 → 풀이 과정이 난해.

Newton 역학 체계에 의한 수학적 어려움을 피하기 위한 일반이론적(一般理論的) 방법론 → Lagrange 역학 체계

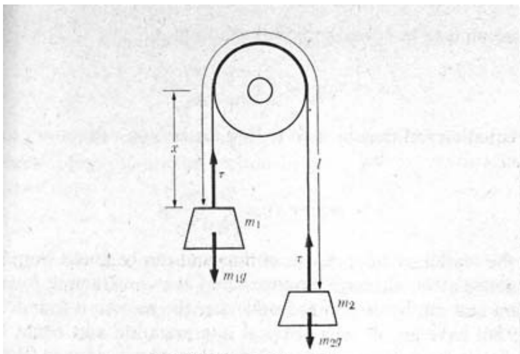


Fig. 9.5 Atwood's machine.

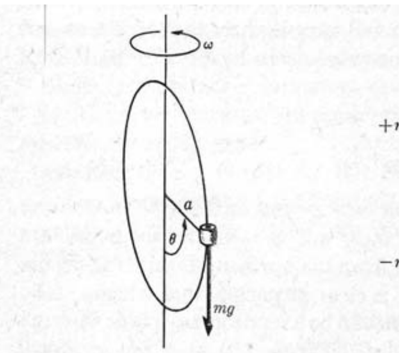


Fig. 9.9 A bead sliding on a rotating hoop

Lagrange 역학 체계 :

역학계에 Hamilton 의 원리(Hamilton's principle)를 적용하여 그 결과로서 (특정운동의 해가 아니라 운동방정식) Lagrange 운동 방정식을 얻음!

Lagrange 운동 방정식 :

i) 입자에 적용할 경우 : Newton 운동 방정식과 동일하게 귀결.

ii) 파동(波動, wave)과 같은 장(場, field)에 적용할 경우 : Newton 운동 방정식보다 간편하게 기술됨.

Lagrangian L : L ≡ T – U

(1 차원 운동) ∴ $T(\dot{x}) - U(x)$ 또는 $T(x,\dot{x}) - U(x)$ 의 scalar 함수 형태

→ $L = L(x,\dot{x})$

→ Hamilton 원리와 변분의 수학(calculus of variation)을 이용하여, Lagrange 운동방정식(또는 Euler-Lagrange 방정식)이 유도됨.

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0$$

Lagrange 운동방정식의 일반성(一般性):

역학 문제에 (x,y,z)의 Cartesian 좌표 응용 이상으로 일반 좌표계 (general coordinate system)에 대해서도 성립. 이 일반 좌표계를 q_i, 일반 좌표에 대응하는 일반 속도 $\dot{q}_i$ 에 대해 Lagrangian 은 $L = L(q,\dot{q})$ 이며,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

(비교) 보다 난해한 역학 문제의 접근 ↔ 좌표계 선택의 중요도.

- Newton 법칙

  $\boldsymbol{F} = \frac{d}{dt}\boldsymbol{P}$ (힘이 원인 → 운동이 결과)

  새로운 좌표계에서 Newton 의 법칙은 보다 복잡한 형태

  ∵ vector 의 좌표계 변환을 내포함.

  또한 여러가지 보존력이 작용하는 경우, 전체적인 합력은 vector 의 합성으로 구해짐. 구속력의 경우에는 힘 자체가 운동에 의존하여 결정되므로 해(solution)가 주어져야 힘(force)이 결정되는 경우도 포함됨.

- Lagrange 운동 방정식 = Action integral 이 최소가 되는 운동

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

  Lagrangian(= K.E. – P.E.) = scalar → 좌표계 변환 단순, 계산 용이.

3. Hamiltonian Mechanics

직각 좌표계에서의 linear momentum $p_i = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$

→ generalized momentum p_j 의 정의 : $p_j \equiv \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$

e.g. $x \leftrightarrow p_x$, $r \leftrightarrow p_r$, $\theta \leftrightarrow p_\theta$($=L$, *angular momentum*)

where $p_x = m\dot{x}$, $p_r = m\dot{r}$, $p_\theta = mr^2\dot{\theta}$

conjugate momentum p_j to the generalized coordinate q_j

cf. 선운동량 p = mv는 (x,y,z) 좌표계에서는 generalized momentum p_x, p_y, p_z와 일치하나, 일반 좌표계에서는 더 이상 $p_j = m\dot{q}_j$ 가 아님. 예를 들면 평면 극좌표계 (r, θ)에서 θ에 대응되는 일반적 운동량 p_θ는 $m\dot{\theta}$가 아니고 $p_\theta = mr^2\dot{\theta}$이며 이것은 각운동량에 해당한다.

→ Lagrange 운동 방정식 변형 : $\dot{p}_j = \dfrac{\partial L}{\partial q_j}$

Hamiltonian $H = H(q_k, p_k, t)$ 의 정의(定義)

$$H \equiv \sum_j p_j \dot{q}_j - L(q_k, \dot{q}_k; t) \tag{1}$$

→ $p_j \equiv \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ 를 이용하여 $\dot{q}_j$ 를 q_k, p_k 들의 함수로 표현

$$\rightarrow \ H = H(q_k, p_k, t) \tag{2}$$

(2)로부터

$$dH = \sum_k \left(\frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k\right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \tag{3}$$

(1) 로부터 H 는 $p_k, q_k, \dot{q}_k, t$ 의 함수이므로

$$dH = \sum_k \left(\dot{q}_k dp_k + p_k d\dot{q}_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} d\dot{q}_k\right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$= \sum_k \left(\dot{q}_k dp_k - \frac{\partial L}{\partial q_k} dq_k\right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

마지막 단계에서 $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = p_k$ 임을 이용하여 소거되었으며, 또한

$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}) = \dot{p}_k$ 임을 이용하면

$$dH = \sum_k (\dot{q}_k dp_k - \dot{p}_k dq_k) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \qquad (4)$$

(3), (4)식의 독립변수들 dp_k, dq_k, dt 의 계수들 비교

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad -\dot{p}_k = \frac{\partial H}{\partial q_k}, \qquad -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

→ Hamilton's equation of motion

Canonical(표준 標準, 正準의 의미) equation of motion

(note) Hamilton 운동방정식은 개별 역학 문제의 해를 구하는 용도보다는 새로운 역학체계 즉, 통계역학과 파동역학을 정립하는데 기여함.

Hamiltonian의 의미 = 대부분의 경우 총에너지 = K.E. + P.E.

Bibliography :

(Basic)

1. V. Barger and M. Olsson, Classical Mechanics, New York, McGraw-Hill Inc., 1973

(Intermediate)

2. J. B. Marion and S. T. Thornton, Classical Dynamics of Particles & Systems, 3rd Ed., New York, Harcourt Brace Jovanovich, Inc., 1988
3. K. R. Symon, Mechanics, 3rd Ed., Reading, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1971
4. R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. L. Sands, The Feynman Lectures on Physics, Vol. 1, Mechanics, radiation and heat, Redwood City, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1989

(Advanced)

5. H. Golstein, Classical Mechanics, Reading, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1950 (1st Ed.) and 1980 (2nd Ed.)

6. E. T. Whittaker, A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies, 4th Ed., New York, Dover Publication, 1944