Engineering Mathematics II

Prof. Dr. Yong-Su Na

(32-206, Tel. 880-7204)

Text book: Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 9th Edition, Wiley (2006)

Ch. 9 Vector Differential Calculus. Grad, Div, Curl

Ch. 9 Vector Differential Calculus. Grad, Div, Curl
(벡터미분법, 기울기, 발산, 회전)

NAVER 백과사전

벡터의 정의:
크기와 방향을 가지고 있는 양으로써 두 가지 정보를 모두 표현할 수 있는 화살표로 나타낸다.

Ch. 9 Vector Differential Calculus. Grad, Div, Curl (벡터미분법, 기울기, 발산, 회전)

- 벡터미분학은 고체역학, 유체의 흐름, 열전도, 전자기학 등에서 유용한 도구.
- 벡터함수와 벡터장은 항공기, 레이저 발생기, 열역학 시스템, 또는 핵융합로와 같은 시스템의 기본.
- 내용 : 벡터의 기본적인 연산, 벡터미분, 곡선상으로의 응용

9.1 Vectors in 2-Space and 3-Space (2차 및 3차원 공간에서의 벡터)

- **Scalar(스칼라):** 적당한 측도(scale)를 단위로 하여 그것의 크기에 의하여 결정되는 양

  예) 길이, 온도, 전압

- **Vector(벡터):** 크기와 방향에 의하여 결정되는 양. 따라서 화살표이거나 또는 Directed Line Segment(방향선분) 임.

  예) 힘, 속도, 자기장, 전기장

- 벡터의 표시: 굵은 소문자 **a**, **b**, **v** 등으로 나타냄. 수기할 때는 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}$ 와 같이 화살꼴을 사용. 벡터의 꼬리를 initial point(시작점), 뾰족한 끝을 terminal point(끝점)라 함.
- |**a**| : 화살표의 시작점과 끝점 사이의 거리.
  벡터의 길이 (또는 크기) 또는 norm (Euclidean norm)
- 길이가 1인 벡터를 Unit Vector(단위벡터)라 함

9.1 Vectors in 2-Space and 3-Space
(2차 및 3차원 공간에서의 벡터)

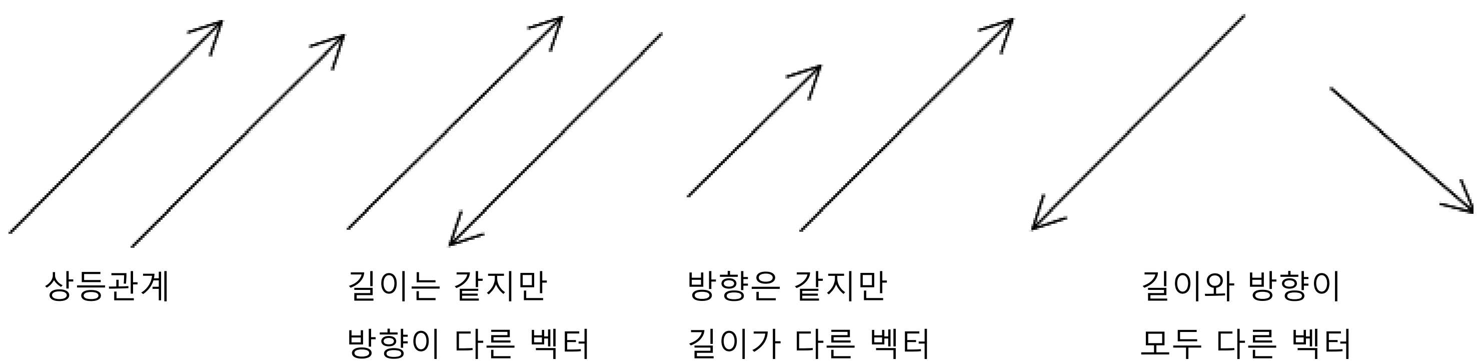
- **Equality of Vectors (두 벡터의 상등)**

  두 벡터 **a**, **b**가 같다. → 두 벡터 **a**, **b**의 방향과 길이가 같다.

  → 평행이동한 벡터는 본래의 벡터와 상등이다.

  (벡터의 시작점을 임의로 택할 수 있음)

- **두 벡터 사이의 관계**



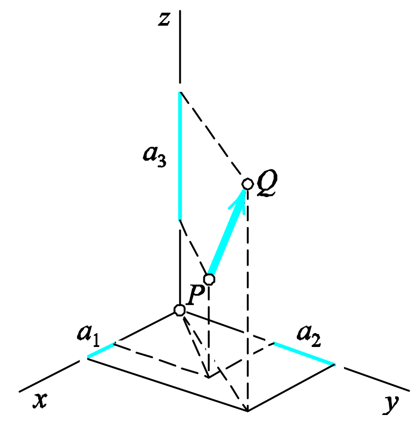
9.1 Vectors in 2-Space and 3-Space
(2차 및 3차원 공간에서의 벡터)

- **Components of a Vector (벡터의 성분)**

x, y, z Cartesian Coordinate System(직교좌표계)에서

시작점 P: (x_1, y_1, z_1)과 끝점 Q: (x_2, y_2, z_2)을 갖는 벡터 **a**의 성분

→ 세 개의 좌표 상의 차이: a_1, a_2, a_3



$$a_1 = x_2 - x_1,\ a_2 = y_2 - y_1,\ a_3 = z_2 - z_1 \quad \rightarrow \quad \mathbf{a} = [a_1,\ a_2,\ a_3]$$

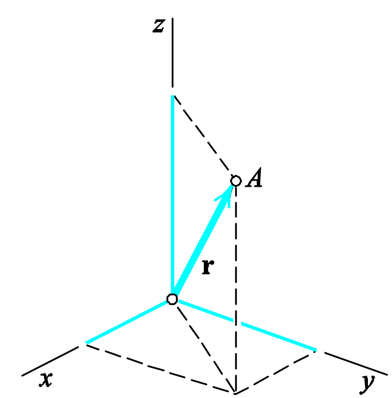
Pythagorean theorem → $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2}}$

■ **Ex. 1** P: (4,0,2), Q: (6, -1, 2)

- **Position Vector (위치벡터)**

직교좌표계에서 점 A:(x, y, z)의 Position Vector **r**

→ 시작점이 원점이고 끝점이 A인 벡터



9.1 Vectors in 2-Space and 3-Space (2차 및 3차원 공간에서의 벡터)

- **Vectors as Ordered Triples of Real Numbers (순서를 갖는 실수로 된 삼중수로서의 벡터)**

• 고정된 직교좌표가 주어지면 각 벡터는 해당하는 성분으로 된 순서를 갖는 삼중수로 유일하게 결정됨.

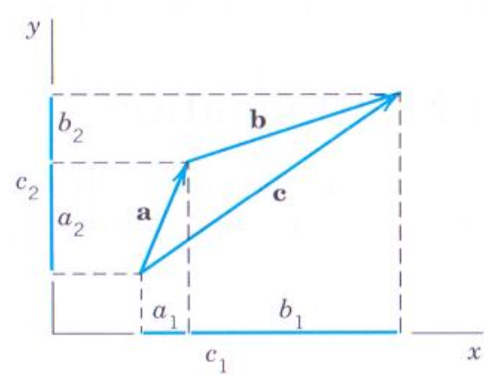
• 실수로 이루어진 순서를 갖는 삼중수에 대하여 정확하게 한 개의 벡터가 대응됨: $\mathbf{a}=[a_1,\ a_2,\ a_3]$

• 원점은 방향이 없고 길이가 영인 Zero Vector(영벡터)에 대응됨.

- **Addition of Vectors (두 벡터의 합)**

두 벡터 $\mathbf{a}=[a_1,\ a_2,\ a_3]$와 $\mathbf{b}=[b_1,\ b_2,\ b_3]$의 합 → $\mathbf{a}+\mathbf{b}=[a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3]$

대수적 방법과 기하학적 방법이 일치함.



9.1 Vectors in 2-Space and 3-Space
(2차 및 3차원 공간에서의 벡터)

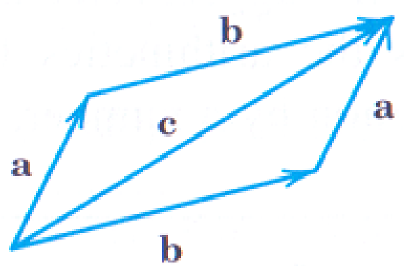
- **Basic Properties of Vector Addition (벡터합의 기본성질)**

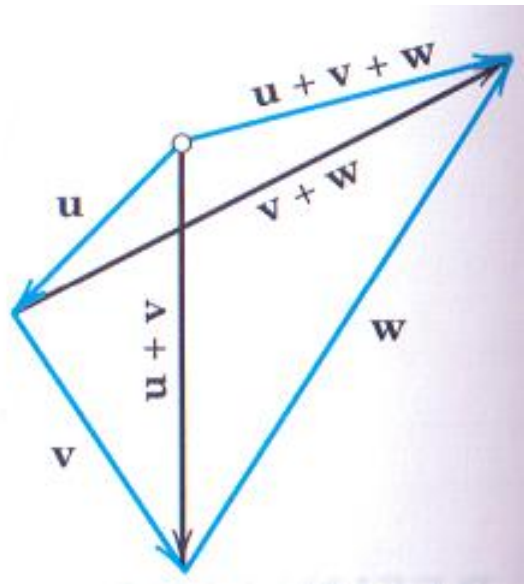
(a) **a**+**b**=**b**+**a** (cummutativity (교환법칙))

(b) (**u**+**v**)+**w**=**u**+(**v**+**w**) (associativity (결합법칙))

(c) **a**+0=0+**a**=**a**

(d) **a**+(-**a**)=0



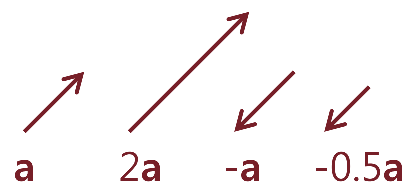


9.1 Vectors in 2-Space and 3-Space
(2차 및 3차원 공간에서의 벡터)

- **Scalar Multiplication by a Number (실수에 의한 스칼라곱)**

임의의 스칼라 c (여기서 c는 실수), 벡터 $\mathbf{a}=[a_1, a_2, a_3]$에 대하여 스칼라곱

$\rightarrow$ $c\mathbf{a}=[ca_1, ca_2, ca_3]$



- **Basic Properties of Scalar Multiplication (스칼라곱의 기본성질)**

(a) $c(\mathbf{a}+\mathbf{b})=c\mathbf{a}+c\mathbf{b}$

(b) $(c+k)\mathbf{a}=c\mathbf{a}+k\mathbf{a}$

(c) $c(k\mathbf{a})=(ck)\mathbf{a}$ or $ck\mathbf{a}$

(d) $1\mathbf{a}=\mathbf{a}$

- **벡터합과 스칼라곱의 기본성질에 의하여**

(a) $0\mathbf{a}=0$

(b) $(-1)\mathbf{a}=-\mathbf{a}$

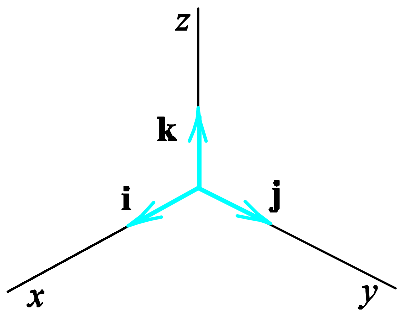
(c) $\mathbf{b}+(-\mathbf{a})=\mathbf{b}-\mathbf{a}$

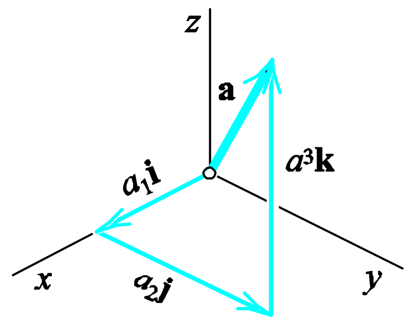
9.1 Vectors in 2-Space and 3-Space
(2차 및 3차원 공간에서의 벡터)

- **Unit Vector(단위벡터) i, j, k를 이용한 a의 또 다른 보편적인 표현법**

  i, **j**, **k**: 직계좌표계에서 각 축의 양의 방향에 놓인 단위벡터

$$\mathbf{i}=[1,\ 0,\ 0],\ \mathbf{j}=[0,\ 1,\ 0],\ \mathbf{k}=[0,\ 0,\ 1] \quad \rightarrow \quad \mathbf{a}=[a_1,\ a_2,\ a_3]=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$$





- 모든 벡터 **a**=[a_1, a_2, a_3]=a_1**i**+a_2**j**+a_3**k**의 집합은 두 대수적 연산자, 즉 벡터의 합과 스칼라곱이 정의된 3차원 실수 벡터공간 **R**^{3}을 형성함.

- **i**, **j**, **k** : Standard Basis (표준기저)

9.1 Vectors in 2-Space and 3-Space
(2차 및 3차원 공간에서의 벡터)

PROBLEM SET 9.1

HW: 34, 38 (d), (e)

9.2 Inner Product (Dot Product) (내적 (점곱))

▪ **Inner Product of Vectors (벡터의 내적): a•b**

두 벡터의 Inner Product(내적)또는 Dot Product(점곱)는 두 벡터의 길이와 두 벡터가 이루는 사잇각의 코사인 값의 곱.

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \begin{cases} |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\gamma & (\mathbf{a} \neq \mathbf{0},\ \mathbf{b} \neq \mathbf{0}) \\ 0 & (\mathbf{a} = \mathbf{0} \text{ or } \mathbf{b} = \mathbf{0}) \end{cases}$$

• 성분에 의한 내적의 표기

$$\mathbf{a} = [a_1,\ a_2,\ a_3],\ \mathbf{b} = [b_1,\ b_2,\ b_3] \quad \rightarrow \quad \mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

• **a•b**=0 → 벡터 **a**와 벡터 **b**는 Orthogonal(직교)

→ **a**와 **b**는 orthogonal vectors(직교벡터)

• 영벡터는 모든 벡터에 직교

9.2 Inner Product (Dot Product) (내적 (점곱))

- **Orthogonality (직교성)**

영벡터가 아닌 두 벡터 내적이 영이 될 필요충분조건은 두 벡터가 서로 직교하는 것.

- **Length and Angle (길이와 각도)**

- $\mathbf{a} = \mathbf{b} \quad \rightarrow \quad \gamma = 0^\circ \quad \rightarrow \quad \mathbf{a} \bullet \mathbf{a} = |\mathbf{a}||\mathbf{a}|\cos 0^\circ = |\mathbf{a}|^2 \quad \rightarrow \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \bullet \mathbf{a}}$
- $\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\gamma \quad \rightarrow \quad \cos\gamma = \dfrac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \dfrac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}}{\sqrt{\mathbf{a} \bullet \mathbf{a}}\sqrt{\mathbf{b} \bullet \mathbf{b}}}$

Ex. 1 Find the inner product and the lengths of **a** = [1, 2, 0], **b** = [3, -2, 1] as well as the angle between these vectors.

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = -1, \ |\mathbf{a}| = \sqrt{5}, \ |\mathbf{b}| = \sqrt{14}, \gamma = 96.865^\circ$$

9.2 Inner Product (Dot Product) (내적 (점곱))

- **내적의 일반적 성질**

임의의 벡터 **a**, **b**, **c**와 스칼라(실수) q_1, q_2에 대하여

1. $[q_1\mathbf{a}+q_2\mathbf{b}]\bullet\mathbf{c}=q_1\mathbf{a}\bullet\mathbf{c}+q_2\mathbf{b}\bullet\mathbf{c}$ Linearity (선형성)
2. $\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}=\mathbf{b}\bullet\mathbf{a}$ Symmetry (대칭성)
3. $\begin{cases}\mathbf{a}\bullet\mathbf{a}\geq 0 & \\ \mathbf{a}\bullet\mathbf{a}=0 & (\mathbf{a}=\mathbf{0})\end{cases}$ Positive-definiteness (양의 성질)
4. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\bullet\mathbf{c}=\mathbf{a}\bullet\mathbf{c}+\mathbf{b}\bullet\mathbf{c}$ Distributivity (분배법칙)
5. $|\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}|\leq|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ **Cauchy-Schwarz inequality**
6. $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|\leq|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|$ **Triangle inequality (삼각부등식)**
7. $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2+|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2=2\left(|\mathbf{a}|^2+|\mathbf{b}|^2\right)$ **Parallelogram equality (평행사변형 등식)**

Example 3, 6

9.2 Inner Product (Dot Product) (내적 (점곱))

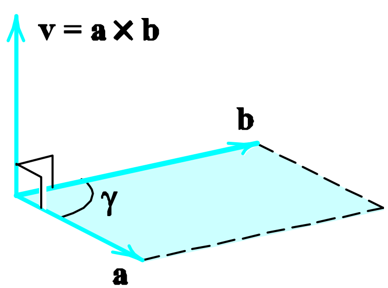
PROBLEM SET 9.2

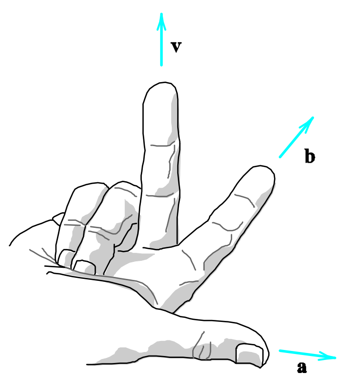
HW: 34, 41, 42 (f)

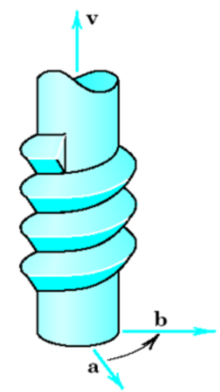
9.3 Vector Product (Cross Product) (외적 (벡터곱))

- **Vector (Cross, Outer) Product of Vectors (벡터의 외적)** $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$
  - $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$가 같은 방향 또는 반대 방향이거나 ,두 벡터 중 하나가 영벡터 : $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}$
  - 그 이외의 경우

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{cases} \text{크기 : } |\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\gamma \\ \text{방향 : 오른손 법칙에 의하여 결정(}\mathbf{a},\mathbf{b}\text{와 동시에 수직인 벡터)} \end{cases}$$







❖ 성분에 의한 외적의 표기

$$\mathbf{a}=[a_1,\ a_2,\ a_3],\ \mathbf{b}=[b_1,\ b_2,\ b_3] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = [a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1]$$

9.3 Vector Product (Cross Product) (외적 (벡터곱))

- **General Properties of Vector Products**

1. $(l\mathbf{a})\times\mathbf{b} = l(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{a}\times(l\mathbf{b})$

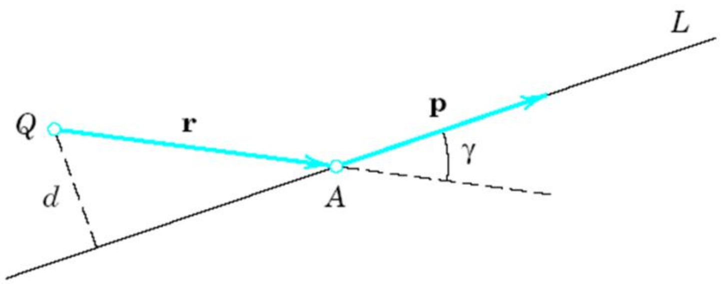
2. $(a)\ \mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b}) + (\mathbf{a}\times\mathbf{c})$
   $(b)\ (\mathbf{a}+\mathbf{b})\times\mathbf{c} = (\mathbf{a}\times\mathbf{c}) + (\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ (분배법칙을 만족) **Prove!**

3. $\mathbf{b}\times\mathbf{a} = -(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ (교환법칙을 만족하지 않고 반교환법칙(Anticommutative)을 만족)

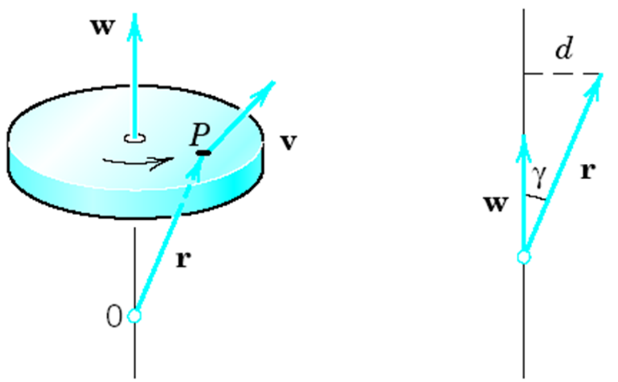
4. $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \neq (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ (결합법칙을 만족하지 않음)

Vector product의 적용: Example 3, 5

9.3 Vector Product (Cross Product) (외적 (벡터곱))



$$m = r \times p$$



$$v = w \times r$$

9.3 Vector Product (Cross Product) (외적 (벡터곱))

- **Scalar Triple Product (스칼라 삼중적)**

세 벡터 $\mathbf{a}=[a_1,\ a_2,\ a_3]$, $\mathbf{b}=[b_1,\ b_2,\ b_3]$, $\mathbf{c}=[c_1,\ c_2,\ c_3]$의 Scalar Triple Product:

$$(\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c})=\mathbf{a}\bullet(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Prove!

- **Properties and Applications of Scalar Triple Products**

- 내적연산과 외적연산을 서로 바꾸어도 불변이다. **Prove!**

$$(\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c})=\mathbf{a}\bullet(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\bullet\mathbf{c}$$

- Geometric Interpretation

절대값 $|(\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c})|$는 벡터 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$에 의하여 결정되는 평행육면체의 체적이다. **Prove!**

- Linear Independence

R^3공간상의 세 벡터가 일차독립일 필요충분조건은
이 벡터들의 스칼라 삼중적이 영이 아닌것이다.

9.3 Vector Product (Cross Product) (외적 (벡터곱))

PROBLEM SET 9.3

HW: 24 (13), (15), 38

9.4 Vector and Scalar Functions and Fields. Derivatives (벡터 및 스칼라함수와 장. 도함수)

- 임의의 점 P 에서의 Vector Function(벡터함수): $\mathbf{v} = \mathbf{v}(P) = [v_1(P),\ v_2(P),\ v_3(P)]$
- 임의의 점 P 에서의 Scalar Function(스칼라함수): $f = f(P)$
- 함수의 정의역 (domain of definition) ⇒ 공간내의 영역: 3차원 공간, 곡면, 곡선
- Vector Field (벡터장) ⇒ 주어진 영역에서의 벡터함수: 곡면, 곡선
- Scalar Field (스칼라장) ⇒ 주어진 영역에서의 스칼라함수: 온도장, 기압장
- 벡터함수와 스칼라함수의 기호 표기

$$\mathbf{v}(x,\ y,\ z) = [v_1(x,\ y,\ z),\ v_2(x,\ y,\ z),\ v_3(x,\ y,\ z)]$$
$$f(x,\ y,\ z)$$

9.4 Vector and Scalar Functions and Fields. Derivatives (벡터 및 스칼라함수와 장. 도함수)

Convergence (수렴)

- 벡터열 $\mathbf{a}_{(n)}$은 수렴(Converge)한다:

  무한수열 $\mathbf{a}_{(n)}, n = 1, 2, \cdots$에 대하여 한 벡터 $\mathbf{a}$가 존재하여 $\lim_{n\to\infty}\left|\mathbf{a}_{(n)} - \mathbf{a}\right| = 0$이 성립할때

  극한벡터(Limit Vector): $\mathbf{a} = \lim_{n\to\infty}\mathbf{a}_{(n)}$

- $\lim_{t\to t_0}\mathbf{v}(t) = \mathbf{l}$ (벡터함수 $\mathbf{v}(t)$는 t가 t_0로 접근할 때 극한 $\mathbf{l}$을 갖는다.)

  $\Leftrightarrow$ t_0부근(t_0는 제외되어도 무방함)에서 정의된 실변수 t의 벡터함수 $\mathbf{v}(t)$에 대하여 $\lim_{t\to t_0}\left|\mathbf{v}(t) - \mathbf{l}\right| = 0$이 성립

Continuity (연속성)

- 벡터함수 $\mathbf{v}(t)$는 $t = t_0$에서 연속(Continuous)이다

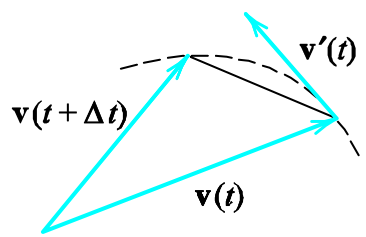
  $\Leftrightarrow$ $\mathbf{v}(t)$가 t_0부근(t_0자신을 포함하여도 무방함)에서 정의되고 $\lim_{t\to t_0}\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(t_0)$을 만족

- $\mathbf{v}(t) = [v_1(t),\ v_2(t),\ v_3(t)]$가 t_0에서 연속 $\Leftrightarrow$ 성분함수 $v_1(t),\ v_2(t),\ v_3(t)$가 t_0에서 연속

9.4 Vector and Scalar Functions and Fields. Derivatives (벡터 및 스칼라함수와 장. 도함수)

- **Derivatives of a Vector Function (벡터함수의 도함수)**

벡터함수 $\mathbf{v}(t)$가 t에서 미분가능(Differentiable) $\Leftrightarrow$ $\mathbf{v}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t}$ 가 수렴



$\mathbf{v}'(t) = [v_1'(t),\ v_2'(t),\ v_3'(t)]$: $\mathbf{v}(t) = [v_1(t),\ v_2(t),\ v_3(t)]$의 도함수

- **벡터미분공식**

1. $(c\mathbf{v})' = c\mathbf{v}'$ (c는 상수)
2. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})' = \mathbf{u}' + \mathbf{v}'$
3. $(\mathbf{u} \bullet \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \bullet \mathbf{v} + \mathbf{u} \bullet \mathbf{v}'$ **Prove!**
4. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})' = \mathbf{u}' \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}'$ **Prove!**
5. $(\mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ \ \mathbf{w})' = (\mathbf{u}'\ \ \mathbf{v}\ \ \mathbf{w}) + (\mathbf{u}\ \ \mathbf{v}'\ \ \mathbf{w}) + (\mathbf{u}\ \ \mathbf{v}\ \ \mathbf{w}')$ **Prove!**

Example 2, 3, 5

9.4 Vector and Scalar Functions and Fields. Derivatives (벡터 및 스칼라함수와 장. 도함수)

- **Partial Derivatives of a Vector Function (벡터함수의 편도함수)**

$$\mathbf{v} = [v_1,\ v_2,\ v_3] = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t_l} = \frac{\partial v_1}{\partial t_l}\mathbf{i} + \frac{\partial v_2}{\partial t_l}\mathbf{j} + \frac{\partial v_3}{\partial t_l}\mathbf{k}, \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t_l \partial t_m} = \frac{\partial^2 v_1}{\partial t_l \partial t_m}\mathbf{i} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial t_l \partial t_m}\mathbf{j} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial t_l \partial t_m}\mathbf{k}$$

9.4 Vector and Scalar Functions and Fields. Derivatives (벡터 및 스칼라함수와 장. 도함수)

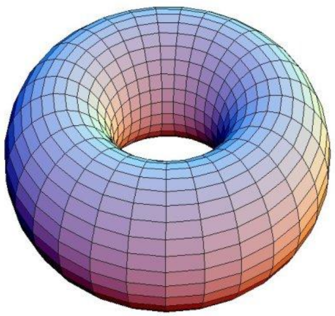
PROBLEM SET 9.4

HW: 24

9.5 Curves. Arc Length. Curvature. Torsion (곡선. 호의 길이. 곡률. 비틀림)

- **Differential Geometry (미분기하학):** 공간곡선이나 곡면을 연구하는 학문.

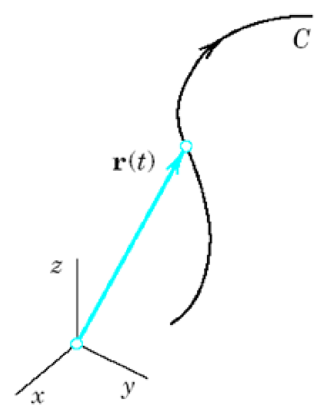
  상대성이론, 항공, 지리학, 측지학, 기존 공학설계 및 컴퓨터를 이용한 설계, 역학 분야 등 물리학이나 기하학에서 중요한 역할을 함.



- **Parametric Representation (매개변수표현법):**

  공간에서 움직이는 물체의 경로인 곡선을 매개변수(t)로 표현:

$$\mathbf{r}(t) = [x(t),\ y(t),\ z(t)] = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$



9.5 Curves. Arc Length. Curvature. Torsion (곡선. 호의 길이. 곡률. 비틀림)

- **Ex. 1** $x^2 + y^2 = 4, \quad z = 0$

  $\mathbf{r}(t) = [2\cos t,\ 2\sin t,\ 0]$ or $\mathbf{r}(t) = [2\cos t,\ 2\sin t]$

  Positive sense (counter clockwise) .VS. Negative sense

- **Ex. 2** $\mathbf{r}(t) = [a\cos t,\ b\sin t,\ 0]$

- **Ex. 4** $\mathbf{r}(t) = [a\cos t,\ b\sin t,\ ct]$

  Circular helix (right or left-handed)

Curves with multiple points

9.5 Curves. Arc Length. Curvature. Torsion (곡선. 호의 길이. 곡률. 비틀림)

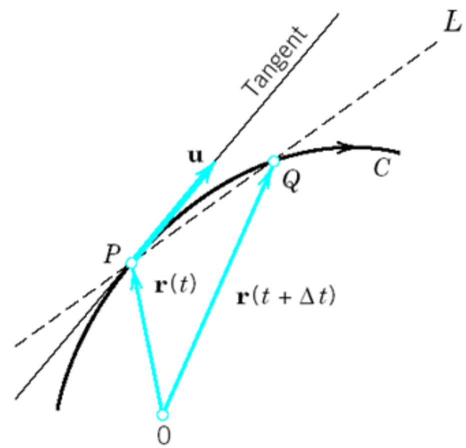
Tangent to a Curve (곡선의 접선)

- 곡선 C위의 한 점 P에서의 **접선(Tangent Line)**

  $\Rightarrow$ 점 P에 근접한곡선 C상의 점 Q에대해 P, Q를 지나는 직선 L의

  $$\mathbf{r}'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\left[\mathbf{r}(t+\Delta t) - \mathbf{r}(t)\right]$$

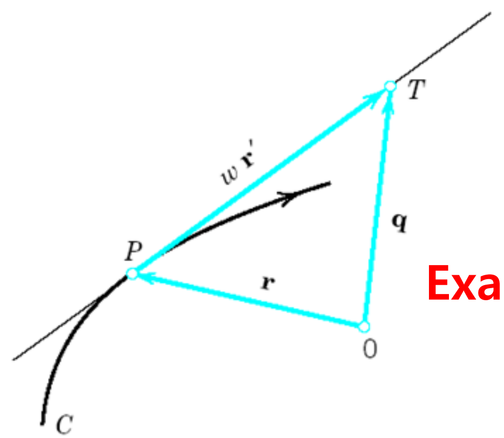
  $\mathbf{r}'(t)$: 공간곡선 상의 임의의 점에서의 접선벡터 (Tangent Vector)



- $\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r}'(t)$: 점 P에서의 곡선 C의 접선 벡터

  $\Rightarrow \quad \mathbf{u} = \dfrac{1}{|\mathbf{r}'|}\mathbf{r}'$: 곡선 C의 단위 접선 벡터

- 점 P에서의 곡선 C의 접선 벡터방정식 : $\mathbf{q}(w) = \mathbf{r} + w\mathbf{r}'$



Example 3 참고

9.5 Curves. Arc Length. Curvature. Torsion (곡선. 호의 길이. 곡률. 비틀림)

- **Ex. 5** Find the tangent to the ellipse

$$\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1 \quad \text{at} \quad P:\left(\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2}\right)$$

점 P에서의 곡선C의 접선 벡터방정식 : $\mathbf{q}(w) = \mathbf{r} + w\mathbf{r}'$

$$\mathbf{r}(t) = [2\cos t,\ \sin t]$$

$$\mathbf{r}'(t) = [-2\sin t,\ \cos t]$$

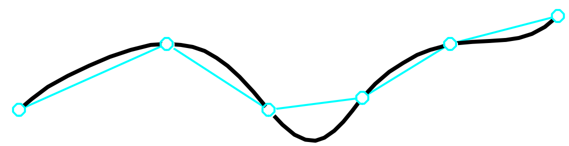
$$t = \pi / 4$$

$$\vec{q}(w) = \left[\sqrt{2}(1-w),\ (1/\sqrt{2})(1+w)\right]$$

9.5 Curves. Arc Length. Curvature. Torsion (곡선. 호의 길이. 곡률. 비틀림)

- **Length of a Curve (곡선의 길이)**

$$C\text{의 길이}: l = \int_a^b \sqrt{\mathbf{r}'\bullet\mathbf{r}'}\,dt \quad \left(\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)$$



- **Arc Length or Arc Length Function (곡선에서의 호의 길이)**

$$\text{호의 길이}: s(t) = \int_a^t \sqrt{\mathbf{r}'\bullet\mathbf{r}'}\,d\tilde{t} \quad \left(\mathbf{r}' = \frac{d\mathbf{r}}{d\tilde{t}}\right)$$

$$* \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\bullet\frac{d\mathbf{r}}{dt} = |\mathbf{r}'(t)|^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad ds^2 = d\mathbf{r}\bullet d\mathbf{r} = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

*ds*를 C의 linear element (선소)라 함.

* 매개변수로서의 호의 길이

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{r}'|}\mathbf{r}' \xrightarrow{\text{변수}\,t\text{ 대신 }s\text{를 사용}} \mathbf{u}(s) = \mathbf{r}'(s): \text{단위접선벡터}$$

Example 6

9.5 Curves. Arc Length. Curvature. Torsion (곡선. 호의 길이. 곡률. 비틀림)

- **Curves in Mechanics, Velocity, Acceleration**
  - $\mathbf{r}(t)$: 움직이는 물체의 경로 C
  - $\mathbf{v}(t)=\mathbf{r}'(t)$: 곡선 C의 접선벡터인 속도벡터(Velocity Vector)
  - $\mathbf{a}(t)=\mathbf{v}'(t)=\mathbf{r}''(t)$: 속도의 도함수인 가속도벡터(Acceleration)
- **Tangent and Normal Acceleration (접선가속도와 법선가속도)** $\mathbf{a}=\mathbf{a}_{\tan}+\mathbf{a}_{\text{norm}}$
  - Tangential Acceleration Vector (접선가속도 벡터): 경로와 접선방향 $\mathbf{a}_{\tan}$
  - Normal Acceleration Vector (법선가속도 벡터): 경로와 수직방향 $\mathbf{a}_{\text{norm}}$

$$* \ \mathbf{v}(t)=\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\frac{d\mathbf{r}}{ds}\frac{ds}{dt}=\mathbf{u}(s)\frac{ds}{dt}, \quad \mathbf{a}(t)=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\mathbf{u}(s)\frac{ds}{dt}\right)=\frac{d\mathbf{u}}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\mathbf{u}(s)\frac{d^2s}{dt^2}$$

9.4 Example 4

$\dfrac{d\mathbf{u}}{ds}$는 $\mathbf{u}(s)$에 수직 $\Rightarrow$ $\dfrac{d\mathbf{u}}{ds}\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2$: 법선가속도벡터, $\mathbf{u}(s)\dfrac{d^2s}{dt^2}$: 접선가속도벡터

$$* \ \mathbf{a}_{\tan}=\frac{\mathbf{a}\bullet\mathbf{v}}{\mathbf{v}\bullet\mathbf{v}}\mathbf{v}, \quad \mathbf{a}_{\text{norm}}=\mathbf{a}-\mathbf{a}_{\tan}$$

Example 7

9.5 Curves. Arc Length. Curvature. Torsion (곡선. 호의 길이. 곡률. 비틀림)

- **Curvature and Torsion (곡선의 곡률과 비틀림)**

- $\mathbf{r}(s)$로 표현되는 곡선 C의 P점에서의 **곡률**(Curvature) $\kappa(s)$

  : P점에서의 단위접선벡터 $\mathbf{u}(s)$의 변화율

$$\kappa(s) = |\mathbf{u}'(s)| = |\mathbf{r}''(s)| \quad \left(' = d/ds\right)$$

- C상의 P점에서의 **비틀림**(Torsion) $\tau(\mathrm{s})$

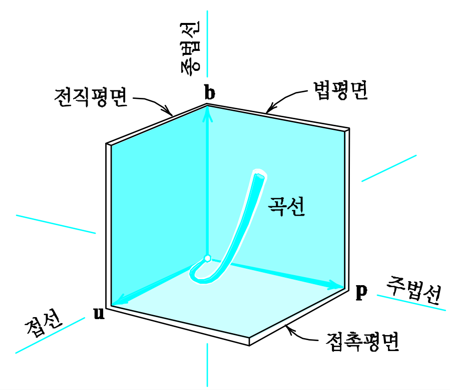
  : 접촉평면(Osculating Plane)(벡터 $\mathbf{u}$와 $\mathbf{u}'$에 의해 구성된 평면)의 C상의 P점에서의 변화율

  P점에서 곡선 C가 평면에서의 이탈정도

$$|\tau(\mathrm{s})| = |\mathbf{b}'(s)|, \quad \tau(\mathrm{s}) = -\mathbf{p}(s) \bullet \mathbf{b}'(s)$$

$\mathbf{p} = \left(1/\kappa\right)\mathbf{u}'$: 단위주법선벡터(Unit Principal Normal Vector)

$\mathbf{b} = \mathbf{u} \times \left(1/\kappa\right)\mathbf{u}' = \mathbf{u} \times \mathbf{p}\mathbf{b}'$: 단위종법선벡터(Unit Binormal Vector)



9.5 Curves. Arc Length. Curvature. Torsion (곡선. 호의 길이. 곡률. 비틀림)

PROBLEM SET 9.5

HW: 15, 30, 35

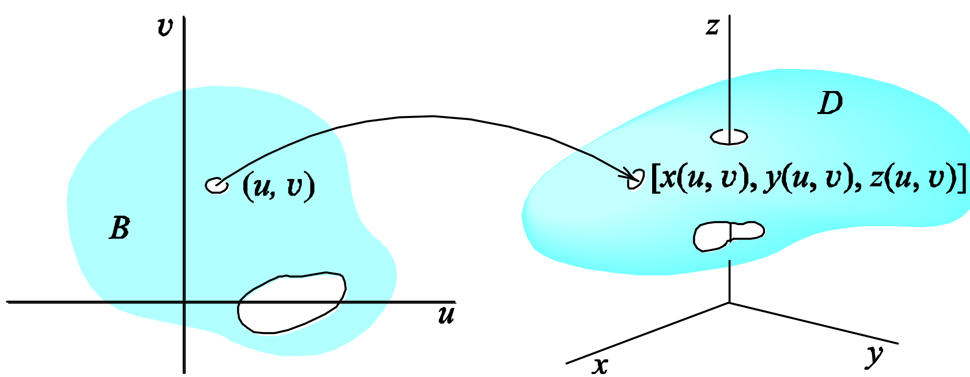
9.6 Calculus Review: Functions of Several Variables. (미적분학의 복습: 다변수함수)

- **Chain rules (연쇄법칙)**

$$w = f\left(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}, \quad \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$

Independent .VS. Dependent .VS. Intermediate variables



Example 1

Problem Set 7

9.6 Calculus Review: Functions of Several Variables. (미적분학의 복습: 다변수함수)

- **Mean Value Theorem (평균값의 정리)**

함수 $f(x,y,z)$가 xyz공간 내의 정의역 D에서 연속이고, 연속인 1차 편도함수를갖는다.

두 점 $P_0 : (x_0, y_0, z_0)$, $P : (x_0+h, y_0+k, z_0+l)$이 D에 속해 있고, 이 두 점을 연결한 선분 P_0P 또한 D에 속해 있다. 그러면 선분 P_0P 상에 임의의 점에서 편미분값들은

$$f(x_0+h, y_0+k, z_0+l) - f(x_0, y_0, z_0) = h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} + l\frac{\partial f}{\partial z}$$

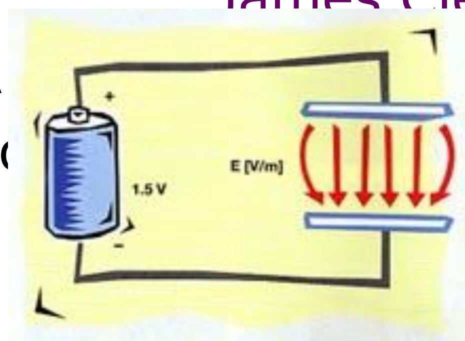
을 만족한다.

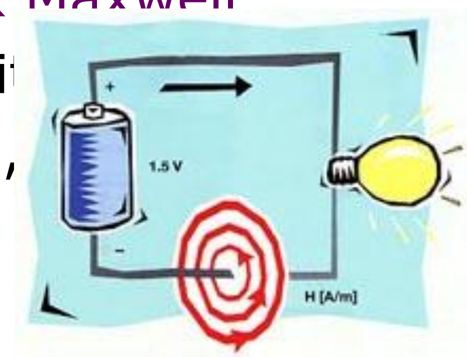
9.7 Gradients of a Scalar Field. Directional Derivative. (스칼라장의 기울기. 방향도함수)

James Clerk Maxwell

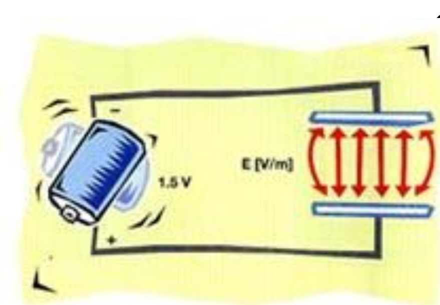
“A ... trici... ”,

2 vols., Oxf... ess, ...rd ed., 1904





∂t



$\dfrac{\partial D}{\partial t}$

$$\nabla \cdot B = 0$$

9.7 Gradients of a Scalar Field. Directional Derivative. (스칼라장의 기울기. 방향도함수)

- **Gradient (기울기):**

$f(x, y, z)$의 x, y, z 각 방향으로의 길이(거리)에 대한 변화율(기울기)의 벡터합

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right] = \frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

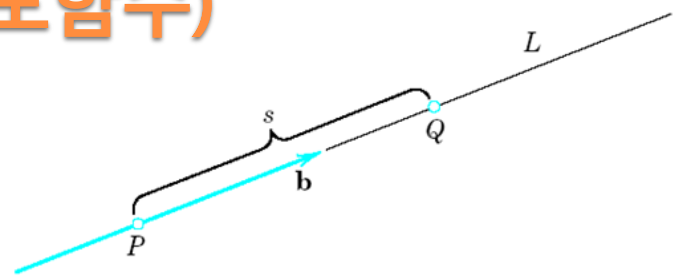
Example: $f(x, y, z) = 2y^3 + 4xz + 3x$

9.7 Gradients of a Scalar Field. Directional Derivative. (스칼라장의 기울기. 방향도함수)

- **Gradient (기울기):**

- Rate of change of $f(x, y, z)$ in any direction in space
- Direction of maximum increase
- Surface normal vector
- Deriving vector fields from scalar fields

9.7 Gradients of a Scalar Field. Directional Derivative. (스칼라장의 기울기. 방향도함수)



- **Directional derivative (방향도함수)**

$$D_{\mathbf{b}} f = \frac{df}{ds} = \lim_{s\to 0}\frac{f(Q)-f(P)}{s}$$

: 공간상의 P점에서의 벡터 $\mathbf{b}$방향으로의 함수 $f(x,y,z)$의 방향도함수

s는 P와 Q사이의 거리, Q는 $\mathbf{b}$방향으로의 직선 C의 경로

직선 L : $\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k} = \mathbf{p}_0 + s\mathbf{b}$ $\quad (|\mathbf{b}| = 1,\ \mathbf{p}_0$는 P의 위치$)$

$$D_{\mathbf{b}} f = \frac{df}{ds} = \frac{df}{dx}x' + \frac{df}{dy}y' + \frac{df}{dz}z' = \mathbf{b} \bullet \operatorname{grad} f$$

$$* \ D_{\mathbf{a}} f = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a} \bullet \operatorname{grad} f$$

- **Ex. 1** $f(x,y,z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2$ at P : (2,1,3) in the direction of a = [1,0,-2]

$$D_{\mathbf{a}} f = \frac{1}{\sqrt{5}}[1,0,-2] \bullet [8,6,6] = -1.789$$

9.7 Gradients of a Scalar Field. Directional Derivative. (스칼라장의 기울기. 방향도함수)

- **Vector Character of Gradient. Maximum Increase**

$f(P)=f(x,y,z)$: 연속인 1계 편도함수를 갖는 스칼라함수

$\Rightarrow$ $\text{grad } f$ 가 존재. 크기와 방향은 공간에서 좌표계의 선택과는 무관

점 P에서 $\text{grad } f(P)\neq 0$ $\Rightarrow$ $\text{grad } f$ 가 점 P에서 f의 최대증가 방향

$$* \ D_{\mathbf{a}} f = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a}\bullet \text{grad } f$$

- **Gradient as Surface Normal Vector**

$f(x,y,z)=c=$상수 $\Rightarrow$ 공간상에서 임의의 곡면 S를 표시

S상의 점 P에서 $\text{grad } f(P)\neq 0$ $\Rightarrow$ $\text{grad } f$ 가 점 P에서의 S의 법선벡터

9.7 Gradients of a Scalar Field. Directional Derivative. (스칼라장의 기울기. 방향도함수)

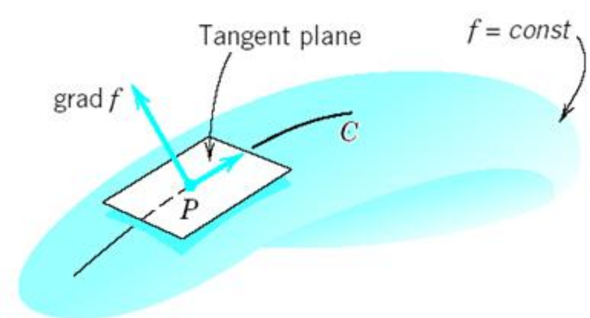
● 곡면의 법선벡터로서의 기울기

- f 의 **등위곡면**(Level Surface) : $f\big(x(t), y(t), z(t)\big) = c =$ 상수로 표현된 곡면 S
- 점 P에서 S의 **접평면**(Tandgent Plane):
  S상의 임의의 점 P에서 P를 지나는 모든 곡선의 접선벡터들
- P에서 S의 곡면법선(Surface Normal) : P에서 S의 접평면에 수직인 직선
- 곡면의 법선벡터 (Surface Normal Vector): 곡면법선과 평행한 벡터

$$\frac{df}{dx}x' + \frac{df}{dy}y' + \frac{df}{dz}z' = \text{grad } f \bullet \mathbf{r}' = 0$$

$\Rightarrow$ grad f 는 접평면상의 모든 벡터와 수직이며,

P에서 곡면 S의 법선벡터이다.



Example 2

9.7 Gradients of a Scalar Field. Directional Derivative. (스칼라장의 기울기. 방향도함수)

- **Vector Fields That Are Gradients of Scalar Fields (Potentials) (스칼라장의 기울기인 벡터장 (퍼텐셜)**

$f(P)$를 $\mathbf{v}(P)$의 퍼텐셜함수(Potential) : $\mathbf{v}(P) = \text{grad } f(P)$

$\mathbf{v}(P)$와 이에 해당되는 벡터장을 **보전적**(Conservative)이라 한다.

- **Gravitational Field. Laplace's Equation (인력장. 라플라스 방정식)**

점 $P_0 : (x_0, y_0, z_0)$와 , $P : (x, y, z)$에 위치한 두 입자 사이의 인력은
(Newton의 만유인력법칙에 의하여)

$$\mathbf{p} = -\frac{c}{r^3}\mathbf{r} = -c\left[\frac{x - x_0}{r^3}, \frac{y - y_0}{r^3}, \frac{z - z_0}{r^3}\right]$$

로 표현되며, 퍼텐셜은 $f(x, y, z) = c/r$ 이다. 여기서 $r(>0)$은 두 점 P_0와 P 사이의 거리이다.

따라서 $\mathbf{p} = \text{grad } f = \text{grad}(c/r)$ 이 성립되며, 여기서 퍼텐셜 f 는 다음과 같은 라플라스 방정식을 만족한다.

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

Prove!

9.7 Gradients of a Scalar Field. Directional Derivative. (스칼라장의 기울기. 방향도함수)

PROBLEM SET 9.7

HW: 26, 42

9.8 Divergence of a Vector Field (벡터장의 발산)

- Divergence (발산):

- Source and sink
- Deriving scalar fields from vector fields

9.8 Divergence of a Vector Field (벡터장의 발산)

- **Divergence (발산)**

  $\mathbf{v}(x, y, z)$: 미분가능한 벡터함수

  $\mathbf{v}$의 발산(Divergenc e) 또는 $\mathbf{v}$로 정의된 벡터장의 발산 : $\operatorname{div} \mathbf{v} = \dfrac{\partial v_1}{\partial x} + \dfrac{\partial v_2}{\partial y} + \dfrac{\partial v_3}{\partial z}$

- **Invariance of the Divergence (발산의 불변성)**

  $\operatorname{div} \mathbf{v}$ 의 값은 좌표계의 선택에 상관없이 공간내의 $\mathbf{v}$ 상의 점에 따른다.

  $x^*,\ y^*,\ z^*$에 대응하는 $\mathbf{v}$ 의 성분이 $v_1^*,\ v_2^*, v_3^*$이면 $\operatorname{div} \mathbf{v} = \dfrac{\partial v_1^*}{\partial x^*} + \dfrac{\partial v_2^*}{\partial y^*} + \dfrac{\partial v_3^*}{\partial z^*}$

- $f(x, y, z)$: 두 번 미분가능한 스칼라함수

  $\mathbf{v} = \operatorname{grad} f = \left[\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}\right] \Rightarrow \operatorname{div}(\mathbf{v}) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \nabla^2 f$ **Laplacian**

Example 2

Description of the Ideal MHD Model

- **Ideal MHD model**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} = 0$$

Mass continuity equation

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{J} \times \vec{B} - \nabla p$$

Single-fluid equation of motion

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\rho^{\gamma}}\right) = 0$$

Energy equation (equation of state): adiabatic evolution

$$\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} = 0$$

Ohm's law: perfect conductor → "ideal" MHD

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Maxwell equations

9.8 Divergence of a Vector Field
(벡터장의 발산)

PROBLEM SET 9.8

HW: 8, 10, 17

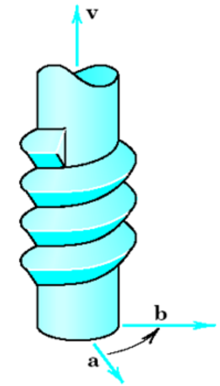
9.9 Curl of a Vector Field (벡터장의 회전)

- Curl (회전):

- Rotation

- Deriving vector fields from vector fields

9.9 Curl of a Vector Field
(벡터장의 회전)



- **Curl (회전)**

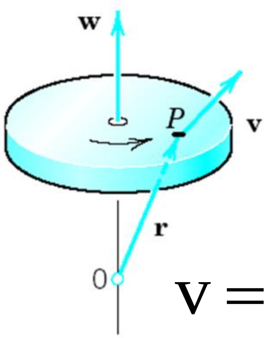
$\mathbf{v}(x, y, z)$: 미분가능한 벡터함수

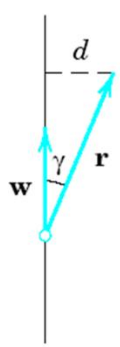
v의 **회전**(Curl) 즉, **v**로 주어진 벡터장의 회전

$$:\ \operatorname{curl}\mathbf{v} = \nabla\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

- **Rotating Body and Curl (회전체와 회전)**

강체 회전에 대한 벡터장의 회전은 회전축 방향과
같은 방향을 가지며, 그 크기는 각속력의 두 배가 된다.





$$\mathbf{v} = \mathbf{w}\times\mathbf{r}$$

Prove!

9.9 Curl of a Vector Field (벡터장의 회전)

- **Grad, Div, Curl**
  - 기울기장(Gradient Field)은 비회전(Irrotational)이다. 즉, $\operatorname{curl}(\operatorname{grad} f) = \mathbf{0}$ **Prove!**
  - 벡터함수의 회전에 대한 발산도 영벡터가 된다. $\operatorname{div}(\operatorname{curl} \mathbf{v}) = 0$ **Prove!**

- **Invariance of the Curl (회전의 불변성)**

$\operatorname{curl} \mathbf{v}$는 벡터이며 방향과 크기는 공간에서 직교좌표계의 선택과 무관하다.

9.9 Curl of a Vector Field (벡터장의 회전)

PROBLEM SET 9.9

HW: 10, 20

Gradient, Divergence, Curl of a Vector Field

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

Faraday's law

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$$

Ampere's law

$$\nabla \cdot D = \rho$$

Gauss's law

$$\nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla V = -E$$