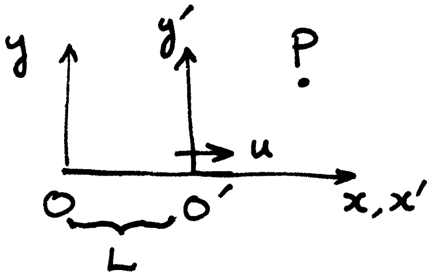
(Lecture 3) Theory of Relativity

1. Classical Relativity (고전 상대성 이론)

- Inertial frame of reference (관성 慣性 좌표계)

a frame of reference (a coordinate system) in motion with a constant velocity (including zero) with respect to another inertial frame of reference

- Galilean transformation : 고전적 좌표계 변환



- P 점의 좌표

O : (x, y, z), O′ : (x′, y′, z′)

$$\begin{cases} x = x' + L = x' + ut \\ y = y', \quad z = z' \\ L = ut \quad (O = O' \ at \ t = 0) \end{cases}$$

Implicitly t′ = t (clocks going the same way once they are synchronized)

For a moving point P :

$\rightarrow$ $dx = dx' + u\,dt, \quad dy = dy', \quad dz = dz', \quad dt = dt'$

$\rightarrow$ $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{dx'}{dt'} + u, \quad \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy'}{dt'}, \quad \dfrac{dz}{dt} = \dfrac{dz'}{dt'}$

$\rightarrow$ $v_x = v'_x + u, \quad v_y = v'_y, \quad v_z = v'_z$

and for an accelerating point P :

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv'_x}{dt'} + \frac{du}{dt}, \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{dv'_y}{dt'}, \quad \frac{dv_z}{dt} = \frac{dv'_z}{dt'}$$

Since O, O′ are inertial frames, $du/dt = 0$.

$\rightarrow$ $a_x = a'_x, \quad a_y = a'_y, \quad a_z = a'_z$

$\rightarrow$ $\vec{F} = m\vec{a} = m\vec{a}'$

$\therefore$ The force and the law of motion (Newton's second law) are the same for the two observers in the inertial frames.

2. Special Relativity (특수 상대성 이론)

- 빛(light)의 상대속도

빛(light, photon) = 전자기파(electromagnetic wave)

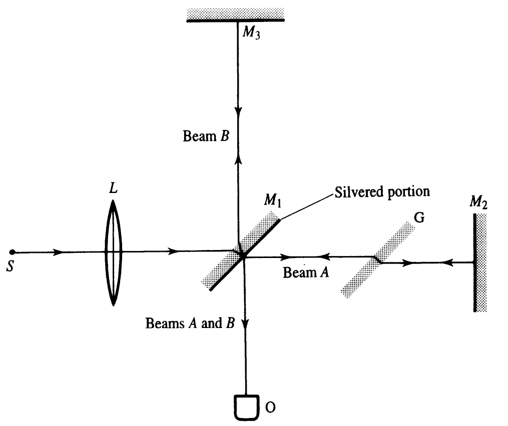
Maxwell's equations → wave equation of light

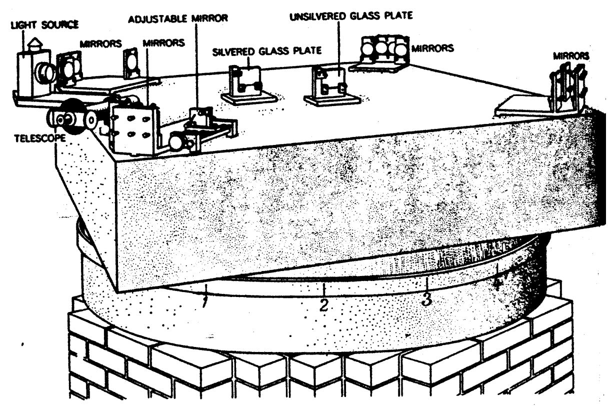
파동(波動, wave)의 전파(propagation) : 매질에 대한 상대운동(고전역학)

→ 빛(전자기파)의 경우 매질을 ether 로 가정. ether 의 존재 가정. 실측은 부재. ether 는 모든 공간에 존재하며 모든 물질 내로 스며드는 성질. 따라서 ether 에 대한 상대운동을 제시할 수 있는 절대 좌표계로서 역할.

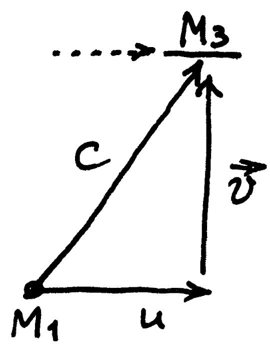
- Michelson-Morley 의 실험 (1887)

실험 장치의 개요





S → M_2가 지구의 공전 방향이 되도록 설정. 공전 속도 u



빛의 (지구에 대한) 속도

$M_1 \rightarrow M_2$: c – u

$M_2 \rightarrow M_1$: c + u

$M_1 \rightarrow M_3$: $\sqrt{c^2 - u^2}$

$M_1 \leftrightarrow M_2$ 경로와 $M_1 \leftrightarrow M_3$ 경로 간의 경로차 및 시간차

$e^{i(k\Delta x - \omega \Delta t)} = e^{i\Delta\phi}$,

Δx : 경로차(장치에서의 실제 경로차),

Δt : 시간차(ether 에 대한 지구 운동에 의한 속도 차이에 의한 시차)

→ 위상차 ($\Delta\phi$) → 간섭 효과 (Observer O) 존재

→ 장치의 회전 이동에 따른 위상차의 변화 → 간섭 무늬의 이동

실제 실험의 결과 : 간섭 무늬 이동 부재(不在) !!

→ ether 존재 부정

→ 설명 --- Lorentz transformation

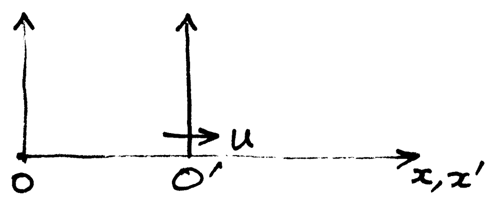
--- Einstein 의 절대 광속도 가정

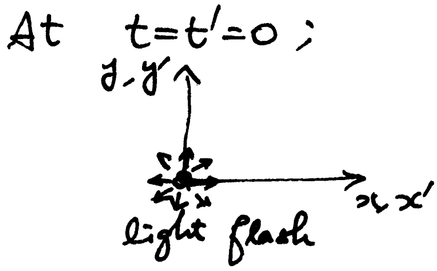
- Einstein 의 특수 상대론 (1905) :

두 가지 전제

1) 진공 중에서의 광속은 모든 관성계에 대해 동일

2) 물리 법칙은 모든 관성계에서 동일한 형태.





시각 $t = t' = 0$ 에 원점에서 방출된 빛의 위치 :

spherical front of light flash

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2 \end{cases}$$

A general transformation :

$$x' = ax + bt, \quad t' = dx + et, \quad y' = y, \quad z' = z$$

where a, b, d, e are functions of u.

Low relative velocity limit = Galilean transformation

$u \to 0$; $a, e \to 1$, $b, d \to 0$

O′(x'=0) velocity = u and $x = ut$

$0 = ax + bt = aut + bt = (au + b)t \qquad \therefore\ b = -ua$

$(ax + bt)^2 + y^2 + z^2 = c^2(dx + et)^2$

→ $(a^2 - c^2d^2)x^2 + 2(ab - c^2de)xt + y^2 + z^2 = (c^2e^2 - b^2)t^2$

$\rightarrow \quad (a^2 - c^2d^2) = 1, \quad (ab - c^2de) = 0, \quad (c^2e^2 - b^2) = c^2$

$$\rightarrow \quad a = e = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \equiv \gamma$$

$$b = -ua = -\frac{u}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}} = -u\gamma, \qquad d = -\frac{u}{c^2}a = -\frac{u}{c^2}\gamma$$

where $\quad 0 \le \beta \equiv \dfrac{u}{c} \le 1, \qquad \gamma \ge 1$

• **Lorentz transformation** :

$$x' = ax + bt = \gamma x - \gamma ut = (x - ut)\gamma \tag{1}$$

$$t' = dx + et = -\frac{u}{c^2}\gamma x + \gamma t = (t - \frac{u}{c^2}x)\gamma \tag{2}$$

should read as : (움직이는 관측자 x) =

(정지 관측자 x – 상대속도×정지 관측자 t) × γ

t 에 대해서도 유사한 방식.

Inverse transformation

두 관측자 모두 inertial frame 에 속하므로 상대적으로 O 는 O′에 대해 –u 의 등속도 운동 → 물리 법칙은 모든 관성계에서 동일한 형태임을 상기하면 inverse transformation 은 $x' \rightarrow x$, $t' \rightarrow t$, $u' \rightarrow u$.

$$\begin{aligned} x &= (x' + ut')\gamma \\ t &= (t' + \frac{u}{c^2}x')\gamma \end{aligned} \tag{3}$$

상대 운동에 수직인 방향 (y, z; y′, z′)은 모두 동일.

• **Space contraction : Lorentz-FitzGerald contraction**

Length (relative to an observer or a reference frame) = distance between the two positions of object which are measured (observed) at the same instance of time in the frame.

The length of the stationary positions of object (relative to the observer frame) = proper length L_0 = object가 정지된 좌표계 (또는 object와 같이 움직이는 좌표계)에서의 object 길이.

O' 좌표계에서 정지되어 있고 x' 방향으로 놓인 1 차원 막대를 고려. 양끝은 항상 일정 좌표값인 x_2'과 x_1'이며, O'-좌표계에서 길이 L' = L_0

$$L' = x_2'(t_2') - x_1'(t_1') = x_2' - x_1' = L_0$$

O 좌표계에서 관측되는 막대는 운동 중이며, 그 길이는 (O 좌표계에서의) 동시 시각 t 에 양끝의 좌표를 관측하면 (1)식으로부터

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= ut + \frac{1}{\gamma}x_2' \\ x_1 &= ut + \frac{1}{\gamma}x_1' \end{aligned}\right\rangle \rightarrow \ x_2(t) - x_1(t) = \frac{1}{\gamma}(x_2' - x_1') = \frac{1}{\gamma}(x_2' - x_1')$$

$$\therefore \quad L = x_2(t) - x_1(t) = \frac{1}{\gamma}(x_2' - x_1') = \frac{1}{\gamma}L' = L_0\sqrt{1-\beta^2} \qquad (4)$$

→ 운동 상태의 측정 길이 < 정지 상태의 측정 길이

여기서, 일단 (4)식이 유도된 후에는 L, L_0의 해석으로서는 L = 운동 중인 막대 (또는 운동 중인 object) 길이, L_0 = 정지된 막대(또는 정지된 object)의 **측정된** 길이 = 막대(object)의 적정 길이(proper length)로 해석한다. 막대가 O 좌표계에서 정지해 있거나 O' 좌표계에서 정지되어 있거나 상대적으로는 모두 운동이 성립하므로 막대의 정지된 좌표계를 O' 좌표계라고 고정하여 생각하지 않는 편이 혼동을 피하는 길임.

- **Time Dilation : retardation of moving clocks**

표준시계 C'이 O'(x', t') 좌표계에서 $x' = x_1'$ 좌표에 이동없이 위치(고정). C'가 특정시각 $t' = t_1'$에 좌표계 O(x, t)의 표준시계를 스쳐 지나는 경우, O(x, t)의 표준시계의 시각은 (3)식으로부터

$$t_1 = \gamma(t_1' + \frac{u}{c^2}x_1')$$

얼마간의 시각 경과 후, C'의 시각 $t' = t_2'$ 에 O(x, t)의 표준시계의 시각은 마찬가지로

$$t_2 = \gamma(t_2' + \frac{u}{c^2}x_1')$$ 이므로 윗식과의 차이(시간 간격)은

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma(t_2' - t_1') = \gamma\Delta\tau = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Δt becomes larger than $\Delta\tau$ as $\beta \to 1$: 즉, O(x, t)에서 자체의 표준시계로 관측된 (이동하는) 시계 C'의 간격 Δt는 O'(x', t')에서 관측되는 (고정된) 시계 C'의 간격 $\Delta\tau$ 보다 크므로 이동하는 시계가 느리게 간다.

여기서 $\Delta\tau$ = 시계 좌표계(=시계와 함께 운동하는 좌표계)에서 (따라서 일정위치에 고정된 시계로) 관측되는 시간 간격. 혹은 동일 위치(x)에서 일어나는 두 사건에 대해 시계 좌표계에서 관측된 시간 간격 = proper time 이라고 함.

Δt = 시계 좌표계에서 관측된 시간 간격 $\Delta\tau$ (또는 이에 해당되는 두 사건의 시간 간격)에 대응되며, 시계에 대해 상대운동을 하는 좌표계에서 자체의 표준시계로 측정한 시간 간격.

- **Velocity Transformations**

관측자 O : $v_x = dx/dt, \quad v_y = dy/dt, \quad v_z = dz/dt$

관측자 O′ : $v'_x = dx'/dt', v'_y = dy'/dt', v'_z = dz'/dt'$

$x' = (x - ut)\gamma \quad \to \quad dx' = (dx - udt)\gamma$

$t' = (t - \frac{u}{c^2}x)\gamma \to \quad dt' = (dt - \frac{u}{c^2}dx)\gamma$

$$\begin{cases} \dfrac{dx'}{dt'} = v'_x = \dfrac{dx - udt}{dt - \frac{u}{c^2}dx} = \dfrac{(dx/dt) - u}{1 - \frac{u}{c^2}(dx/dt)} = \dfrac{v_x - u}{1 - \frac{u}{c^2}v_x} \\ \dfrac{dy'}{dt'} = v'_y = \dfrac{dy}{(dt - \frac{u}{c^2}dx)\gamma} = \dfrac{dy/dt}{(1 - \frac{u}{c^2}\frac{dx}{dt})\gamma} = \dfrac{v_y}{(1 - \frac{u}{c^2}v_x)\gamma} \\ \dfrac{dz'}{dt'} = v'_z = \dfrac{dz}{(dt - \frac{u}{c^2}dx)\gamma} = \dfrac{dz/dt}{(1 - \frac{u}{c^2}\frac{dx}{dt})\gamma} = \dfrac{v_z}{(1 - \frac{u}{c^2}v_x)\gamma} \end{cases}$$

(example 1) O-frame 에서 정지된 광원으로부터 방출된 빛. 상대속도 c/2 인 O′-frame 에서 관측되는 빛의 속도?

$$v'_x = \frac{c - (c/2)}{1 - \dfrac{(c/2)}{c^2}c} = \frac{c/2}{1/2} = c, \quad where\ v_x = c \ \ and \ \ u = c/2\,.$$

Otherwise, for any u,

$$v'_x = \frac{c-u}{1-\frac{u}{c^2}c} = \frac{c(1-\frac{u}{c})}{1-\frac{u}{c}} = c, \quad \text{regardless of } u$$

i.e. the velocity of light is c in all inertial frame of references !!!

(example 2) One consequence about the Newton's law F = ma :

Galilean transformation F = ma = ma′

Lorentz transformation :

$$(a_x = \frac{dv_x}{dt}) \neq (a'_x = \frac{dv'_x}{dt'})$$

- **Inverse Transformations**

$v'_{x,y,z} \to v_{x,y,z} \quad v_{x,y,z} \to v'_{x,y,z} \quad u \to -u$

$$v_x = \frac{v'_x + u}{1+\frac{u}{c^2}v'_x}, \quad v_y = \frac{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}{1+\frac{u}{c^2}v'_x}v'_y, \quad v_z = \frac{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}{1+\frac{u}{c^2}v'_x}v'_z$$

- **Relativistic Mechanics**

Einstein 의 특수 상대론 (Lorentz transformation) 결과 :

$$\vec{F} \neq m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad or \quad m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Einstein's approach :

$$\vec{F} \neq m\vec{a} \quad but \quad \vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

where the so-called mass m is no longer constant but $m = m(v)$.

By preserving the law of the momentum conservation in all inertial frames for a collision process, one can show (see textbook or reference)

$$m = m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$$

where v : particle velocity, m_0 : rest mass (constant of the particle).

- **Kinetic Energy** $T = \int \vec{F} \bullet d\vec{r}$

Newtonian approach : $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$

$$T = \int\int\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} m\frac{d\vec{v}}{dt} \bullet d\vec{r} = m\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{v} \bullet \frac{d\vec{r}}{dt} = m\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{v} \bullet d\vec{v} = m\left[\tfrac{1}{2}(\vec{v} \bullet \vec{v})\right]_{\vec{v}_0}^{\vec{v}}$$

$$= \tfrac{1}{2} m[v^2]_{v_0}^{v} = \tfrac{1}{2} m(v^2 - v_0^2) = \tfrac{1}{2} mv^2 - \tfrac{1}{2} mv_0^2$$

When $v_0 = 0$ initially, $T = \frac{1}{2} mv^2$.

Relativistically, however, no simple substitution of m(v) into the classical expression $\frac{1}{2} mv^2$ is correct such as $T = \frac{1}{2}\frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} v^2$, since

$$T = \int \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \frac{d\vec{p}}{dt} \bullet d\vec{r} = \int_{\vec{p}_0}^{\vec{p}} \vec{v} \bullet d\vec{p} = \int [d(\vec{p} \bullet \vec{v}) - \vec{p} \bullet d\vec{v}]$$

$$\left(\vec{p} \bullet \vec{v} = \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \gamma m_0 v^2 \right)$$

$$= \int_{v=0}^{v} d(\gamma m_0 v^2) - \int_{v=0}^{v} \frac{m_0 \vec{v} \bullet d\vec{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

$$\left[\int_0^v \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tfrac{1}{2} d(\vec{v} \bullet \vec{v}) = \int_0^v \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tfrac{1}{2} d(v^2), \quad let\ v^2 = k \right.$$

$$\left. = \int_0^k \frac{(m_0/2)}{\sqrt{1-k/c^2}} dk = [-m_0 c^2 \sqrt{1-\tfrac{k}{c^2}}]_0^k = m_0 c^2 - m_0 c^2 \sqrt{1-(v/c)^2} \right]$$

$$= \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + m_0 c^2 \sqrt{1-\tfrac{v^2}{c^2}} - m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = mc^2 - m_0 c^2$$

$m_0 c^2$: a relativistic energy associated with the rest mass of the particle

$E = T + m_0 c^2 = mc^2$: **total relativistic energy**

$$= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \rightarrow \quad E^2 = \frac{m_0^2 c^4}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \rightarrow \quad c^2 p^2 = \frac{m_0^2 v^2 c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\therefore \quad c^2 p^2 + m_0^2 c^4 = \frac{m_0^2 v^2 c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} + m_0^2 c^4 = \frac{m_0^2 c^4}{1-\frac{v^2}{c^2}} = E^2$$

Particle with no rest mass (e.g. photon) : $\boldsymbol{m_0 = 0}$ $\rightarrow$ $E = cp$

(Basic)

1. A. Beiser, Perspectives of Modern Physics, New York, McGraw-Hill Inc., 1969
2. R.T. Weidner and R.L. Sells, Elementary Modern Physics, 2nd Ed., Boston, Allyn and Bacon, 1968

(Intermediate)

3. E.F. Taylor and J.A. Wheeler, Spacetime Physics, San Francisco, W.H. Freeman, 1966
4. H. Golstein, Classical Mechanics, Reading, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1950 (1st Ed.) and 1980 (2nd Ed.)

(Advanced)

5. J. D. Jackson, Classical Electrodynamics, 2nd Ed., New York, John Wiley & Sons, Inc., 1975
6. I. R. Kenyon, General Relativity, Oxford, Oxford University Press, 1990
7. C. Møller, The Theory of Relativity, Oxford, Clarendon Press, 1952