Engineering Mathematics II

Prof. Dr. Yong-Su Na
(32-206, Tel. 880-7204)

Text book: Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 9th Edition, Wiley (2006)

Ch. 12 Partial Differential Equations (PDEs)

Ch. 12 Partial Differential Equations (PDEs)

- 함수가 하나의 변수 밖에 포함하지 않는 미분 방정식을 상미분 방정식이라 함. 2개 이상의 독립변수를 갖는 함수의 편도함수를 포함하는 방정식을 편미분 방정식이라 함.

- 단순한 물리시스템만이 상미분방정식에 의해 모델화될 수 있는 반면에 동역학, 탄성역학, 열전달, 전자기 이론, 양자역학, 원자력공학, 플라즈마 물리 및 핵융합 등에서 대부분의 문제들이 편미분방정식을 필요로 함.

- 내용: 진동하는 현의 파동방정식, 진동하는 박막의 파동방정식,
  열전도방정식, 라플라스 방정식

12.1 Basic Concepts (기본개념)

- **Partial Differential Equation, PDE (편미분방정식):**
  두 개 이상의 독립변수들에 종속되는 함수의 한 개 또는 그 이상의 편도함수를 포함하는 방정식

- **계수 (Order):** 가장 높은 도함수의 계수

편미분방정식 (PDEs)

- 선형 (Linear):
  미지함수와 그것의 편도함수에 대하여 1차임
  - 제차 (Homogeneous):
    미지함수와 그것의 편도함수만을 포함
  - 비제차 (Nonhomogeneous):
    제차가 아닌 선형편미분방정식
- 비선형 (Nonlinear):
  선형이 아닌 편미분방정식

12.1 Basic Concepts (기본개념)

- **Ex.1 Important Second-Order PDEs**

(1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ (1차원 파동방정식)

(2) $$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ (1차원 열전도방정식)

(3) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ (2차원 라플라스 방정식)

(4) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$ (2차원 푸아송 방정식)

(5) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$ (2차원 파동방정식)

(6) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$ (3차원 라플라스 방정식)

12.1 Basic Concepts (기본개념)

- **Solution:** 편미분방정식에 나타나는 모든 편도함수를 갖고 있는 함수로서
  모든 점에서 주어진 방정식을 만족하는 함수

  - Ex. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$의 해들 : $u=x^2-y^2,\ u=e^x\cos y,\ u=\sin x\cosh y,\ u=\ln\left(x^2+y^2\right)$

  - 일반적으로 편미분 방정식의 해의 전체 집합은 광범위함.

  - 편미분방정식은 물리적인 조건을 나타내는 추가적인 정보를 사용함으로써
    유일해를 구하게 됨.

- **Additional Conditions (추가적인 조건)**

  - Boundary Conditions (경계조건), Initial Conditions (초기조건)

12.1 Basic Concepts (기본개념)

- **Fundamental Theorem on Superposition (중첩에 관한 기본정리)**

  u_1과 u_2가 어떤 영역 R에서 제차 선형 편미분방정식의해라면

  $$u = c_1u_1 + c_2u_2$$

  도 역시 같은 영역R에서 그 편미분방정식의해가 된다. c_1, c_2는 임의의 상수이다.

■ **Ex. 2 Solving $u_{xx} - u = 0$ Like an ODE.**

12.1 Basic Concepts (기본개념)

- **Fundamental Theorem on Superposition (중첩에 관한 기본정리)**

  u_1과 u_2가 어떤 영역 R에서 제차 선형 편미분방정식의해라면

  $$u = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

  도 역시 같은 영역R에서 그 편미분방정식의해가 된다. c_1, c_2는 임의의 상수이다.

■ **Ex. 2 Solving $u_{xx} - u = 0$ Like an ODE.**

$u = u(x, y)$에서 y를 상수로 취급.

즉, $u = u(x) \quad \Rightarrow \quad u'' - u = 0 \quad \Rightarrow \quad u = Ae^{x} + Be^{-x}$

$\therefore\ u = u(x, y) = A(y)e^{x} + B(y)e^{-x}$

12.1 Basic Concepts (기본개념)

- Ex. 4 Solving $u_{xy} = -u_x$ Like an ODE

12.1 Basic Concepts (기본개념)

- Ex. 4 Solving $u_{xy} = -u_x$ Like an ODE

$u_x = p$라 하자.

$$p_y = -p \quad \Rightarrow \quad \frac{p_y}{p} = -1 \quad \Rightarrow \quad \ln p = -y + \tilde{c}(x) \quad \Rightarrow \quad p = c(x)e^{-y}$$

$$u(x, y) = f(x)e^{-y} + g(y), \qquad f(x) = \int c(x)dx$$

12.1 Basic Concepts (기본개념)

PROBLEM SET 12.1

HW: 26

12.2 Modeling: Vibrating String, Wave Equation (모델화: 진동하는 현, 파동방정식)

- **바이올린 현과 같은 탄성현에서 현의 미소 횡진동을 모델화한 방정식 유도**

가정 : * 현을 x축 상에 놓고, 길이 L만큼 늘이고 양끝을 $x=0$과 $x=L$로 고정.

* $t=0$에서 현을 잡아당긴 후 놓음으로써 진동 시작.

문제 : 현의 진동을 결정하는 것.(임의의 시점 $t>0$, 임의의 점 x에서 현의 변위를 구하는 것)

- **Physical Assumptions**

1. 단위길이당 현의 질량은 일정하다.
   현은 완전탄성체이며 휠 때 어떠한 저항도 나타내지 않는다.
2. 현의 양 끝을 고정시키기 전에 현을 잡아당긴 장력이 매우 커서
   현에 작용하는 중력은 무시할 수 있다.
3. 현의 운동은 수직평면 내에서 미소횡진동이다.
   즉 현의 모든 입자는 정확하게 수직으로 움직이고,
   따라서 현의 모든 점에서 변위와 기울기의 절대값은 항상 작다.

12.2 Modeling: Vibrating String, Wave Equation (모델화: 진동하는 현, 파동방정식)

- 수평방향의 힘의 합력

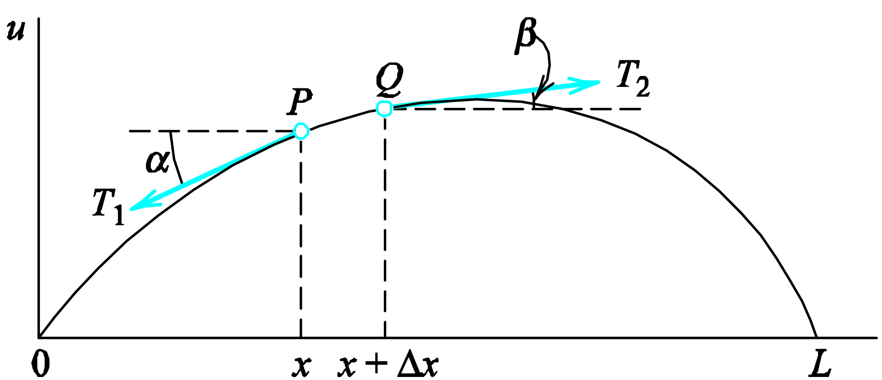
$$-T_1 \cos\alpha + T_2 \cos\beta = 0$$

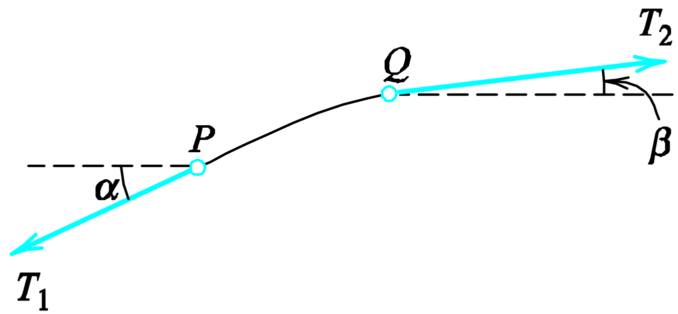
$$\Rightarrow \therefore\ T_1 \cos\alpha = T_2 \cos\beta = T(\text{상수})$$

- 수직방향의 힘의 합력
  - Newton의 제2법칙 적용

$$-T_1 \sin\alpha + T_2 \sin\beta = \rho \Delta x\, u_{tt}$$

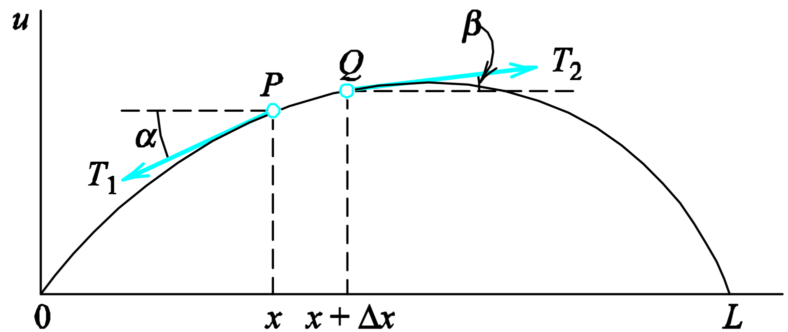
$$\Rightarrow \frac{T_2 \sin\beta}{T_2 \cos\beta} - \frac{T_1 \sin\alpha}{T_1 \cos\alpha} = \frac{\rho}{T} \Delta x\, u_{tt} \Rightarrow \tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho}{T} \Delta x\, u_{tt}$$

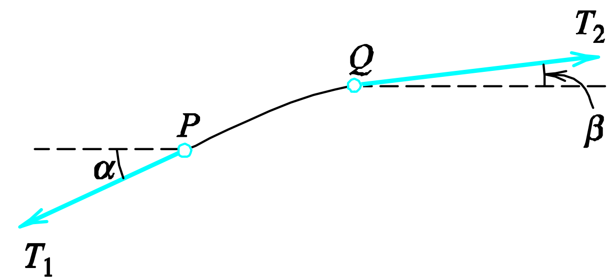




12.2 Modeling: Vibrating String, Wave Equation (모델화: 진동하는 현, 파동방정식)

- 정리





$$\Rightarrow \frac{T_2 \sin\beta}{T_2 \cos\beta} - \frac{T_1 \sin\alpha}{T_1 \cos\alpha} = \frac{\rho}{T} \Delta x \, u_{tt} \quad \Rightarrow \quad \tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho}{T} \Delta x \, u_{tt}$$

$\tan\alpha$: 점 x에서의 현의 기울기 $\Rightarrow$ $\tan\alpha = \left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x}$

$\tan\beta$: 점 $x+\Delta x$에서의 현의 기울기 $\Rightarrow$ $\tan\beta = \left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x+\Delta x}$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x+\Delta x} - \left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right|_{x} \right] = \frac{\rho}{T} u_{tt} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \text{(1차원 파동방정식)}, \; c^2 = \frac{T}{\rho}$$

12.3 Solution by Separating Variables. Use of Fourier Series (변수 분리에 의한 해. 푸리에급수의 사용)

- **Solution of the One-Dimensional Wave Equation**

- **1차원 파동방정식:** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$
- **Boundary Condition:** $u(0,t) = u(L,t) = 0$ (모든 t에 대하여)
- **Initial Condition:** $u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x) \quad (0 \le x \le L)$

- **문제해결 방법**

- **Method of Separating Variables:**

$u(x,t) = F(x)G(t)$ 로 두면 두 개의 상미분방정식을 얻는다.
- 경계조건을 만족하는 상미분방정식의 해를 구한다.
- 푸리에 급수를 이용하여 해를 구한다.

12.3 Solution by Separating Variables. Use of Fourier Series (변수 분리에 의한 해. 푸리에급수의 사용)

- **1단계: 파동방정식으로부터 두 개의 상미분방정식의 유도**

$$u(x,t) = F(x)G(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F(x)\ddot{G}(t), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''(x)G(t)$$

$$\therefore\ F(x)\ddot{G}(t) = c^2 F''(x)G(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\ddot{G}(t)}{c^2 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} = k$$

❖ 좌변은 t 만의 함수이고, 우변은 x 만의 함수이므로 양변은 상수가 되어야 한다.

$$\therefore\ F''(x) - kF(x) = 0, \quad \ddot{G}(t) - c^2 kG(t) = 0$$

12.3 Solution by Separating Variables. Use of Fourier Series (변수 분리에 의한 해. 푸리에급수의 사용)

- **2단계: 경계조건의 만족**

경계조건 $u(0,t)=F(0)G(t)=0, \quad u(L,t)=F(L)G(t)=0$을 적용

$$\Rightarrow \quad F(0)=F(L)=0$$

$$\therefore\ F''(x)-kF(x)=0, \quad F(0)=F(L)=0$$

$$\boxed{F''(x)-kF(x)=0, \quad \ddot{G}(t)-c^2kG(t)=0}$$

Case 1 $\quad k=p^2>0$

$$F''(x)-p^2F(x)=0 \quad \Rightarrow \quad F(x)=Ae^{px}+Be^{-px}$$

$$F(0)=A+B=0 \quad \Rightarrow \quad B=-A$$

$$F(L)=Ae^{pL}+Be^{-pL}=0 \quad \Rightarrow \quad A\left(e^{2pL}-1\right)=0 \quad \Rightarrow \quad A=0\left(e^{2pL}\neq 1\right), \quad B=0$$

$$\therefore\ F=0 \quad \Rightarrow \quad u\equiv 0(\text{무의미한 해})$$

Case 2 $\quad k=0$

$$F''(x)=0 \quad \Rightarrow \quad F(x)=Ax+B$$

$$F(0)=B=0, \quad F(L)=AL+B=0 \quad \Rightarrow \quad A=0(L\neq 0)$$

$$\therefore\ F=0 \quad \Rightarrow \quad u\equiv 0(\text{무의미한 해})$$

12.3 Solution by Separating Variables. Use of Fourier Series (변수 분리에 의한 해. 푸리에급수의 사용)

Case 3 $k = -p^2 < 0$

$$F''(x) + p^2 F(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad F(x) = A\cos px + B\sin px$$

$$F(0) = A = 0, \;\; F(L) = A\cos pL + B\sin pL = 0 \quad \Rightarrow \quad B\sin pL = 0$$

$B = 0 \quad \Rightarrow \quad F = 0 \quad \Rightarrow \quad u \equiv 0$(무의미한 해)

$\sin pL = 0 \quad \Rightarrow \quad p = \dfrac{n\pi}{L}$($n$: 정수)

$$\therefore \; F(x) = F_n(x) = \sin\frac{n\pi}{L}x \;\; (n = 1, \; 2, \; 3, \; \cdots)$$

$$\boxed{F''(x) - kF(x) = 0, \quad \ddot{G}(t) - c^2 kG(t) = 0}$$

$$\ddot{G}(t) + \lambda_n{}^2 G(t) = 0, \quad \lambda_n = cp = \frac{cn\pi}{L} \quad \Rightarrow \quad G_n(t) = B_n \cos\lambda_n t + B_n * \sin\lambda_n t$$

$$u_n(x,t) = (B_n \cos\lambda_n t + B_n * \sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi}{L}x \quad (n = 1, \; 2, \; 3, \; \cdots)$$

12.3 Solution by Separating Variables. Use of Fourier Series (변수 분리에 의한 해. 푸리에급수의 사용)

$$u_n(x,t) = (B_n \cos \lambda_n t + B_n^* \sin \lambda_n t)\sin \frac{n\pi}{L}x \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

- **Discussion of Eigenfunctions**

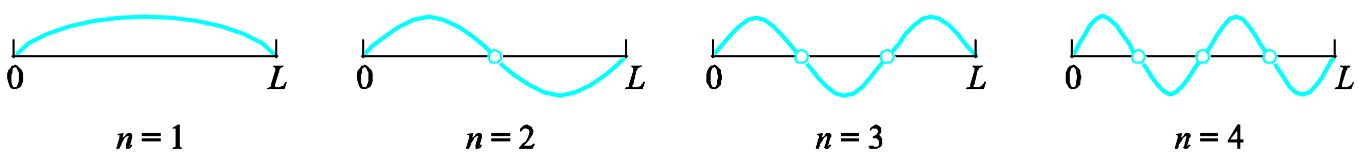
- **Eigenfunction or Characteristic Function:** $u_n(x,t)$
- **Eigenvalue or Characteristic Value:** $\lambda_n = \dfrac{cn\pi}{L}$
- **Spectrum:** $\{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots\}$
- u_n : n차 정규진동 (nth Normal Mode)

*T, ρ, L*과

진동수의 관계

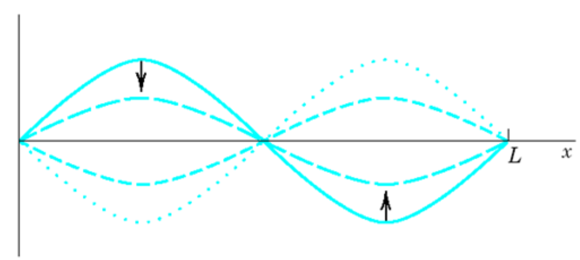
단위시간당 진동수 $\dfrac{\lambda_n}{2\pi} = \dfrac{cn}{2L}$을 갖는 조화운동 (Harmonic Motion)

$$c^2 = \frac{T}{\rho}$$



- **Node (마디점)**: 현에서의 움직이지 않는 점

$$\sin \frac{n\pi x}{L} = 0 \quad \text{단,}\ x = \frac{L}{n},\ \frac{2L}{n},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n}L$$



12.3 Solution by Separating Variables. Use of Fourier Series (변수 분리에 의한 해. 푸리에급수의 사용)

- **3단계: 전체 문제에 대한 해. 푸리에 급수** $\boxed{u(x,0)=f(x),\quad u_t(x,0)=g(x)\qquad (0\le x\le L)}$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n\cos\lambda_n t+B_n*\sin\lambda_n t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x$$

초기조건(주어진 초기변위)의충족 : $u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{L}x=f(x)$

푸리에 사인 급수 적용 $\Rightarrow$ $B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx$

초기조건(주어진 초기속도)의충족 :

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(-B_n\lambda_n\sin\lambda_n t+B_n*\lambda_n\cos\lambda_n t\right)\sin\frac{n\pi}{L}x\right]_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}B_n*\lambda_n\sin\frac{n\pi}{L}x=g(x)$$

푸리에 사인 급수 적용 $\Rightarrow$ $B_n*\lambda_n=\frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx$ $\Rightarrow$ $B_n*=\frac{2}{cn\pi}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}xdx$

12.3 Solution by Separating Variables. Use of Fourier Series (변수 분리에 의한 해. 푸리에급수의 사용)

- **확립된 해**

$$\boxed{u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(B_n\cos\lambda_n t+B_n*\sin\lambda_n t)\sin\frac{n\pi}{L}x}$$

초기속도 $g(x)$가 0인 경우 고려

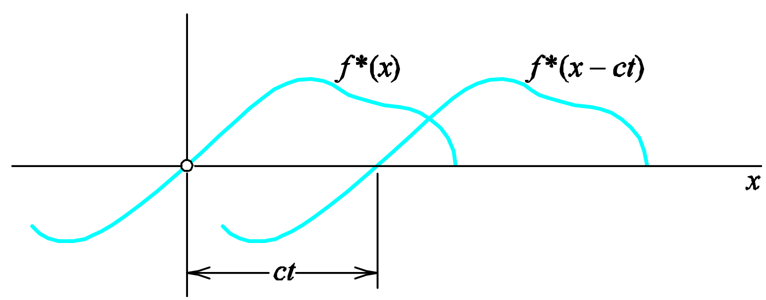
$$g(x)=0 \quad\Rightarrow\quad B_n*=0$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cos\lambda_n t\sin\frac{n\pi}{L}x\,,\qquad \lambda_n=\frac{cn\pi}{L}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}B_n\left[\sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x-ct)\right\}+\sin\left\{\frac{n\pi}{L}(x+ct)\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[f*(x-ct)+f*(x+ct)]$$

f*: odd periodic extension of f with the period $2L$



12.3 Solution by Separating Variables. Use of Fourier Series (변수 분리에 의한 해. 푸리에급수의 사용)

- Ex. 1 Find the solution of the wave equation corresponding to the triangular initial deflection

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2k}{L}x & \left(0<x<\frac{L}{2}\right)\\ \frac{2k}{L}(L-x) & \left(\frac{L}{2}<x<L\right)\end{cases}$$

and initial velocity zero.

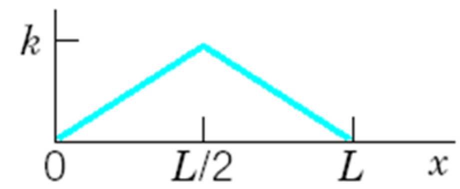
$$u(x,t)=\frac{8k}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi}{L}x\cos\frac{\pi c}{L}t-\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi}{L}x\cos\frac{3\pi c}{L}t+\cdots\right]$$

Section 11.3 Ex. 4 이용

11.3 Even and Odd Functions. Half-Range Expansions (우함수와 기함수. 반구간 전개)

■ **Ex. 4 "Triangle" and Its Half-Range Expansions**

Find the two half-range expansions of the function

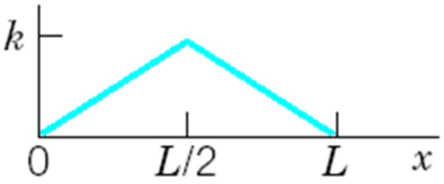


$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2k}{L}x & \left(0<x<\dfrac{L}{2}\right) \\ \dfrac{2k}{L}(L-x) & \left(\dfrac{L}{2}<x<L\right) \end{cases}$$

11.3 Even and Odd Functions. Half-Range Expansions (우함수와 기함수. 반구간 전개)

■ **Ex. 4 "Triangle" and Its Half-Range Expansions**

Find the two half-range expansions of the function



$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2k}{L}x & \left(0<x<\dfrac{L}{2}\right) \\ \dfrac{2k}{L}(L-x) & \left(\dfrac{L}{2}<x<L\right) \end{cases}$$

1. 주기적 우함수로 확장.

$$a_0=\frac{1}{L}\left[\frac{2k}{L}\int_0^{L/2} x\,dx+\frac{2k}{L}\int_{L/2}^{L}(L-x)dx\right]=\frac{k}{2}$$

$$a_n=\frac{2}{L}\left[\frac{2k}{L}\int_0^{L/2} x\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx+\frac{2k}{L}\int_{L/2}^{L}(L-x)\cos\frac{n\pi}{L}x\,dx\right]=\frac{4k}{n^2\pi^2}\left(2\cos\frac{n\pi}{L}-\cos n\pi-1\right)$$

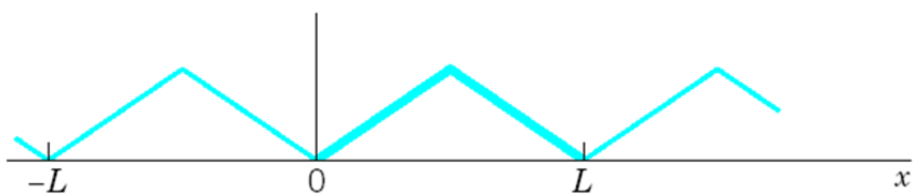
$$\therefore\ f(x)=\frac{k}{2}-\frac{16k}{\pi^2}\left(\frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi}{L}x+\frac{1}{6^2}\cos\frac{6\pi}{L}x+\cdots\right)$$

11.3 Even and Odd Functions. Half-Range Expansions (우함수와 기함수. 반구간 전개)

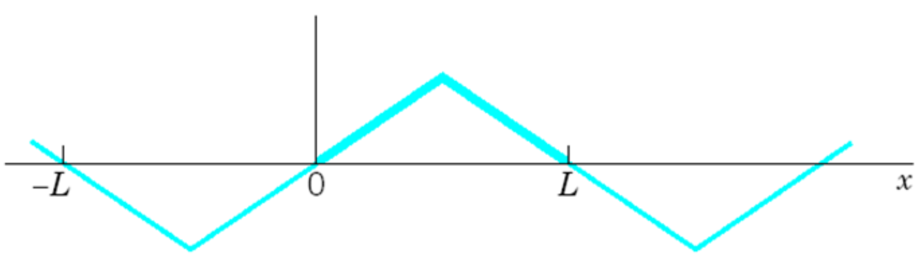
2. 주기적 기함수로 확장.

$$b_n = \frac{2}{L}\left[\frac{2k}{L}\int_0^{L/2} x\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx + \frac{2k}{L}\int_{L/2}^{L}(L-x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx\right] = \frac{8k}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$\therefore\ f(x) = \frac{8k}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi}{L}x - \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi}{L}x + \frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi}{L}x - + \cdots\right)$$



(a) Even extension



(b) Odd extension

12.3 Solution by Separating Variables. Use of Fourier Series (변수 분리에 의한 해. 푸리에급수의 사용)

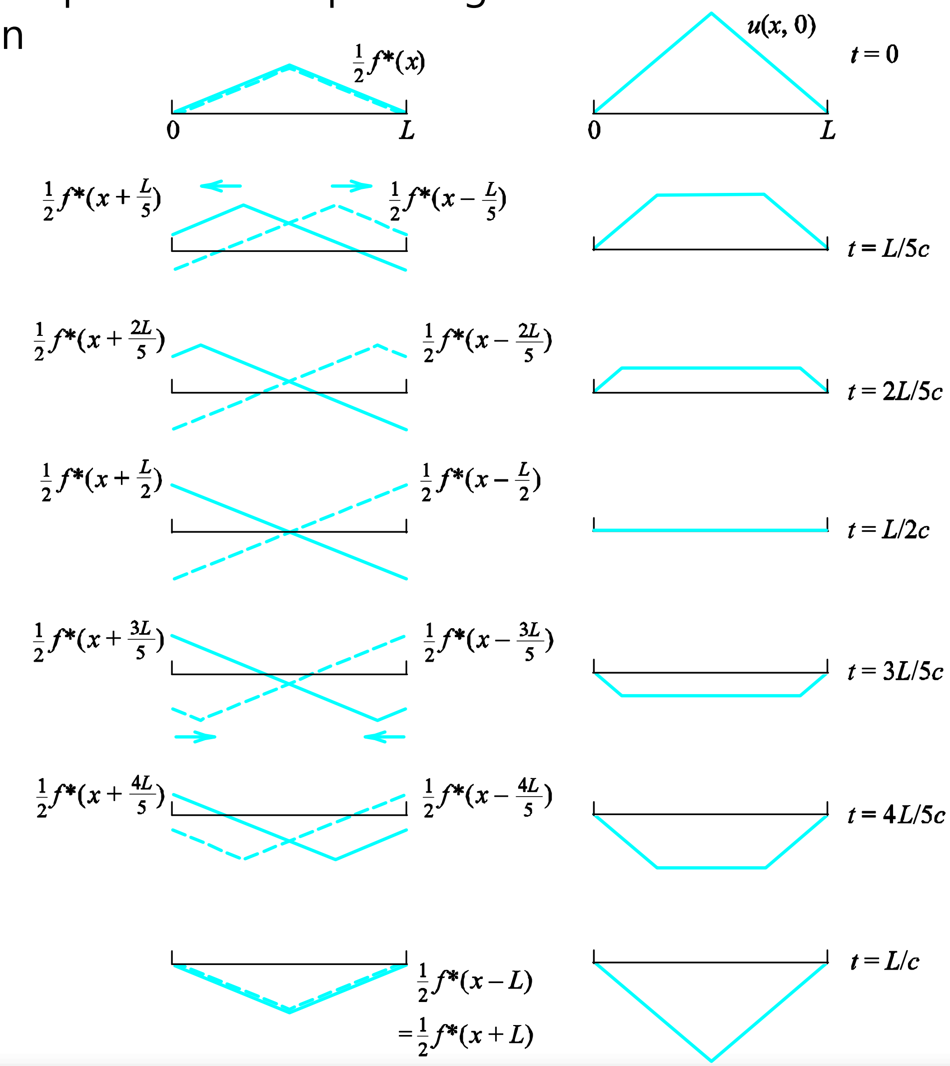
- Ex. 1 Find the solution of the wave equation corresponding to the triangular initial deflection

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2k}{L}x & \left(0<x<\dfrac{L}{2}\right)\\ \dfrac{2k}{L}(L-x) & \left(\dfrac{L}{2}<x<L\right)\end{cases}$$

And initial velocity zero

$$u(x,t)$$

$$=\frac{8k}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi}{L}x\cos\frac{\pi c}{L}t-\frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi}{L}x\cos\frac{3\pi c}{L}t+\cdots\right]$$



12.3 Solution by Separating Variables. Use of Fourier Series (변수 분리에 의한 해. 푸리에급수의 사용)

PROBLEM SET 12.3

HW: 15-18

12.4 D'Alembert Solution of the Wave Equation. Characteristics (파동방정식의 D'Alembert 해. 특성)

- **Wave Equation:** $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$v = x + ct, \quad w = x - ct$$

$$\Rightarrow \quad u_x = u_v v_x + u_w w_x = u_v + u_w,$$

$$u_{xx} = (u_v + u_w)_x = (u_v + u_w)_v v_x + (u_v + u_w)_w w_x = u_{vv} + 2u_{vw} + u_{ww}$$

$$u_t = u_v v_t + u_w w_t = cu_v - cu_w,$$

$$u_{tt} = (cu_v - cu_w)_t = (cu_v - cu_w)_v v_t + (cu_v - cu_w)_w w_t = c^2 u_{vv} - 2c^2 u_{vw} + c^2 u_{ww}$$

$$\therefore \ c^2 u_{vv} - 2c^2 u_{vw} + c^2 u_{ww} = c^2 (u_{vv} + 2u_{vw} + u_{ww}) \quad \Rightarrow \quad u_{vw} = \frac{\partial^2 u}{\partial w \partial v} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial v} = h(v) \quad \Rightarrow \quad u = \int h(v) dv + \varphi(w) \quad \Rightarrow \quad u(x,t) = \phi(x+ct) + \varphi(x-ct)$$

D'Alembert's solution

12.4 D'Alembert Solution of the Wave Equation. Characteristics (파동방정식의 D'Alembert 해. 특성)

- **D'Alembert's Solution Satisfying the Initial Conditions**

$$u(x,t)=\phi(x+ct)+\varphi(x-ct) \quad \Rightarrow \quad u_t(x,t)=c\phi'(x+ct)-c\varphi'(x-ct)$$

주어진 초기변위

$$u(x,0)=f(x) \quad \Rightarrow \quad u(x,0)=\phi(x)+\varphi(x)=f(x)$$

주어진 초기속도

$$u_t(x,0)=g(x) \quad \Rightarrow \quad u_t(x,0)=c\phi'(x)-c\varphi'(x)=g(x) \quad \Rightarrow \quad \phi(x)-\varphi(x)=k(x_0)+\frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} g(s)ds$$

$$\therefore\ \phi(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(s)ds+\frac{1}{2}k(x_0), \quad \varphi(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(s)ds-\frac{1}{2}k(x_0)$$

$$\Rightarrow \quad \phi(x+ct)+\varphi(x-ct)=\frac{1}{2}f(x+ct)+\frac{1}{2}f(x-ct)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$$

$$\therefore\ u(x,t)=\frac{1}{2}f(x+ct)+\frac{1}{2}f(x-ct)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)ds$$

12.4 D'Alembert Solution of the Wave Equation. Characteristics (파동방정식의 D'Alembert 해. 특성)

- **Types and Normal Forms of PDEs (편미분방정식들의 일반적인 형태와 정규형)**

준선형(Quasiline ar) : $Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = F(x, y, u, u_x, u_y)$

형태	정의 조건	12.1절의 예제
쌍곡선	$AC - B^2 < 0$	파동방정식
포물선	$AC - B^2 = 0$	열전도방정식
타원	$AC - B^2 > 0$	라플라스 방정식

- **Transformation to Normal Form (정규형으로 변환)**

특성방정식: $Ay'^2 - 2By' + Cy = 0$

형태	새로운 변수	정규형
쌍곡선	$v = \Phi, \quad w = \Psi$	$u_{vw} = F_1$
포물선	$v = x, \quad w = \Phi = \Psi$	$u_{ww} = F_2$
타원	$v = \frac{1}{2}(\Phi + \Psi), \quad w = \frac{1}{2i}(\Phi - \Psi)$	$u_{vv} + u_{ww} = F_3$

12.4 D'Alembert Solution of the Wave Equation. Characteristics (파동방정식의 D'Alembert 해. 특성)

■ Ex. 1 **D'Alembert's Solution Obtained Systematically**

The wave equation $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$

$$y = ct \quad \Rightarrow \quad u_t = u_y y_t = c u_y, \quad u_{tt} = c^2 u_{yy} \quad \Rightarrow \quad u_{xx} - u_{yy} = 0$$

$$\text{특성방정식}: \quad y'^2 - 1 = (y' - 1)(y' + 1) = 0$$

$$\Phi(x, y) = y + x = \text{상수}, \quad \Psi(x, y) = y - x = \text{상수}$$

$$\Rightarrow \quad v = \Phi = y + x = ct + x, \quad w = \Psi = y - x = ct - x$$

$$\therefore \; u = f_1(x + ct) + f_2(x - ct)$$

12.4 D'Alembert Solution of the Wave Equation. Characteristics (파동방정식의 D'Alembert 해. 특성)

PROBLEM SET 12.4

HW:

12.7 Modeling: Membrane, Two-Dimensional Wave Equation (모델화: 박막, 2차원 파동방정식)

- **Physical Assumptions**

1. 단위면적당 박막의 질량은 일정하다. 박막은 완벽하게 유연하여 휠 때 어떠한 저항도 없다.
2. 박막을 펼쳐서 그 모든 가장자리를 xy 평면 위에 고정시켜 놓았다. 박막을 펼칠 때 생기는 단위길이당 장력 T는 모든 점에서 그리고 모든 방향에서 같으며 운동 중에 변하지 않는다.
3. 운동 중 박막의 변위는 박막의 크기에 비하여 작으며, 모든 경사각도 작다.

12.7 Modeling: Membrane, Two-Dimensional Wave Equation (모델화: 박막, 2차원 파동방정식)

- **Derivation of the PDE of the Model ("2-D Wave Equation") from Forces**

- 박막의 변위와 경사각이 작으므로 그 부분의 변의 길이는 각각 Δx, Δy와 같다.

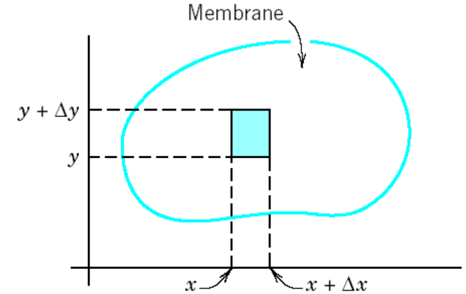
  장력 T는 단위길이 당의 힘이므로 그 부분의 양변에 작용하는 힘은 각각 $T\Delta x$, $T\Delta y$이다.

  박막은 완전히 유연하므로 힘은 매순간 움직이는 박막에 대해 접선 방향으로 작용한다.

힘의 수평성분

경사각이 작다 $\Rightarrow$ $\cos\alpha \approx 1, \ \cos\beta \approx 1$

힘의 합력 : $-T\Delta y\cos\alpha + T\Delta y\cos\beta \approx 0$



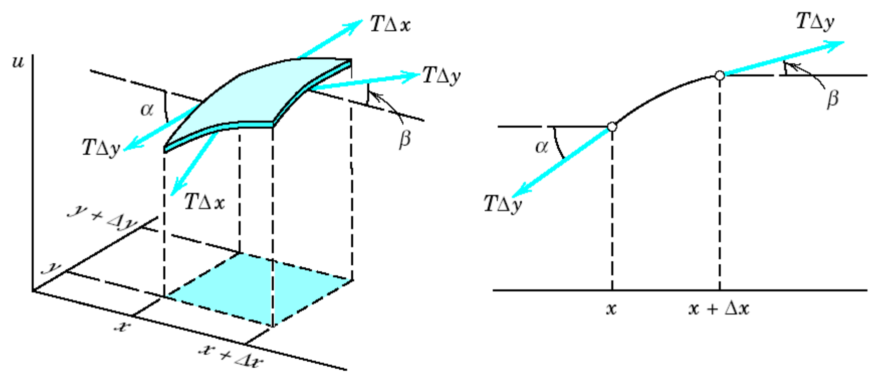


Fig. 298. Vibrating membrane

12.7 Modeling: Membrane, Two-Dimensional Wave Equation (모델화: 박막, 2차원 파동방정식)

힘의 수직성분

좌측과 유측의 변에서 수직으로 작용하는 힘의 합력 :

$$-T\Delta y \sin\alpha + T\Delta y \sin\beta = T\Delta y(\sin\beta - \sin\alpha)$$
$$\approx T\Delta y(\tan\beta - \tan\alpha) = T\Delta y[u_x(x+\Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)]$$

나머지 두 변에 수직으로작용하는 힘의 합력 :

$$T\Delta x[u_y(x_1, y+\Delta y) - u_y(x_2, y)]$$

Newton의 제 2법칙으로부터 편미분방정식의 유도.

$$\rho\Delta x\Delta y\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\Delta y[u_x(x+\Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)] + T\Delta x[u_y(x_1, y+\Delta y) - u_y(x_2, y)]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho}\left[\frac{u_x(x+\Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)}{\Delta x} + \frac{u_y(x_1, y+\Delta y) - u_y(x_2, y)}{\Delta y}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \text{(2차원 파동방정식)}, \quad c^2 = \frac{T}{\rho}$$

12.8 Rectangular Membrane. Double Fourier Series (직사각형의 박막. 이중 푸리에 급수)

- **Solution of the Two-Dimensional Wave Equation**
  - **2차원 파동방정식:** $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$
  - **Boundary Condition:** 경계에서 u=0
  - **Initial Condition:** $u(x, y, 0) = f(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = g(x, y)$
- **문제해결 방법**
  - **Method of Separating Variables:**

    $u(x, y, t) = F(x, y)G(t)$라고 한 뒤 $F(x, y) = H(x)Q(y)$로 두면 세 개의 상미분방정식을 얻는다.
  - 경계조건을 만족하는 상미분방정식의 해를 구한다.
  - 이중급수의 형태로 만든다.

12.8 Rectangular Membrane. Double Fourier Series (직사각형의 박막. 이중 푸리에 급수)

- **1단계: 파동방정식으로부터 세 개의 상미분방정식의 유도**

$$u(x,y,t)=F(x,y)G(t) \quad \Rightarrow \quad F\ddot{G}=c^2\left(F_{xx}G+F_{yy}G\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\ddot{G}}{c^2G}=\frac{1}{F}\left(F_{xx}+F_{yy}\right)=-\nu^2$$

$$\therefore\ F_{xx}+F_{yy}+\nu^2F=0(2\text{차원 Helmholtz 방정식}), \quad \ddot{G}+c^2\nu^2G=0$$

$$F(x,y)=H(x)Q(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2H}{dx^2}Q=-\left(H\frac{d^2Q}{dy^2}+\nu^2HQ\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{H}\frac{d^2H}{dx^2}=-\frac{1}{Q}\left(\frac{d^2Q}{dy^2}+\nu^2Q\right)=-k^2$$

$$\therefore\ \frac{d^2H}{dx^2}+k^2H=0, \qquad \frac{d^2Q}{dy^2}+p^2Q=0 \qquad \left(p^2=\nu^2-k^2\right)$$

12.8 Rectangular Membrane. Double Fourier Series (직사각형의 박막. 이중 푸리에 급수)

- **2단계: 경계조건의 만족**

$$\frac{d^2H}{dx^2}+k^2H=0,\quad \frac{d^2Q}{dy^2}+p^2Q=0 \quad\Rightarrow\quad H(x)=A\cos kx+B\sin kx,\quad Q(y)=C\cos py+D\sin py$$

경계조건

$$H(0)=H(a)=0 \quad\Rightarrow\quad k=\frac{m\pi}{a},\quad H_m(x)=\sin\frac{m\pi x}{a}$$

$$Q(0)=Q(b)=0 \quad\Rightarrow\quad p=\frac{n\pi}{b},\quad Q_n(y)=\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$\therefore\ F_{mn}(x,y)=H_m(x)Q_n(y)=\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

12.8 Rectangular Membrane. Double Fourier Series (직사각형의 박막. 이중 푸리에 급수)

- **2단계: 경계조건의 만족**

$$\frac{d^2H}{dx^2}+k^2H=0,\quad \frac{d^2Q}{dy^2}+p^2Q=0 \quad \Rightarrow \quad H(x)=A\cos kx+B\sin kx,\quad Q(y)=C\cos py+D\sin py$$

경계조건

$$H(0)=H(a)=0 \quad \Rightarrow \quad k=\frac{m\pi}{a},\quad H_m(x)=\sin\frac{m\pi x}{a}$$

$$Q(0)=Q(b)=0 \quad \Rightarrow \quad p=\frac{n\pi}{b},\quad Q_n(y)=\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$\therefore\ F_{mn}(x,y)=H_m(x)Q_n(y)=\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$\ddot{G}+\lambda^2G=0,\quad \lambda=c\nu$이고 $p^2=\nu^2-k^2$이므로 $\lambda=c\sqrt{k^2+p^2}$이다.

$$k=\frac{m\pi}{a},\quad p=\frac{n\pi}{b} \quad \Rightarrow \quad \lambda_{mn}=c\pi\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2},\quad G_{mn}(t)=B_{mn}\cos\lambda_{mn}t+B_{mn}{}^*\sin\lambda_{mn}t$$

$$\therefore\ u_{mn}(x,y,t)=\left(B_{mn}\cos\lambda_{mn}t+B_{mn}{}^*\sin\lambda_{mn}t\right)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

12.8 Rectangular Membrane. Double Fourier Series (직사각형의 박막. 이중 푸리에 급수)

- 3단계: 모델의 해. 이중푸리에 급수

$$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_{mn}(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(B_{mn}\cos\lambda_{mn}t+B_{mn}*\sin\lambda_{mn}t)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

초기조건의 충족 : $u(x,y,0)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}=f(x,y)$

$K_m(y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\sin\frac{n\pi y}{b}$ 라 하면 $\sum_{m=1}^{\infty}K_m(y)\sin\frac{m\pi x}{a}=f(x,y)$

$$K_m(y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\sin\frac{n\pi y}{b}\quad\Rightarrow\quad B_{mn}=\frac{2}{b}\int_0^b K_m(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}K_m(y)\sin\frac{m\pi x}{a}=f(x,y)\quad\Rightarrow\quad K_m(y)=\frac{2}{a}\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}dx$$

$$\therefore\quad B_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy$$

12.8 Rectangular Membrane. Double Fourier Series (직사각형의 박막. 이중 푸리에 급수)

- **3단계: 모델의 해. 이중푸리에 급수**

$$u(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}u_{mn}(x,y,t)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_{mn}\cos\lambda_{mn}t+B_{mn}{}^{*}\sin\lambda_{mn}t\right)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$\text{초기조건의 충족 : } u(x,y,0)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}=f(x,y)$$

$$K_m(y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\sin\frac{n\pi y}{b}\ \text{ 라 하면 }\ \sum_{m=1}^{\infty}K_m(y)\sin\frac{m\pi x}{a}=f(x,y)$$

$$K_m(y)=\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\sin\frac{n\pi y}{b}\quad\Rightarrow\quad B_{mn}=\frac{2}{b}\int_0^b K_m(y)\sin\frac{n\pi y}{b}dy$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}K_m(y)\sin\frac{m\pi x}{a}=f(x,y)\quad\Rightarrow\quad K_m(y)=\frac{2}{a}\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}dx$$

$$\therefore\quad B_{mn}=\frac{4}{ab}\int_0^b\int_0^a f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}{}^{*}\lambda_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}=g(x,y)\Rightarrow B_{mn}{}^{*}=\frac{4}{ab\lambda_{mn}}\int_0^a\int_0^b g(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}dxdy$$

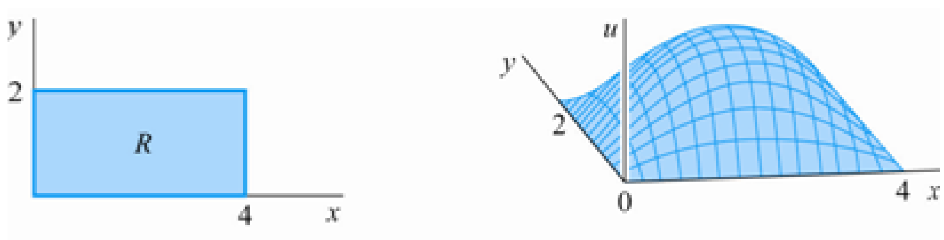
12.8 Rectangular Membrane. Double Fourier Series (직사각형의 박막. 이중 푸리에 급수)

■ **Ex. 2 Vibration of a Rectangular Membrane (직사각형 박막의 진동)**

장력이 $12.5\,\mathrm{lb}/\mathrm{ft}$ 밀도가 $2.5\,\mathrm{slugs}/\mathrm{ft}^2$ (가벼운 고무의 경우), 초기속도가 0이며 초기변위가

$$f(x,y)=0.1\left(4x-x^2\right)\left(2y-y^2\right)\ \mathrm{ft}$$

일 때, 변의 길이가 각각 $a=4\,\mathrm{ft}$와 $b=2\,\mathrm{ft}$인 직사각형 박막에 작용하는 박막의 진동을 구하라.



$$c^2=\frac{T}{\rho}=\frac{12.5}{2.5}=5\left[\mathrm{ft}^2/\mathrm{sec}^2\right]$$

$$B_{mn}=\frac{4}{4\cdot 2}\int_0^2\int_0^4 0.1\left(4x-x^2\right)\left(2y-y^2\right)\sin\frac{m\pi x}{4}\sin\frac{n\pi y}{2}\,dxdy=\frac{256\cdot 32}{20m^3n^3\pi^6}\approx\frac{0.426050}{m^3n^3}\qquad (m,n \text{ 모두 홀수})$$

$$\therefore\ u(x,y,t)=0.426050\sum_{m,\ n\ odd}\sum\frac{1}{m^3n^3}\cos\left(\frac{\sqrt{5}\pi}{4}\sqrt{m^2+4n^2}\right)t\sin\frac{m\pi x}{4}\sin\frac{n\pi y}{2}$$

$$=0.426050\left(\cos\frac{\sqrt{5}\pi\sqrt{5}}{4}t\sin\frac{\pi x}{4}\sin\frac{\pi y}{2}+\frac{1}{27}\cos\frac{\sqrt{5}\pi\sqrt{37}}{4}t\sin\frac{\pi x}{4}\sin\frac{3\pi y}{2}+\frac{1}{27}\cos\frac{\sqrt{5}\pi\sqrt{13}}{4}t\sin\frac{3\pi x}{4}\sin\frac{\pi y}{2}+\cdots\right)$$

12.8 Rectangular Membrane. Double Fourier Series (직사각형의 박막. 이중 푸리에 급수)

PROBLEM SET 12.8

HW: 23

12.5 Heat Equation: Solution by Fourier Series (열전도방정식)

- **Heat Equation (열전도방정식):** $$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \nabla^2 u, \quad c^2 = \frac{K}{\sigma\rho}$$
  - c^2 : Thermal Diffusivity (열확산계수)
  - K : Thermal Conductivity (열전도도)
  - σ : 비열
  - ρ : 물체의 밀도

Fig. 291. Bar under consideration

- **문제**
  - **1차원 열전도방정식 :** $$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$
  - **Boundary Condition:** $u(0,t) = u(L,t) = 0$ (모든 t에 대하여)
  - **Initial Condition:** $u(x,0) = f(x), \quad (0 \le x \le L)$

12.5 Heat Equation: Solution by Fourier Series (열전도방정식)

- **1단계: 열전도방정식으로부터 두 개의 상미분방정식의 유도**

$$u(x,t) = F(x)G(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F''(x)G(t), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = F(x)\dot{G}(t)$$

$$\therefore \; F(x)\dot{G}(t) = c^2 F''(x)G(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{G}(t)}{c^2 G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)} \left(= -p^2\right)$$

$$\therefore \; F''(x) + p^2 F(x) = 0, \quad \dot{G}(t) + c^2 p^2 G(t) = 0$$

12.5 Heat Equation: Solution by Fourier Series (열전도방정식)

- **2단계: 경계조건의 만족**

경계조건 $u(0,t)=F(0)G(t)=0, \quad u(L,t)=F(L)G(t)=0$을 적용

$$\Rightarrow \quad F(0)=F(L)=0$$

$$\therefore\ F''(x)+p^2F(x)=0, \quad F(0)=F(L)=0$$

$$F''(x)+p^2F(x)=0 \quad \Rightarrow \quad F(x)=A\cos px+B\sin px$$

$$F(0)=A=0, \ \ F(L)=A\cos pL+B\sin pL=0 \quad \Rightarrow \quad B\sin pL=0 \quad \Rightarrow \quad p=\frac{n\pi}{L}(n:\text{정수})$$

$$\therefore\ F(x)=F_n(x)=\sin\frac{n\pi}{L}x \ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$$\dot{G}(t)+\lambda_n{}^2G(t)=0, \quad \lambda_n=cp=\frac{cn\pi}{L} \quad \Rightarrow \quad G_n(t)=B_ne^{-\lambda_n{}^2t}$$

$$u_n(x,t)=B_n\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-\lambda_n{}^2t} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

12.5 Heat Equation: Solution by Fourier Series (열전도방정식)

- **3단계: 전체 문제에 대한 해. 푸리에 급수**

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{L}e^{-\lambda_n{}^2 t}\qquad\left(\lambda_n=\frac{cn\pi}{L}\right)$$

초기조건의충족 : $u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{L}=f(x)$

푸리에 사인 급수 적용 $\Rightarrow$ $B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$

12.5 Heat Equation: Solution by Fourier Series (열전도방정식)

■ Ex. 1 **Sinuroidal Initial Temperature**

측면이 절연된 길이 80cm 구리막대의 초기온도가 $100\sin(\pi x/80)^{\circ}$ C이고, 양끝이 0° C로 유지될 때 온도 $u(x,t)$를 구하라. 이때 막대의 최고온도가 50° C로 떨어지는데 걸리는 시간은 얼마인가?

구리에 대한 물리적 데이터 : 밀도 $8.92\mathrm{gm}/\mathrm{cm}^3$, 비열 $0.092\mathrm{cal}/\mathrm{gm}^{\circ}\mathrm{C}$, 열전도도 $0.095\mathrm{cal}/\mathrm{cm\,sec}^{\circ}\mathrm{C}$

12.5 Heat Equation: Solution by Fourier Series (열전도방정식)

■ Ex. 1 **Sinuroidal Initial Temperature**

측면이 절연된 길이 80cm 구리막대의 초기온도가 $100\sin(\pi x/80)^{\circ}$ C이고, 양끝이 0° C로 유지될 때 온도 $u(x,t)$를 구하라. 이때 막대의 최고온도가 50° C로 떨어지는데 걸리는 시간은 얼마인가?

구리에 대한 물리적 데이터 : 밀도 $8.92\mathrm{gm}/\mathrm{cm}^3$, 비열 $0.092\mathrm{cal}/\mathrm{gm}^{\circ}\mathrm{C}$, 열전도도 $0.095\mathrm{cal}/\mathrm{cm\,sec}\,^{\circ}\mathrm{C}$

초기조건에 의하여

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{80}=f(x)=100\sin\frac{\pi x}{80} \quad\Rightarrow\quad B_1=100,\ B_2=B_3=\cdots=0$$

$$\lambda^2=\frac{c^2\pi^2}{L^2}$$

$$c^2=\frac{K}{\sigma\rho}=\frac{0.95}{0.092\cdot 8.92}=1.158\left[\mathrm{cm}^2/\mathrm{sec}\right] \quad\Rightarrow\quad \lambda_1{}^2=1.158\cdot\frac{9.870}{80^2}=0.001785\left[\mathrm{sec}^{-1}\right]$$

$$\therefore\ u(x,t)=100\sin\frac{\pi x}{80}e^{-0.001785t}$$

$$100e^{-0.001785t}=50 \quad\Rightarrow\quad t=\frac{\ln 0.5}{-0.001785}=388[\mathrm{sec}]\approx 6.5[\mathrm{min}]$$

12.5 Heat Equation: Solution by Fourier Series (열전도방정식)

- Ex. 4 **Bar with Insulated Ends. Eigenvalue 0**

  경계조건을 양 끝이 단열되었을 때의 조건으로 바꾸고 열전도 방정식의 해를 구하라.

12.5 Heat Equation: Solution by Fourier Series (열전도방정식)

- Ex. 4 **Bar with Insulated Ends. Eigenvalue 0**

  경계조건을 양 끝이 단열되었을 때의 조건으로 바꾸고 열전도 방정식의 해를 구하라.

물리적인 실험에 의하면 전열속도는 온도의 Gradient에 비례한다.
양 끝이 단열되어열흐름이 없다면 기울기는 0이다.
경계조건 : $u_x(0,t)=0, \quad u_x(L,t)=0 \quad (\text{모든 } t\text{에 대하여})$

$$u_x(0,t)=F'(0)G(t)=0, \quad u_x(L,t)=F'(L)G(t)=0 \quad \Rightarrow \quad F'(0)=F'(L)=0$$

$$F(x)=A\cos px+B\sin px \quad \Rightarrow \quad F'(x)=-Ap\sin px+Bp\cos px$$

$$\therefore\ F'(0)=Bp=0, \quad F'(L)=-Ap\sin pL+Bp\cos pL=0 \quad \Rightarrow \quad B=0, \quad p=p_n=\frac{n\pi}{L}$$

$$\therefore\ F_n(x)=\cos\frac{n\pi x}{L}$$

12.5 Heat Equation: Solution by Fourier Series (열전도방정식)

$$u_n(x,t) = F_n(x)G_n(t) = A_n \cos\frac{n\pi x}{L} e^{-\lambda_n{}^2 t} \qquad \left(\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}\right)$$

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{L} e^{-\lambda_n{}^2 t} \qquad \left(\lambda_n = \frac{cn\pi}{L}\right)$$

초기조건으로부터 $u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi x}{L} = f(x)$

$$\Rightarrow \quad A_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx, \quad A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L} dx$$

12.5 Heat Equation: Solution by Fourier Series (열전도방정식)

- **Steady Two-Dimensional Heat Problems. Laplace's Equation**
  - 2차원 열전도 방정식 : $\dfrac{\partial u}{\partial t} = c^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$
  - 열전도가 **정상적**(Steady) $\Rightarrow$ 시간에 무관, $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$

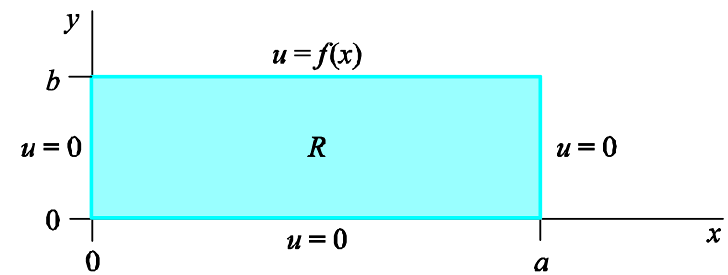
    $\Rightarrow \quad \nabla^2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$(라플라스 방정식)

- **Boundary Value Problem, BVP (경계값 문제)**
  - Dirichlet 문제 : C 위에서 u의 값이 주어지는 경우
  - Neumann 문제 : C 위에서 법선도함수 $u_n = \dfrac{\partial u}{\partial n}$의 값이 주어지는 경우
  - 혼합 경계값 문제, Robin 문제 : C의 한부분에서는 u의 값이 주어지고,

    C의 나머지 부분에서 u_n의 값이 주어지는 경우

12.5 Heat Equation: Solution by Fourier Series (열전도방정식)

- **Dirichlet Problem in a Rectangular *R***



변수분리법적용

$$u(x,y)=F(x)G(y) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2F}{dx^2}G=-F\frac{d^2G}{dy^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{F}\frac{d^2F}{dx^2}=-\frac{1}{G}\frac{d^2G}{dy^2}=-k$$

왼쪽 및 오른쪽 변의 경계조건 : $F(0)=F(a)=0$

$\therefore \; k=\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$일 때, $\quad F(x)=F_n(x)=\sin\frac{n\pi}{a}x,\; G(y)=G_n(y)=A_n e^{\frac{n\pi y}{a}}+B_n e^{-\frac{n\pi y}{a}} \qquad n=1,\ 2,\ \cdots$

아랫변에서의 경계조건 : $G_n(0)=0$

$$\therefore \; A_n+B_n=0 \quad \Rightarrow \quad G_n(y)=A_n\left(e^{\frac{n\pi y}{a}}-e^{-\frac{n\pi y}{a}}\right)=2A_n\sinh\frac{n\pi y}{a}$$

$$\Rightarrow \quad u_n(x,y)=F_n(x)G_n(y)=A_n{*}\sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a} \quad (2A_n=A_n{*})$$

12.5 Heat Equation: Solution by Fourier Series (열전도방정식)

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n{}^*\sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a}$$

위 변 에 서 경 계 조 건 : $u(x,b)=f(x)$

$$\Rightarrow\quad u(x,b)=f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n{}^*\sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi b}{a}$$

$$\Rightarrow\quad b_n=A_n{}^*\sinh\frac{n\pi b}{a}=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx \quad\Rightarrow\quad A_n{}^*=\frac{2}{a\sinh\frac{n\pi b}{a}}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx$$

12.5 Heat Equation: Solution by Fourier Series (열전도방정식)

PROBLEM SET 12.5

HW: 13, 23, 25, 34

12.6 Heat Equation: Solution by Fourier Integrals and Transforms (열전도방정식)

- **Bars of Infinite Length**

- **Heat Equation:**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- **Initial Condition:**

$$u(x,0) = f(x)$$

- $u(x,t) = F(x)G(t) \quad \Rightarrow \quad F'' + p^2 F = 0, \quad \dot{G} + c^2 p^2 G = 0$

- $F(x) = A\cos px + B\sin px, \quad G(t) = e^{-c^2 p^2 t}$

$$\Rightarrow \quad u(x,t;p) = FG = (A\cos px + B\sin px)e^{-c^2 p^2 t}$$

12.6 Heat Equation: Solution by Fourier Integrals and Transforms (열전도방정식)

- **Use of Fourier Integrals**

$$u(x,t)=\int_0^\infty u(x,t;p)dp=\int_0^\infty (A\cos px+B\sin px)e^{-c^2p^2t}dp$$

12.6 Heat Equation: Solution by Fourier Integrals and Transforms (열전도방정식)

- **Use of Fourier Integrals**

$$f(x)=\int_0^{\infty}[A(w)\cos wx+B(w)\sin wx]dw$$

$$A(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\cos wv\,dv$$

$$B(w)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\sin wv\,dv$$

$$u(x,t)=\int_0^{\infty}u(x,t;p)dp=\int_0^{\infty}(A\cos px+B\sin px)e^{-c^2p^2t}dp$$

초기조건으로부터 $u(x,0)=\int_0^{\infty}(A\cos px+B\sin px)dp=f(x)$

$$\Rightarrow\ A(p)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\cos pv\,dv,\quad B(p)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\sin pv\,dv\ \Rightarrow\ u(x,0)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\cos(px-pv)dv\right]dp$$

$$\therefore\ u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\left[\int_0^{\infty}e^{-c^2p^2t}\cos(px-pv)dp\right]dv$$

공식 $\int_0^{\infty}e^{-s^2}\cos 2bs\,ds=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-b^2}$을 적용하면

$$p=\frac{s}{c\sqrt{t}},\quad b=\frac{x-v}{2c\sqrt{t}}$$

$$2bs=(x-v)p,\quad ds=c\sqrt{t}\,dp$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}f(v)\exp\left\{-\frac{(x-v)^2}{4c^2t}\right\}dv$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x+2cz\sqrt{t}\right)e^{-z^2}dz$$

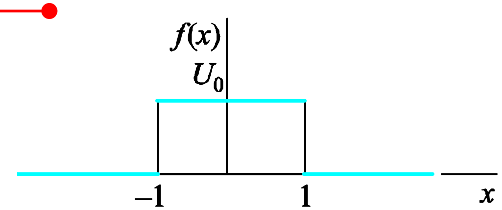
$$z=\frac{v-x}{2c\sqrt{t}}$$

12.6 Heat Equation: Solution by Fourier Integrals and Transforms (열전도방정식)

Ex. 1 Temperature in an Infinite Bar

Find the temperature in the infinite bar if the initial temperature is

$$f(x)=\begin{cases} U_0 = const & (|x|<1) \\ 0 & (|x|>1) \end{cases}$$



$$u(x,t)=\frac{U_0}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-1}^{1}\exp\left\{-\frac{(x-v)^2}{4c^2t}\right\}dv$$

$$=\frac{U_0}{\sqrt{\pi}}\int_{-(1+x)/2c\sqrt{t}}^{(1-x)/2c\sqrt{t}} e^{-z^2}\,dz$$

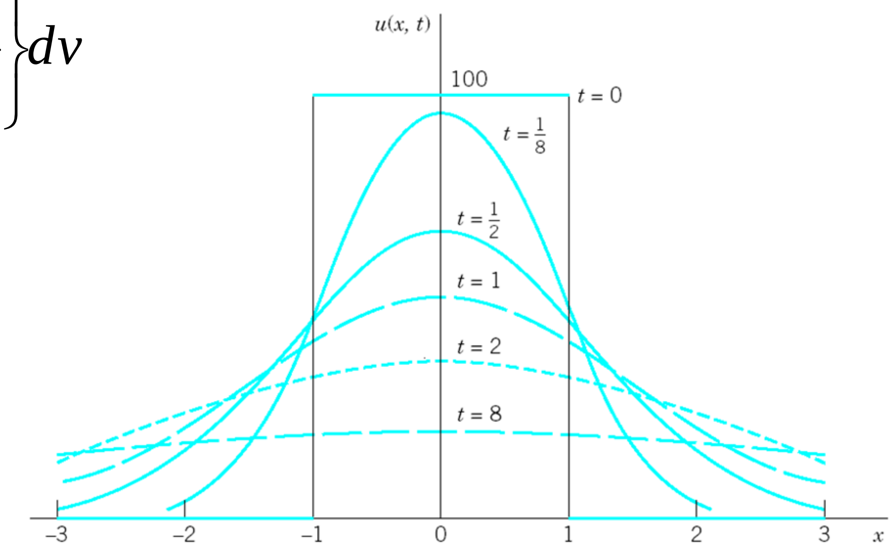


Fig. 296. Solution $u(x, t)$ in Example 1 for $U_0 = 100°C$, $c^2 = 1\ cm^2/sec$, and several values of t

12.6 Heat Equation: Solution by Fourier Integrals and Transforms (열전도방정식)

- **Use of Fourier Transforms**

- Ex. 2 **Temperature in the Infinite Bar in Example 1**

  푸리에 변환을 사용하여 예제 1을 풀어라.

$\hat{u} = \mathcal{F}(u)$를 x의 함수로 간주하자.

열전도방정식 $\Rightarrow \quad \mathcal{F}(u_t) = c^2\mathcal{F}(u_{xx}) = c^2(-w^2)\mathcal{F}(u) = -c^2w^2\hat{u}$ **P. 522** $\mathcal{F}\{f''(x)\} = -w^2\mathcal{F}\{f(x)\}$

$$\mathcal{F}(u_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u_t e^{-iwx}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} ue^{-iwx}dx = \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial t} = -c^2w^2\hat{u}$$

$$\therefore\ \hat{u}(w,t) = C(w)e^{-c^2w^2t}$$

초기조건 : $\hat{u}(w,0) = \hat{f}(w) \quad \Rightarrow \quad \hat{u}(w,0) = C(w) = \hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)e^{-ivw}dv$

$$\therefore\ \hat{u}(w,t) = \hat{f}(w)e^{-c^2w^2t}$$

even .VS. odd

$$\Rightarrow u(w,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(w)e^{-c^2w^2t}e^{iwx}dw = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2w^2t}e^{i(wx-wv)}dw\right]dv = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(v)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-c^2w^2t}\cos(wx-wv)dw\right]dv$$

12.6 Heat Equation: Solution by Fourier Integrals and Transforms (열전도방정식)

- Ex. 3 **Solution in Example 1 by the Method of Convolution**

  합성곱에 의해 예제 1의 열전도 문제를 풀어라.

$$u(w,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(w)e^{-c^2w^2t}e^{iwx}dw, \qquad \hat{g}(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-c^2w^2t}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(w)\hat{g}(w)e^{iwx}dw=(f*g)(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(p)g(x-p)dp$$

$$\mathscr{F}\left(e^{-ax^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{w^2}{4a}} \quad \Rightarrow \quad \mathscr{F}\left(e^{-\frac{x^2}{4c^2t}}\right)=\sqrt{2c^2t}e^{-c^2w^2t}=\sqrt{2c^2t}\sqrt{2\pi}\hat{g}(w)$$

$$\therefore\ u(w,t)=(f*g)(x)=\frac{1}{2c\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}f(p)\exp\left\{-\frac{(x-p)^2}{4c^2t}\right\}dp$$

12.6 Heat Equation: Solution by Fourier Integrals and Transforms (열전도방정식)

PROBLEM SET 12.6

HW: 10 (e), (f), (g)

12.9 Laplacian in Polar Coordiantes. Circular Membrane. Fourier-Bessel Series (극좌표에서의 라플라스 연산자. 원형박막. 푸리에-베셀 급수)

- **Laplacian into Polar Coordinates (극좌표에서의 라플라스 연산자)**

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} \xrightarrow{\text{극좌표 적용}} \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \arctan\frac{y}{x} \Rightarrow r_x = \frac{x}{r}, \quad \theta_x = -\frac{y}{r^2} \Rightarrow r_{xx} = \frac{y^2}{r^3}, \quad \theta_{xx} = -\frac{2xy}{r^4}$$

$$u_x = u_r r_x + u_\theta \theta_x, \quad u_y = u_r r_y + u_\theta \theta_y$$

$$\Rightarrow u_{xx} = \frac{x^2}{r^2}u_{rr} - 2\frac{xy}{r^3}u_{r\theta} + \frac{y^2}{r^4}u_{\theta\theta} + \frac{y^2}{r^3}u_r + 2\frac{xy}{r^4}u_\theta,$$

$$u_{yy} = \frac{y^2}{r^2}u_{rr} + 2\frac{xy}{r^3}u_{r\theta} + \frac{x^2}{r^4}u_{\theta\theta} + \frac{x^2}{r^3}u_r - 2\frac{xy}{r^4}u_\theta$$

$$\therefore\ \nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

12.9 Laplacian in Polar Coordiantes. Circular Membrane. Fourier-Bessel Series (극좌표에서의 라플라스 연산자. 원형박막. 푸리에-베셀 급수)

- **Circular Membrane (원형 박막)**

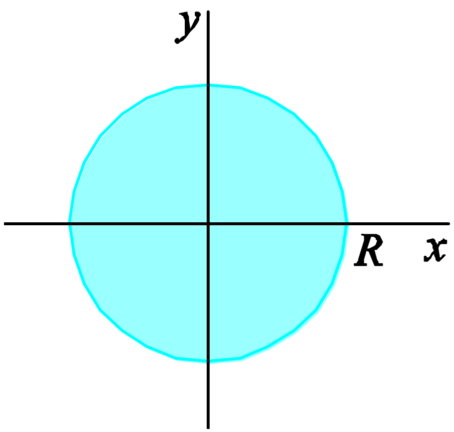
- **극좌표에서 2차원 파동방정식:** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) \qquad c^2 = \dfrac{T}{\rho}$

- 반지름이 *R*인 박막을 고려하여 방사상 대칭(radially symmetric)인 해를 구하자.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

$$u(R,t) = 0 \quad (\text{모든 } t \ge 0\text{에 대해})$$

$$u(r,0) = f(r), \quad u_r(r,0) = g(r)$$



12.9 Laplacian in Polar Coordiantes. Circular Membrane. Fourier-Bessel Series (극좌표에서의 라플라스 연산자. 원형박막. 푸리에-베셀 급수)

- **1단계: 파동방정식으로부터 두 개의 상미분방정식의 유도**

$$u(r,t)=W(r)G(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{\ddot{G}}{c^2G}=\frac{1}{W}\left(W''+\frac{1}{r}W'\right)=-k^2$$

$$\therefore\ W''+\frac{1}{r}W'+k^2W=0, \quad \ddot{G}+\lambda^2G=0, \quad \lambda=ck$$

$$s=kr \quad \Rightarrow \quad W'=\frac{dW}{dr}=\frac{dW}{ds}\frac{ds}{dr}=k\frac{dW}{ds},$$

$$W''=\frac{d}{dr}\left(k\frac{dW}{ds}\right)=\frac{d}{ds}\left(k\frac{dW}{ds}\right)\cdot\frac{ds}{dr}=k^2\frac{d^2W}{ds^2}$$

$$\therefore\ \frac{d^2W}{ds^2}+\frac{1}{s}\frac{dW}{ds}+W=0$$

Bessel's equation
Section 5.5

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\nu^2\right)y=0$$

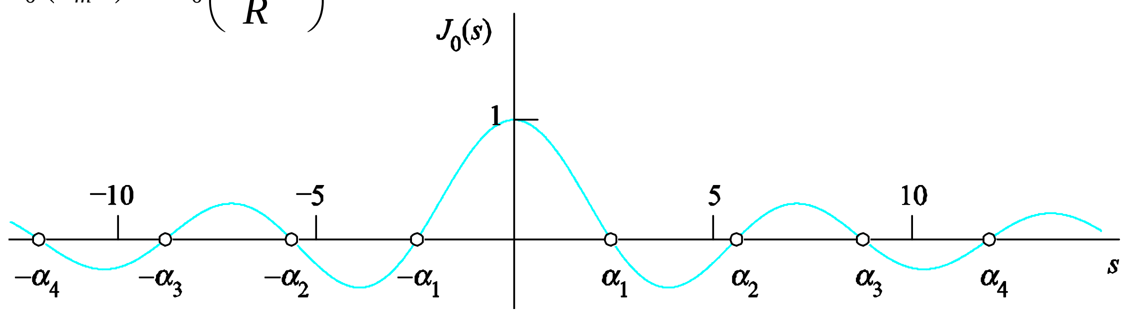
12.9 Laplacian in Polar Coordiantes. Circular Membrane. Fourier-Bessel Series (극좌표에서의 라플라스 연산자. 원형박막. 푸리에-베셀 급수)

- **2단계: 경계조건의 만족**

$$\frac{d^2W}{ds^2}+\frac{1}{s}\frac{dW}{ds}+W=0 \;\Rightarrow\; W(r)=J_0(s)=J_0(kr) \qquad r\to 0,\;\; Y_0(r)\to -\infty$$

$$\text{경계조건 : } W(R)=J_0(kR)=0 \qquad \Rightarrow \qquad k=k_m=\frac{\alpha_m}{R}$$

$$\therefore\; W_m(r)=J_0(k_m r)=J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right)$$



$$\ddot{G}+\lambda^2 G=0, \qquad \lambda=ck \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_m=\frac{c\alpha_m}{R}, \quad G_m(t)=A_m\cos\lambda_m t+B_{mn}\sin\lambda_m t$$

$$\therefore\; u_m(r,t)=(A_m\cos\lambda_m t+B_{mn}\sin\lambda_m t)J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right)$$

12.9 Laplacian in Polar Coordiantes. Circular Membrane. Fourier-Bessel Series (극좌표에서의 라플라스 연산자. 원형박막. 푸리에-베셀 급수)

- 2단계: 경계조건의 만족

$$u_m(r,t) = \left(A_m \cos\lambda_m t + B_{mn} \sin\lambda_m t\right) J_0\left(\frac{\alpha_m}{R} r\right)$$

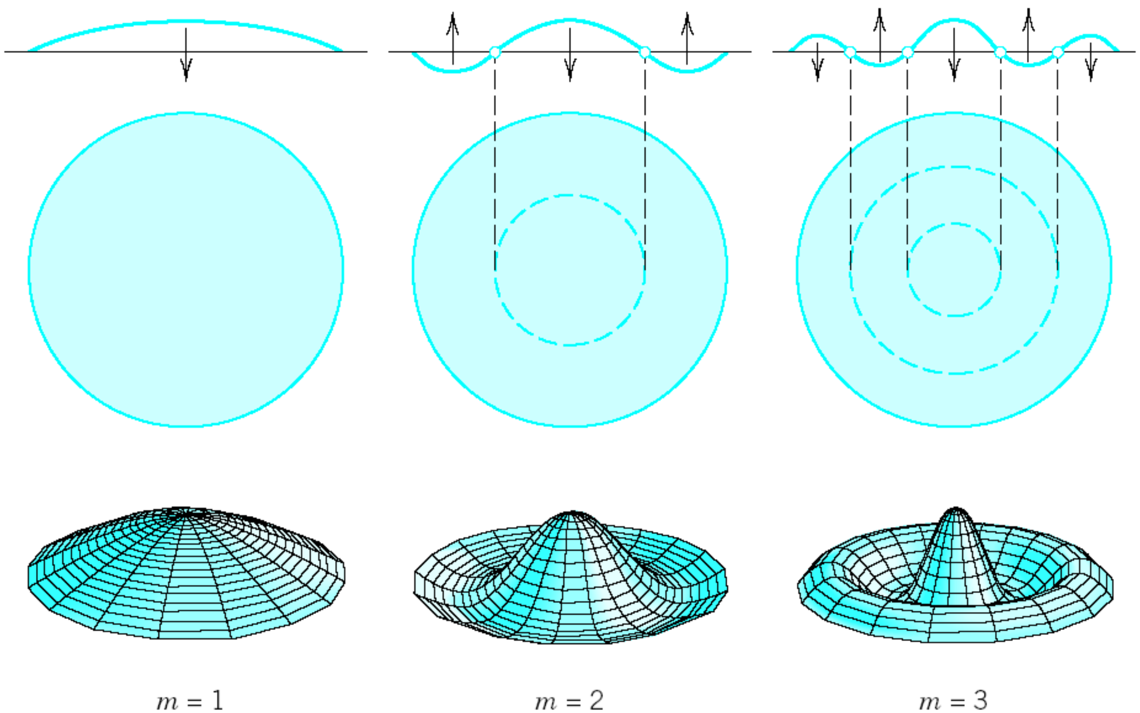


Fig. 306. Normal modes of the circular membrane in the case of vibrations independent of the angle

12.9 Laplacian in Polar Coordiantes. Circular Membrane. Fourier-Bessel Series (극좌표에서의 라플라스 연산자. 원형박막. 푸리에-베셀 급수)

- **3단계: 전체 문제에 대한 해**

$$u(r,t)=\sum_{m=1}^{\infty}u_m(r,t)=\sum_{m=1}^{\infty}(A_m\cos\lambda_m t+B_{mn}\sin\lambda_m t)J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right)$$

초기조건의 충족 : $u(r,0)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right)=f(r)$

Fourier - Bessel 급수 적용 $\Rightarrow \quad \therefore \quad A_m=\dfrac{2}{R^2 J_1^{\,2}(\alpha_m)}\displaystyle\int_0^R rf(r)J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right)dr$

Section 5.8 (10)

12.9 Laplacian in Polar Coordiantes. Circular Membrane. Fourier-Bessel Series (극좌표에서의 라플라스 연산자. 원형박막. 푸리에-베셀 급수)

■ Ex. 1 **Vibration of a Circular Membrane**

반지름이 1ft이고 밀도가 $2\mathrm{slugs}/\mathrm{ft}^2$인 원형 박막에 작용하는 장력이 $8\mathrm{lb}/\mathrm{ft}$이고,

초기속도가 0이며 초기변위가 $f(r)=1-r^2[\mathrm{ft}]$일 때, 그 진동을 구하라.

$$c^2=\frac{T}{\rho}=\frac{8}{2}=4\left[\mathrm{ft}^2/\mathrm{sec}^2\right]$$

$$\text{초기속도}=0 \quad \Rightarrow \quad B_m=0$$

$$R=1$$

$$J_2(\alpha_m)=\frac{2}{\alpha_m}J_1(\alpha_m)-J_0(\alpha_m)=\frac{2}{\alpha_m}J_1(\alpha_m)$$

$$\Rightarrow \quad A_m=\frac{2}{J_1^{\,2}(\alpha_m)}\int_0^1 r(1-r^2)J_0(\alpha_m r)dr=\frac{4J_2(\alpha_m)}{\alpha_m^{\,2}J_1^{\,2}(\alpha_m)}=\frac{8}{\alpha_m^{\,3}J_1(\alpha_m)}$$

$$\therefore \ f(r)=1.108J_0(2.4048r)-0.140J_0(5.5201r)+0.045J_0(8.6537r)-\cdots$$

12.9 Laplacian in Polar Coordiantes. Circular Membrane. Fourier-Bessel Series (극좌표에서의 라플라스 연산자. 원형박막. 푸리에-베셀 급수)

PROBLEM SET 12.9

HW: 4, 16

12.10 Laplace's Equation in Cylindrical and Spherical Coordinates. Potential (원통좌표 및 구좌표에서의 라플라스 방정식. 포텐셜)

- **Laplace's Equation:** $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$
  - $\nabla^2 u$: u의 **라플라스 연산자** (Lapacian)
  - **Potential Theory (퍼텐셜이론)**: 라플라스 방정식의 해에 관한 이론
  - **Harmonic Functions (조화함수)**: 연속인 2계 편도함수를 갖는 라플라스 방정식의 해
  - 중력, 정전기학, 정상상태 열흐름 및 유체흐름 등에서 등장

12.10 Laplace's Equation in Cylindrical and Spherical Coordinates. Potential (원통좌표 및 구좌표에서의 라플라스 방정식. 포텐셜)

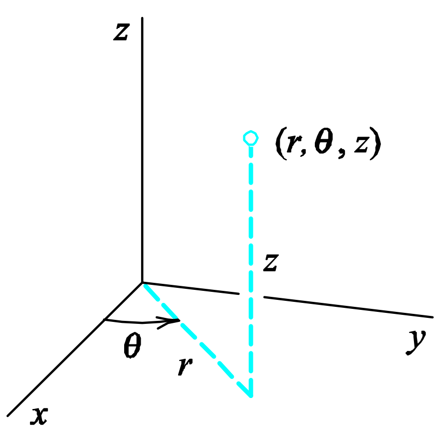
- **Laplacian in Cylindrical Coordinates**

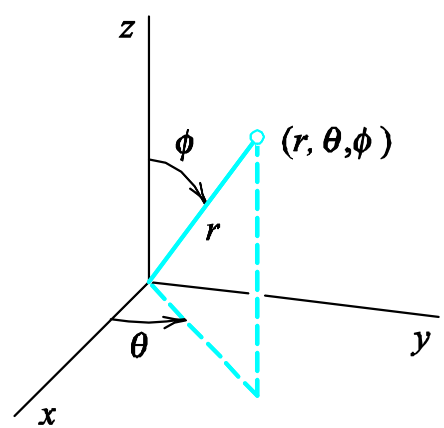
$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \xrightarrow{\text{원통좌표 적용}} \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

- **Laplacian in Spherical Coordinates**

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} \xrightarrow{\text{구좌표 적용}} \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\cot\phi}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{1}{r^2 \sin^2\phi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

$$= \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\sin\phi \frac{\partial u}{\partial \phi}\right) + \frac{1}{\sin^2\phi}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right]$$





12.10 Laplace's Equation in Cylindrical and Spherical Coordinates. Potential (원통좌표 및 구좌표에서의 라플라스 방정식. 포텐셜)

- **Boundary Value Problem in Spherical Coordinates**

  - Assuming that the solution u will not depend on θ

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\sin\phi\frac{\partial u}{\partial \phi}\right)\right] = 0$$

$$u(R,\phi) = f(\phi)$$

$$\lim_{r\to\infty} u(r,\phi) = 0$$

- **Separating Variables**

$$u(r,\phi) = G(r)H(\phi) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{G}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dG}{dr}\right) = -\frac{1}{H\sin\phi}\frac{d}{d\phi}\left(\sin\phi\frac{dH}{d\phi}\right) = k$$

$$\therefore\ r^2\frac{d^2G}{dr^2} + 2r\frac{dG}{dr} = kG, \quad \frac{1}{\sin\phi}\frac{d}{d\phi}\left(\sin\phi\frac{dH}{d\phi}\right) + kH = 0$$

12.10 Laplace's Equation in Cylindrical and Spherical Coordinates. Potential (원통좌표 및 구좌표에서의 라플라스 방정식. 포텐셜)

1. $r^2 \dfrac{d^2G}{dr^2} + 2r\dfrac{dG}{dr} = kG$에서 $k = n(n+1)$라 하자.

$$r^2 \frac{d^2G}{dr^2} + 2r\frac{dG}{dr} - n(n+1)G = 0$$

Euler-Caucy Eqaution (Section 2.5)

12.10 Laplace's Equation in Cylindrical and Spherical Coordinates. Potential (원통좌표 및 구좌표에서의 라플라스 방정식. 포텐셜)

1. $r^2 \dfrac{d^2G}{dr^2} + 2r\dfrac{dG}{dr} = kG$에서 $k = n(n+1)$라 하자.

$$r^2 \frac{d^2G}{dr^2} + 2r\frac{dG}{dr} - n(n+1)G = 0$$ **Euler-Caucy Equation (Section 2.5)**

$$a(a-1) + 2a - n(n+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad a = n,\ -n-1 \quad \Rightarrow \quad G_n(r) = r^n, \quad G_n{}^*(r) = \frac{1}{r^{n+1}}$$

2. $\dfrac{1}{\sin\phi}\dfrac{d}{d\phi}\left(\sin\phi\dfrac{dH}{d\phi}\right) + kH = 0$에서 $\cos\phi = w$라 치환하자.

$$\frac{d}{d\phi} = \frac{d}{dw}\frac{dw}{d\phi} = -\sin\phi\frac{d}{dw} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dw}\left[\left(1-w^2\right)\frac{dH}{dw}\right] + n(n+1)H = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(1-w^2\right)\frac{d^2H}{dw^2} - 2w\frac{dH}{dw} + n(n+1)H = 0$$ **Legendre's Equation (Section 5.3)**

12.10 Laplace's Equation in Cylindrical and Spherical Coordinates. Potential (원통좌표 및 구좌표에서의 라플라스 방정식. 포텐셜)

- **Fourier-Legendre 급수의 사용**

- **Interior Problem: Potential Within the Sphere S**

$$u(r,\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(r,\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n r^n P_n(\cos\phi) \qquad (r\le R)$$

$$S\text{상에서의 Dirichlet 조건 적용} \Rightarrow u(R,\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n R^n P_n(\cos\phi)=f(\phi)$$

$$\text{Fourier-Legendre 급수 적용} \Rightarrow A_n R^n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}\tilde{f}(w)P_n(w)\,dw$$ **Section 5.8 (7)**

$$\Rightarrow \therefore A_n=\frac{2n+1}{2R^n}\int_0^{\pi}f(\phi)P_n(\cos\phi)\sin\phi\,d\phi$$

- **Exterior Problem: Potential Outside the Sphere S**

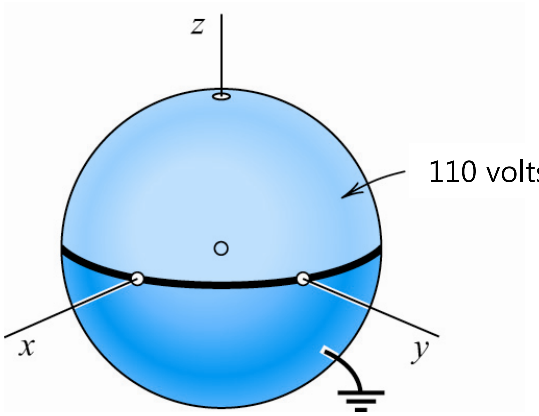
$$u(r,\phi)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{r^{n+1}}P_n(\cos\phi) \qquad (r\ge R)$$

$$\therefore B_n=\frac{2n+1}{2}R^{n+1}\int_0^{\pi}f(\phi)P_n(\cos\phi)\sin\phi\,d\phi$$

12.10 Laplace's Equation in Cylindrical and Spherical Coordinates. Potential (원통좌표 및 구좌표에서의 라플라스 방정식. 포텐셜)

■ Ex. 1 Spherical Capacitor

반지름 1피트의 두 금속 반구로 구성된 구형 축전기의 내부 및 외부의 퍼텐셜을 구하라. 두 반구는 절연을 위하여 작은 틈으로 분리되어 있고, 윗쪽의 반구는 110볼트로 유지되며, 아랫쪽은 접지되어 있다.



주어진 경계조건은 $f(\phi)=\begin{cases}110 & (0\le\phi\le\pi/2)\\ 0 & (\pi/2\le\phi\le\pi)\end{cases}$

$R=1 \quad \Rightarrow$

$$A_n=\frac{2n+1}{2}\cdot 110\int_0^{\pi/2}P_n(\cos\phi)\sin\phi\,d\phi=\frac{2n+1}{2}\cdot 110\int_0^1 P_n(w)\,dw$$

$$=55(2n+1)\sum_{m=0}^{M}(-1)^m\frac{(2n-2m)!}{2^n m!(n-m)!(n-2m)!}\int_0^1 w^{n-2m}dw$$

$$=\frac{55(2n+1)}{2^n}\sum_{m=0}^{M}(-1)^m\frac{(2n-2m)!}{m!(n-m)!(n-2m+1)!}$$

∴ 구의 내부 퍼텐셜 : $u(r,\phi)=55+\frac{165}{2}rP_1(\cos\phi)-\frac{385}{8}r^3P_3(\cos\phi)+\cdots$

∴ 구의 외부 퍼텐셜 : $u(r,\phi)=\frac{55}{r}+\frac{165}{2r^2}P_1(\cos\phi)-\frac{385}{8r^4}P_3(\cos\phi)+\cdots$

12.10 Laplace's Equation in Cylindrical and Spherical Coordinates. Potential (원통좌표 및 구좌표에서의 라플라스 방정식. 포텐셜)

PROBLEM SET 12.10

HW: 1, 11

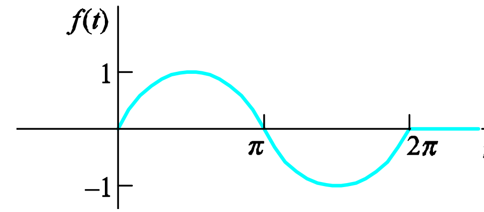
12.11 Solution of PDEs by Laplace Transforms (라플라스 변환에 의한 편미분방정식의 해)

- **라플라스 변환에 의하여 두 개의 독립변수를 갖는 편미분방정식의 해를 얻는 과정**
- 두 변수 중 하나에 관하여 라플라스 변환을 한다.
  그러면 미지함수의 변환식에 대한 상미분방정식이 얻어진다.
  주어진 경계 및 초기 조건은 변환된 방정식에 통합된다.
- 상미분방정식을 풀어서 미지함수의 변환식을 얻는다.
- 구한 변환식에 역변환을 적용하여 주어진 문제의 해를 얻는다.

12.11 Solution of PDEs by Laplace Transforms (라플라스 변환에 의한 편미분방정식의 해)

■ **Ex. 1 Semi-Infinite String (반무한 현)**

다음 조건을 따르는 탄성현의 변위 $w(x,t)$를 구하라.



(i) 현은 처음에 $x=0$에서 ∞까지 x축 상에 정지해 있다.(반무한 현)

(ii)시간 $t>0$에서는 현의 왼쪽 끝은 다음과 같은 방식으로 운동한다.

$$w(0,t)=f(t)=\begin{cases}\sin t & (0\le t\le 2\pi)\\ 0 & (\text{그 밖의 경우})\end{cases}$$

(iii)또한 $t\ge 0$에 대하여 $\lim_{x\to\infty} w(x,t)=0$이다.

물론 무한히 긴 현은 있을 수 없지만, 이 모델은 그 오른쪽 끝이 x축의 먼 곳에서 고정된 긴 현 또는 밧줄(중량을 무시할 수 있는)을 나타낸 것이다.

파동방정식 : $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=c^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ $\qquad c^2=\dfrac{T}{\rho}$

경계 조건 : $w(0,t)=f(t),\quad \lim_{x\to\infty} w(x,t)=0 \qquad (t\ge 0)$

초기 조건 : $w(x,0)=0,\qquad w_t(x,0)=0$

12.11 Solution of PDEs by Laplace Transforms (라플라스 변환에 의한 편미분방정식의 해)

t에 관하여 라플라스 변환 $\Rightarrow$ $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right\} = s^2\mathcal{L}\{w\} - sw(x,0) - w_t(x,0) = c^2\mathcal{L}\left\{\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right\}$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\infty e^{-st}w(x,t)dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{L}\{w(x,t)\} \quad \Rightarrow \quad s^2\mathcal{L}\{w\} = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{L}\{w(x,t)\}$$

$$W = \mathcal{L}\{w\} \quad \Rightarrow \quad s^2 W = c^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{s^2}{c^2}W = 0 \quad \Rightarrow \quad W(x,s) = A(s)e^{sx/c} + B(s)e^{-sx/c}$$

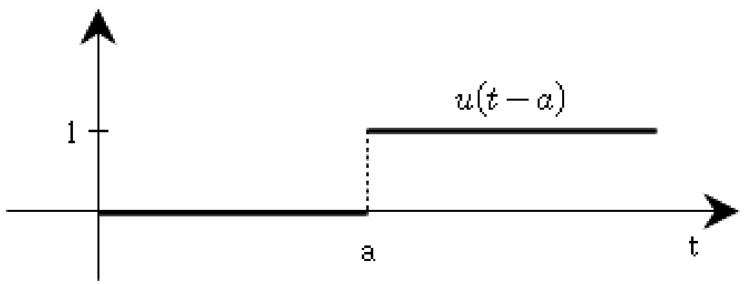
$$W(0,s) = \mathcal{L}\{w(0,t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s), \quad \lim_{x\to\infty} W(x,s) = \lim_{x\to\infty}\int_0^\infty e^{-st}w(x,t)dt = \int_0^\infty e^{-st}\lim_{x\to\infty} w(x,t)dt = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} W(x,s) = A(s) = 0, \quad W(0,s) = A(s) + B(s) = F(s)$$

$$\therefore\ W(x,s) = F(s)e^{-sx/c}$$

6.3 Unit Step Function. t-Shifting (단위계단함수. t-이동)

- **Unit Step Function(단위계단함수)의 라플라스 변환**
  - **Unit step function or Heaviside function:** $u(t-a)=\begin{cases}0 & (t<a)\\ 1 & (t>a)\end{cases}$
  - **단위계단함수의 라플라스 변환 :** $\mathcal{L}\{u(t-a)\}=\dfrac{e^{-as}}{s}$ **Prove!**



- **Second Shifting Theorem (제 2이동정리), Time Shifting (t-이동)**

$$\mathcal{L}(f(t))=F(s)\quad\Rightarrow\quad \mathcal{L}(f(t-a)u(t-a))=e^{-as}F(s),\quad f(t-a)u(t-a)=\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}$$

12.11 Solution of PDEs by Laplace Transforms
(라플라스 변환에 의한 편미분방정식의 해)

t에 관하여 라플라스 변환 $\Rightarrow$ $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right\} = s^2\mathcal{L}\{w\} - sw(x,0) - w_t(x,0) = c^2\mathcal{L}\left\{\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right\}$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^\infty e^{-st}w(x,t)dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{L}\{w(x,t)\} \quad \Rightarrow \quad s^2\mathcal{L}\{w\} = c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathcal{L}\{w(x,t)\}$$

$$W = \mathcal{L}\{w\} \quad \Rightarrow \quad s^2 W = c^2\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{s^2}{c^2}W = 0 \quad \Rightarrow \quad W(x,s) = A(s)e^{sx/c} + B(s)e^{-sx/c}$$

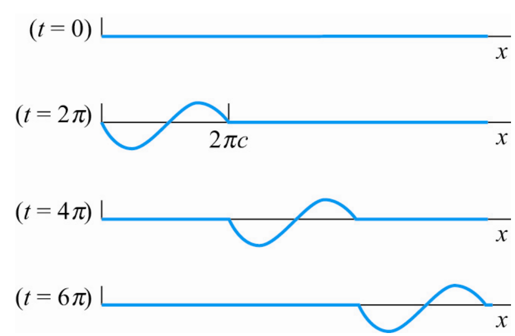
$$W(0,s) = \mathcal{L}\{w(0,t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s), \quad \lim_{x\to\infty} W(x,s) = \lim_{x\to\infty}\int_0^\infty e^{-st}w(x,t)dt = \int_0^\infty e^{-st}\lim_{x\to\infty} w(x,t)dt = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} W(x,s) = A(s) = 0, \quad W(0,s) = A(s) + B(s) = F(s)$$

$$\therefore\ W(x,s) = F(s)e^{-sx/c}$$

$(t-2\pi)c < x < ct$

역변환 $\Rightarrow$ $w(x,t) = f\left(t - \dfrac{x}{c}\right)u\left(t - \dfrac{x}{c}\right) = \begin{cases} \sin\left(t - \dfrac{x}{c}\right) & \left(\dfrac{x}{c} < t < \dfrac{x}{c} + 2\pi\right) \\ 0 & \text{(그 밖의 경우)} \end{cases}$



12.11 Solution of PDEs by Laplace Transforms (라플라스 변환에 의한 편미분방정식의 해)

PROBLEM SET 12.11

HW: 8