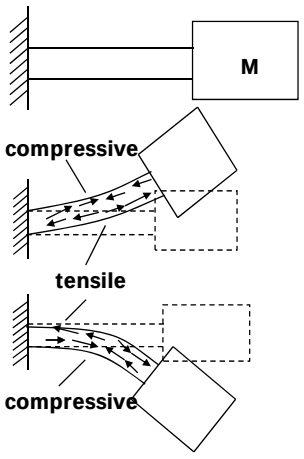
Lecture 19

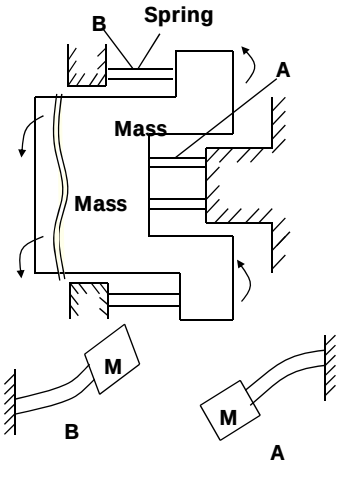
Comb Actuator Design : Mechanical Springs and Damping

- Push-Pull Springs
- Folded Beam
- Stiffness of Folded Beam
- Rayleigh's Method
- Effective Mass of Spring Beam: Fixed-Fixed
- Effective Mass of Spring Beam: Fixed-Free
- Shear Damping
- Q factor, Q

Spring Structure and Push-Pull Springs

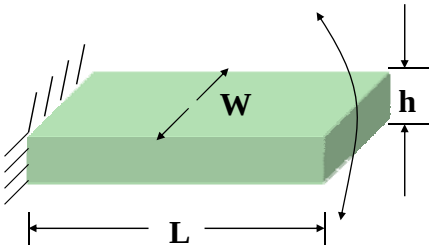
- **Compressive**와 **Tensile stress**를 같이 받는 스프링 구조가 잔류 응력의 영향을 덜 받음.





Push-Pull Springs

Spring Stiffness



$$k = 3 \cdot \frac{E \cdot I}{L^3}$$

E : Young's modulus

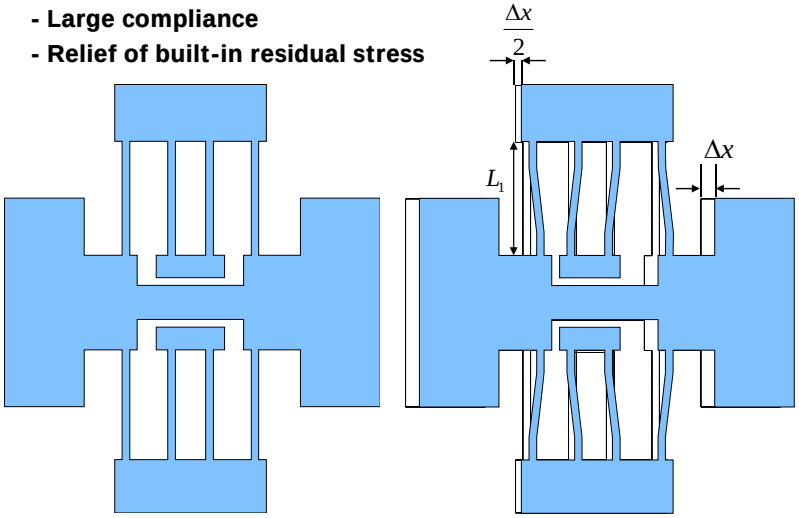
I : Moment of inertia

$$I = \frac{Wh^3}{12}$$

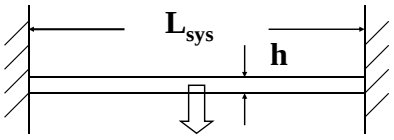
$$k = 3\ \frac{E}{L^3}\left(\frac{Wh^3}{12}\right) = \frac{E \cdot W}{4}\left(\frac{h}{L}\right)^3$$

Folded Beam

- **Large compliance**
- **Relief of built-in residual stress**



Spring Stiffness

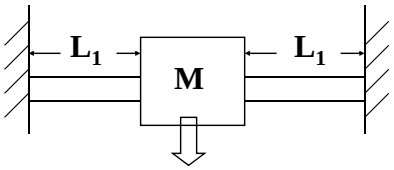


$$k_{sys} = 192 \cdot \frac{EI}{L_{sys}^3}$$

$$= 192 \cdot \frac{EW}{L_{sys}^3} \cdot \left(\frac{h^3}{12}\right)$$

$$= 16 \cdot E \cdot W \left(\frac{h}{L_{sys}}\right)^3$$

k_1 : *Spring stiffness*



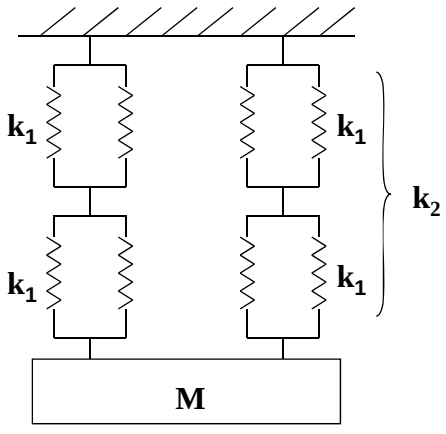
$$k_{sys} = 2k_1$$

$$L_{sys} = 2L_1$$

$$k_1 = \frac{k_{sys}}{2} = \frac{1}{2} \cdot 16\, E \cdot W \left(\frac{h}{2L_1}\right)^3$$

$$= EW \left(\frac{h}{L_1}\right)^3$$

Stiffness of Folded Beam



$$k_{sys} = 2k_2$$

$$\frac{1}{k_2} = \frac{1}{2k_1} + \frac{1}{2k_1}$$

$$= \frac{1}{k_1}$$

$$k_2 = k_1$$

따라서 $k_{sys} = 2k_2 = 2k_1$

$$k_{sys} = 2 \cdot EW \left(\frac{h}{L_1}\right)^3$$

Rayleigh's Method

- 보존계의 고유진동수를 구하는 근사 해법.
- 고유진동수 : 계가 주기적인 운동을 하면서 계의 운동에너지와 위치에너지를 주고 받는 에너지 교환율.
- 보존계를 고려하면,

(1) 운동 에너지와 위치에너지의 합은 일정하고

(2) 운동 에너지의 변화와 위치에너지의 변화는 같다.

- 단순 조화운동을 생각하면

$x = X\sin\omega_n t,\ \ \dot{x} = X\omega_n \cos\omega_n t$ 이고,

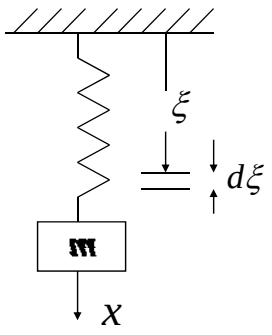
$$\frac{1}{2}kX^2 = \frac{1}{2}mX^2\omega_n^2$$

따라서, $\omega_n^2 = \dfrac{k}{m}$

- **1** 자유도계의 고유 진동수를 구하는 데에 유용.
- 다 자유도계나 탄성부의 고유진동수를 구할 경우에도 이용.

Mass of Spring

- **Rayleigh's method** 를 사용하면 탄성부의 질량을 무시할 수 없을 경우에 이 질량의 영향을 보정하여 고유진동수를 계산할 수 있다.



- 정적 평형위치를 기준위치로 택하여 계의 위치에너지를 구하면

$V = \frac{1}{2}kx^2$ 이 된다.

- 집중 질량 ***m*** 에 의한 운동에너지는

$T_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ 이 되고,

- 스프링의 미소요소 $d\xi$의 운동에너지는

$$dT_s = \frac{1}{2}\rho d\xi\ \ \dot{\xi}^2$$

여기서, ρ는 스프링의 단위 길이 당 질량.

Dynamic Energy of Spring

- 스프링의 임의의 점의 속도가 고정단으로 떨어져 있는 거리에 따라 선형적으로 변한다고 가정하면

- $\dot{\xi} = \frac{\xi}{\ell}\dot{x}$ 이라 할 수 있다.

- 전체 스프링에 대해서 운동에너지를 구하면

$$dT_s = \frac{1}{2}\rho d\xi\left(\frac{\xi}{\ell}\dot{x}\right)^2$$

- 전체 계의 운동에너지

$$T_s = \int_0^{\ell}\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\dot{x}}{\ell}\right)^2\xi^2 d\xi = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\dot{x}}{\ell}\right)^2\left(\frac{1}{3}\ell^3\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\rho\ell\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{m_s}{3}\dot{x}^2$$

$$T = T_m + T_s = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_s}{3}\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{3}m_s\right)\dot{x}^2$$

Resonant Frequency

- 단순 조화운동으로 표현하면

$$x = X\sin\omega_n t,\quad \dot{x} = X\omega_n\cos\omega_n t$$

- 최대 운동에너지 = 최대 위치에너지

$$\frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{3}m_s\right)(X\omega_n)^2 = \frac{1}{2}kX^2$$

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m + \frac{1}{3}m_s}$$

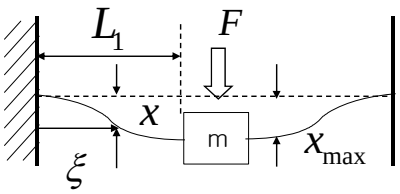
- 만약, 스프링의 임의의 점의 속도가 거리의 2차 함수로 주어지면

$$\dot{\xi} = \frac{\xi^2}{\ell^2}\dot{x}$$

$$T_s = \int_0^{\ell}\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\xi^2}{\ell^2}\right)^2\dot{x}^2 d\xi = \frac{1}{2}\rho\ell\frac{1}{5}\dot{x}^2$$

- 따라서, 스프링의 등가질량은 $\frac{1}{5}m_s$가 된다.

Effective Mass of Spring-Beam: Fixed-Fixed (I)



- 빔의 변위 $x(\xi)$

$$x(\xi) = \frac{F\xi^2}{48EI}(6L_1 - 4\xi)$$

$$= \frac{F2L_1^3}{4EWh^3}\left(\frac{\xi}{L_1}\right)^2\left(3-2\frac{\xi}{L_1}\right)$$

- 최대 변위 x_{max} at $\xi = L_1$

$$x_{max} = \frac{F}{2EW}\left(\frac{L_1}{h}\right)^3 \cdot 1 \cdot (3-2) = \frac{F}{2EW}\left(\frac{L_1}{h}\right)^3$$

- 빔의 변위 $x(\xi)$

$$x(\xi) = x_{max}\left(\frac{\xi}{L_1}\right)^2\left(3-2\frac{\xi}{L_1}\right)$$

Effective Mass of Spring-Beam: Fixed-Fixed (II)

- $dT_s = \frac{1}{2}\rho d\xi \dot{x}^2$

- 빔의 속도는 변위에 비례한다고 가정

$$\dot{x} = \dot{x}_{max}\left(\frac{\xi}{L_1}\right)^2\left(3-2\frac{\xi}{L_1}\right)$$

- $T_s = \int_0^{L_1}\frac{1}{2}\rho d\xi\left\{\dot{x}_{max}\left(\frac{\xi}{L_1}\right)^2\left(3-2\frac{\xi}{L_1}\right)\right\}^2$, $\frac{\xi}{L_1} = p$로 치환

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}\rho L_1 dp\, \dot{x}_{max}^2\, p^4\left(9-12p+4p^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\rho L_1 \dot{x}_{max}^2\left[\frac{9}{5}p^5 - \frac{12}{6}p^6 + \frac{4}{7}p^7\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\rho L_1 \dot{x}_{max}^2 \cdot 0.3714$$

$$= \frac{1}{2}m_s \dot{x}_{max}^2 \cdot 0.3714$$

Natural Frequency-Beam: Fixed-Fixed(III)

- $T = \frac{1}{2} 0.3714\, m_{s,sys}\, \dot{x}_{\max}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_{\max}^2$

  $m_{s,sys}$: 시스템 전체의 spring mass

- $V = \frac{1}{2} k_{sys}\, \dot{x}_{\max}^2$

- 단순 조화 운동이라고 가정

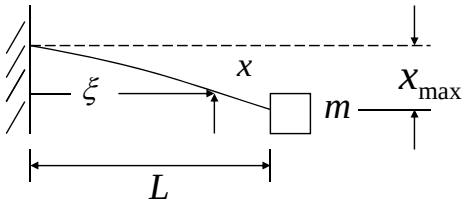
$$x = X \sin \omega_n t, \quad \dot{x} = X \omega_n \cos \omega_n t$$

- 최대 운동에너지 = 최대 위치에너지

$$\frac{1}{2}\left(m + 0.3714\, m_{s,sys}\right)\left(X\omega_n\right)^2 = \frac{1}{2} k_{sys} X^2$$

- $\omega_n^2 = \dfrac{k_{sys}}{m + 0.3714\, m_{s,sys}}$

Effective Mass of Spring-Beam: Fixed-Free(I)



- 빔의 변위

$$x(\xi) = \frac{FL^3}{3EI}\frac{1}{2}\left\{3\left(\frac{\xi}{L}\right)^2 - \left(\frac{\xi}{L}\right)^3\right\} = \frac{FL^3}{3E\left(Wh^3/12\right)}\frac{1}{2}\left\{3\left(\frac{\xi}{L}\right)^2 - \left(\frac{\xi}{L}\right)^3\right\} = \frac{4F}{EW}\left(\frac{L}{h}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left\{3\left(\frac{\xi}{L}\right)^2 - \left(\frac{\xi}{L}\right)^3\right\}$$

- 최대 변위 $x_{\max}$ at $\xi = L$

$$x_{\max} = \frac{4F}{EW}\left(\frac{L}{h}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{4F}{EW}\left(\frac{L}{h}\right)^3$$

- 빔의 변위 $x(\xi)$

$$x(\xi) = x_{\max}\, \frac{1}{2} \cdot \left\{3\left(\frac{\xi}{L}\right)^2 - \left(\frac{\xi}{L}\right)^3\right\}$$

Effective Mass of Spring-Beam: Fixed-Free(II)

- $dT_s = \frac{1}{2}\rho d\xi \dot{x}^2$

- 빔의 속도는 변위에 비례한다고 가정

$$\dot{x} = \dot{x}_{\max}\frac{1}{2}\left\{3\left(\frac{\xi}{L}\right)^2 - \left(\frac{\xi}{L}\right)^3\right\}$$

- $T_s = \int_0^L \frac{1}{2}\rho d\xi\left[\dot{x}_{\max}\frac{1}{2}\left\{3\left(\frac{\xi}{L}\right)^2 - \left(\frac{\xi}{L}\right)^3\right\}\right]^2$ 로 치환. $\frac{\xi}{L} = p$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2}\rho L dp\,\dot{x}_{\max}^2\frac{1}{4}\left(9p^4 - 6p^5 + p^6\right)$$

$$= \frac{1}{2}\rho L\dot{x}_{\max}^2\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{9}{5} - \frac{6}{6} + \frac{1}{7}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\rho L\dot{x}_{\max}^2 \cdot 0.2357$$

$$= \frac{1}{2}m_s\dot{x}_{\max}^2 \cdot 0.2357$$

Natural Frequency-Beam: Fixed-Free(III)

- $T = \frac{1}{2}\cdot 0.2357\, m_{s,sys}\dot{x}_{\max}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_{\max}^2$

$m_{s,sys}$: 시스템 전체의 spring mass

- $V = \frac{1}{2}k_{sys}x_{\max}^2$

- 단순 조화 운동이라고 가정

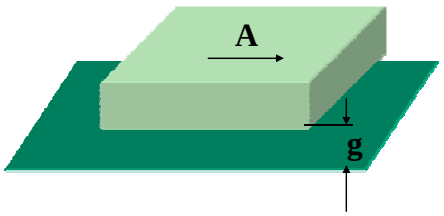
$$x = X\sin\omega_n t,\quad \dot{x} = X\omega_n\cos\omega_n t$$

- 최대 운동에너지 = 최대 위치에너지

$$\frac{1}{2}\left(m + 0.2357\, m_{s,sys}\right)\left(X\omega_n\right)^2 = \frac{1}{2}k_{sys}X^2$$

- $\omega_n^2 = \frac{k_{sys}}{m + 0.2357\, m_{s,sys}}$

Shear Damping



$$c = \frac{\mu A}{g}$$

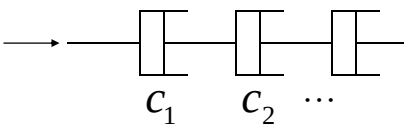
c : *damping coefficient* (FT/L)

μ : *viscosity of fluid* (FT/L^2)

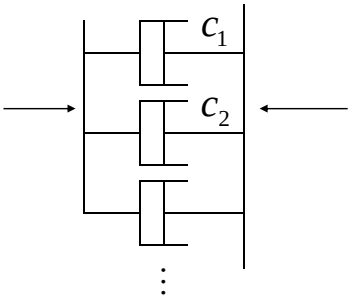
A : *area of plate*

g : *gap*

Serial and Parallel Dampers



$$\frac{1}{c_{eq}} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \cdots$$



$$c_{eq} = c_1 + c_2 + \cdots$$

Quality Factor, Q

- 판아래의 유체 흐름이 **Couette flow**라고 가정

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} \qquad for \quad weak \quad damping$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{sys}}{m}}, \quad \gamma = \frac{c}{2m}$$ 이므로

$$Q = \sqrt{\frac{k_{sys}}{m}} \cdot \frac{m}{c} = \frac{1}{c}\sqrt{mk_{sys}}$$

- 그런데, $c = \frac{\mu A}{g}$ 이므로 $Q = \frac{g}{\mu A}\sqrt{mk_{sys}}$

*** Couette flow :** 두 장의 평행한 무한 평판 사이에 점성 유체를 채우고, 한쪽의 판($y=0$)을 정지시키고, 다른 쪽의 판($y=h$)을 일정속도 V로 평행하게 움직일 때, 두 판사이의 속도 분포는 선형이 된다. 이 흐름을 **Couette flow**라고 한다.

$$v(y) = \frac{y}{g}V$$

References

- 이장무 편저, 기계진동학, 3장, 문운당, 서울, 1992.
- Gere and Timoshenko, Mechanics of Materials, Ch.8 and Appendix D, PWS-KENT, Boston, 1990.
- Walter D. Pilkey, Formulas for Stress, Strain and Structural Matrices, Ch.10, John Wiley & Sons, INC., New York, 1994.