Engineering Mathematics II

Prof. Dr. Yong-Su Na

(32-206, Tel. 880-7204)

Text book: Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 9th Edition, Wiley (2006)

Ch. 13 Complex Numbers and Functions

Ch. 13 Complex Numbers and Functions (복소수와 복소함수)

- 내용: 복소수와 복소평면에서의 기하학적 표현,
  Cauchy-Riemann 방정식에 근거한 해석성에 대한 검사법,
  초등 복소함수

13.1 Complex Numbers. Complex Plane (복소수와 복소평면)

- **Complex Numbers (복소수):** 실수 x, y의 순서쌍 $z = (x, y) = x + iy$
  - **Real Part (실부):** $x = \mathrm{Re}\, z$
  - **Imaginary Part (허부):** $y = \mathrm{Im}\, z$
  - **Imaginary Unit (허수단위):** $i = (0, 1)$
  - **Pure Imaginary (순허수):** $z = iy$ $(x = 0)$

- **Addition, Subtraction, Multiplication, Division**
  - **Addition:** $(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
  - **Multiplication:** $(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$
  - **Subtraction:** $(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$
  - **Division:** $\dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \dfrac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}} + i\,\dfrac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^{\,2} + y_2^{\,2}}$

13.1 Complex Numbers. Complex Plane (복소수와 복소평면)

- **Ex. 1, 2 Sum, Product, Difference and Quotient of Complex Numbers**

  $z_1 = 8+3i,\ z_2 = 9-2i$

13.1 Complex Numbers. Complex Plane (복소수와 복소평면)

- **Ex. 1, 2 Sum, Product, Difference and Quotient of Complex Numbers**

$z_1 = 8+3i,\ z_2 = 9-2i$

$z_1+z_2 = 17+i,\ z_1-z_2 = -1+5i,\ z_1 z_2 = 78+11i,\ z_1/z_2 = 66/85+(43/85)i$

13.1 Complex Numbers. Complex Plane (복소수와 복소평면)

- **Complex Plane (복소평면):** 복소수를 평면상의 점으로 기하학적으로 표시한 것

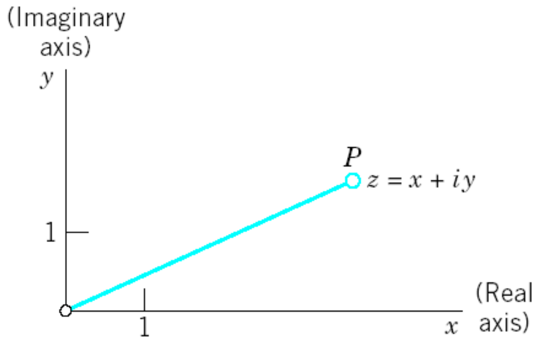


Fig. 315. The complex plane

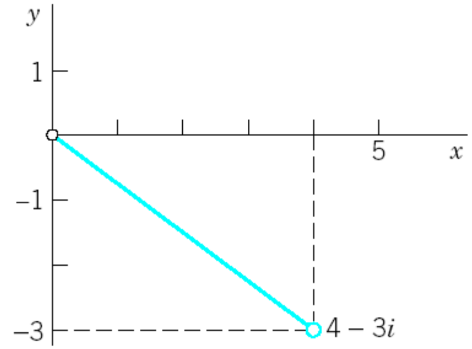


Fig. 316. The number $4 - 3i$ in the complex plane

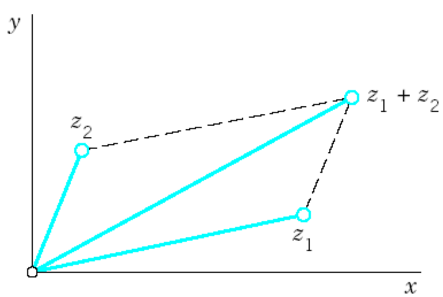


Fig. 317. Addition of complex numbers

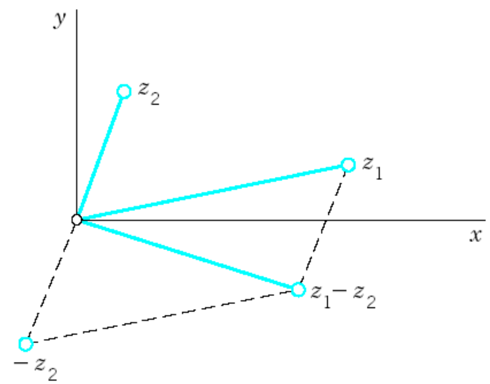
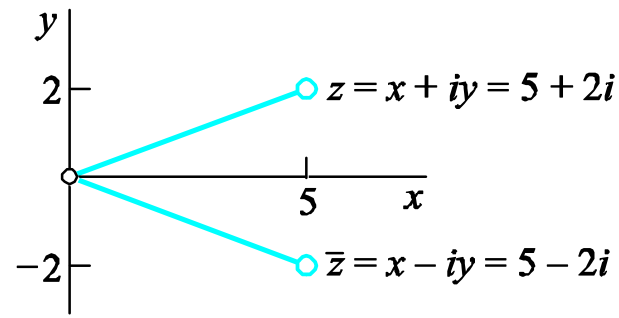


Fig. 318. Subtraction of complex numbers

13.1 Complex Numbers. Complex Plane (복소수와 복소평면)

- **Complex Conjugate Number (공액복소수)**

$\bar{z} = x - iy$: $z = x + iy$ 의 공액복소수



- $\operatorname{Re} z = x = \dfrac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = y = \dfrac{1}{2i}(z - \bar{z})$
- $\overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{(z_1 - z_2)} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
- $\overline{(z_1 \cdot z_2)} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

■ **Ex. 3 Complex Conjugate Numbers**

$z_1 = 4+3i, \ z_2 = 2+5i$

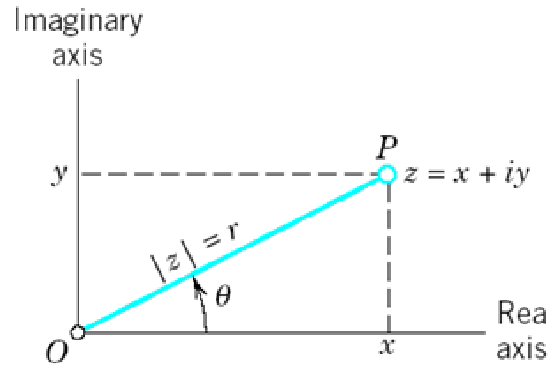
13.1 Complex Numbers. Complex Plane (복소수와 복소평면)

PROBLEM SET 13.1

HW: 2

13.2 Polar Form of Complex Numbers. Powers and Roots (복소수의 극형식. 거듭제곱과 근)

- **Polar Form (극형식):** $z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$



- **Absolute value or modulus (절대값 또는 크기):**

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

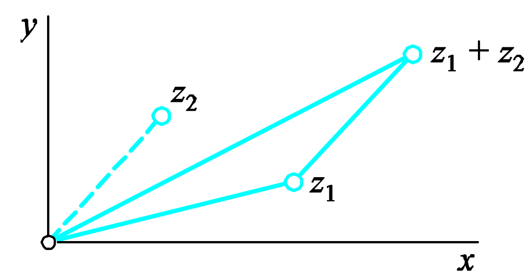
- **Argument (편각):** $\theta = \arg z = \arctan\dfrac{y}{x}$

- **Principal Value (주값):** $\mathrm{Arg}\, z : \arg z$의 주값, $-\pi < \mathrm{Arg}\, z \le \pi$

- **Triangle Inequality:** $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

- **Generalized Triangle Inequality:**

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \le |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$$



13.2 Polar Form of Complex Numbers. Powers and Roots (복소수의 극형식. 거듭제곱과 근)

- **Multiplication and Division in Polar Form (극형식에서의 곱셈과 나눗셈)**

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

- **Multiplication:** $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$

곱의 절대값은 각 인자의 절대값들의 곱과 같다. $\left(|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \right)$

곱의 편각은 각 인자의 편각의 합과 같다. $\left(\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \right)$

- **Division:** $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$$

$$[r(\cos\theta + i\sin\theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

- **De Moivre's Formula** $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta, \ \sin 2\theta = 2\cos\theta\sin\theta$$

Prove!

13.2 Polar Form of Complex Numbers. Powers and Roots (복소수의 극형식. 거듭제곱과 근)

- **Roots (근)**

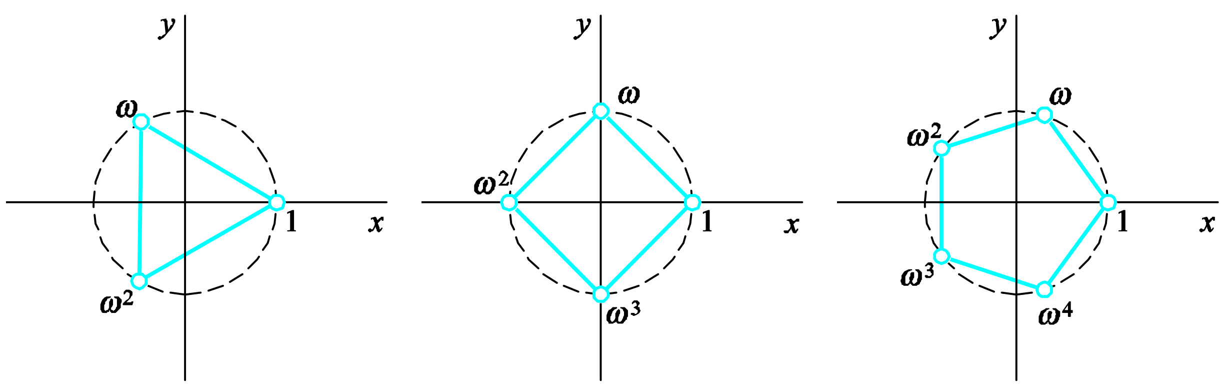
- ***n*th Root (*n* 제곱근):** $z = w^n$ 을 만족하는 w 값들

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \qquad (k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$$

Prove!

- ***n*th roots of unity (단위 *n* 제곱근):** $\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \qquad (k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$

한 꼭지점이 1에 있으면서 단위원에 내접한 n개의 변을 가진 정다각형의 꼭지점들



$n = 3$　　$n = 4$　　$n = 5$

13.2 Polar Form of Complex Numbers. Powers and Roots (복소수의 극형식. 거듭제곱과 근)

PROBLEM SET 13.2

HW: 26 (a), (b), (c), 35

13.3 Derivative. Analytic Function
(도함수와 해석함수)

- **Circles and Disks. Half-Planes (원과 원판. 반평면)**
  - **Unit Circle (단위원):** $|z| = 1$
  - **Open Circular Disk (열린 원판):** $|z-a| < \rho$
  - **Closed Circular Disk (닫힌 원판):** $|z-a| \le \rho$
  - **Neighborhood (근방):** $|z-a| < \rho$ 인 열린 원판
  - **Open Annulus (열린 환형):** $\rho_1 < |z-a| < \rho_2$
  - **Closed Annulus (닫힌 환형):** $\rho_1 \le |z-a| \le \rho_2$
  - **(Open)Upper Half-Plane ((열린)상반평면):** $y > 0$인 점들의 집합
  - **Lower Half-Plane (하반평면):** $y < 0$인 점들의 집합
  - **Right Half-Plane (우반평면):** $x > 0$인 점들의 집합
  - **Left Half-Plane (좌반평면):** $x > 0$인 점들의 집합

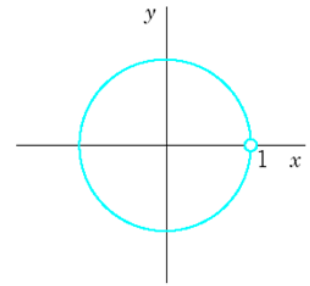


Fig. 327. Unit circle

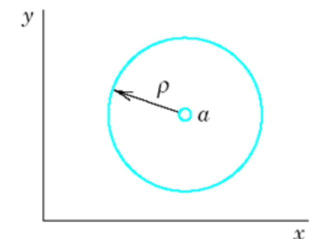


Fig. 328. Circle in the complex plane

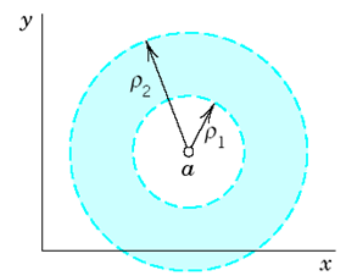


Fig. 329. Annulus in the complex plane

13.3 Derivative. Analytic Function (도함수와 해석함수)

- **For Reference: Concepts on Sets in the Complex Plane (복소평면에서 집합과 관련된 몇 가지 개념)**

- **Point Set (점집합):** 유한 또는 무한의 많은 점들의 집합
- **Open (열렸다):** 집합의 모든 점이 오로지 집합에 속해 있는 점들로만 구성된 근방을 가지고 있을 때
- **Connected (연결되었다):** 집합의 어떤 두 점도 집합에 속하는 점들로만 이루어진 유한한 선분의 Broken Line(파선)으로 이어질 때
- **Domain (영역):** Open Connected Set (열린 연결집합)
- **Complement (여집합):** 집합에 속하지 않는 복소평면 내의 모든 점들의 집합
- **Boundary point (경계점):** 점의 모든 근방이 집합에 속하는 점과 속하지 않는 점을 둘 다 포함하는 점
- **Boundary (경계):** 모든 경계점의 집합
- **Region (영역):** Domain과 그의 경계점의 일부 또는 전부의 합으로 이루어진 집합 ~ Domain

13.3 Derivative. Analytic Function
(도함수와 해석함수)

- **Complex Function (복소함수):** 복소수 집합의 각각의 원소에서의 함수값이라 불리는 복소수 *w*를 지정해 주는 규칙

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

- **Complex Variable (복소변수):** z
- **Domain (정의역):** 복소변수의 집합 S
- **Range (치역):** 함수의 모든 값의 집합

■ Ex. 1 Function of a Complex Variable (복소변수의 함수)

$w = f(z) = z^2 + 3z$ Find u and v and calculate the value of f at $z=1+3i$.

13.3 Derivative. Analytic Function
(도함수와 해석함수)

- **Complex Function (복소함수):** 복소수 집합의 각각의 원소에서의 함수값이라 불리는 복소수 *w*를 지정해 주는 규칙

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

- **Complex Variable (복소변수):** z
- **Domain (정의역):** 복소변수의 집합 S
- **Range (치역):** 함수의 모든 값의 집합

■ **Ex. 1 Function of a Complex Variable (복소변수의 함수)**

$w = f(z) = z^2 + 3z$ Find u and v and calculate the value of f at $z=1+3i$.

$$u = \operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 + 3x, \quad v = 2xy + 3y$$

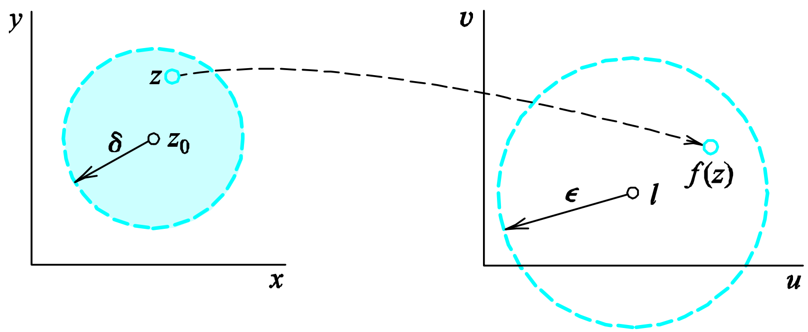
$$f(1+3i) = (1+3i)^2 + 3(1+3i) = 1 - 9 + 6i + 3 + 9i = -5 + 15i$$

13.3 Derivative. Analytic Function (도함수와 해석함수)

- **Limit, Continuity, Derivative (극한, 연속성, 도함수)**

- $\lim_{z \to z_0} f(z) = l$

  $\Leftrightarrow$ 함수 $f(z)$가 z_0의 근방에서 정의되고, z_0에 근접한 모든 z에 대해 f 값이 l에 근접



실수의 경우에는 단지 실수축을 따라서만 x가 x_0로 접근할 수 있지만, z는 복소평면에서 임의의 방향으로부터 z_0에 접근할 수 있음.

- **Continuity:** 함수 $f(z)$가 $z = z_0$에서 연속 $\Leftrightarrow$ $f(z)$가 정의되고 $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$이다

- **Derivative:** $f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$

13.3 Derivative. Analytic Function (도함수와 해석함수)

■ Ex. 3 Differentiability. Derivative (미분가능성. 도함수)

The function $f(z)=z^2$ is differentiable for all z and has the derivative $f'(z)=2z$.

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^2-z^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{z^2+2z\Delta z+(\Delta z)^2-z^2}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\left(2z\Delta z+(\Delta z)^2\right)=2z$$

● Differentiation Rules (미분 규칙)

- $(cf)'=cf'$, $(f+g)'=f'+g'$, $(fg)'=f'g+fg'$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$
- 연쇄법칙과 거듭제곱 규칙 $(z^n)'=nz^{n-1}$이 성립
- $f(z)$가 z_0에서 미분가능이면 z_0에서 연속이다.

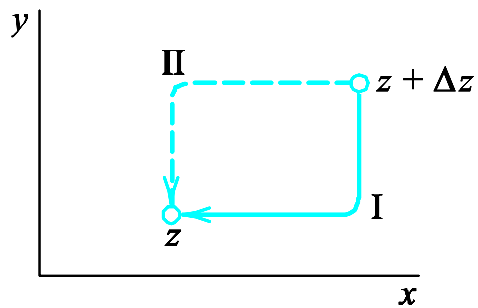
13.3 Derivative. Analytic Function
(도함수와 해석함수)

■ **Ex. 4 Not Differentiable**

$$f(z) = \bar{z} = x - iy$$

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\overline{(z+\Delta z)} - \bar{z}}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} = \begin{cases} 1 & \Delta y = 0 \\ -1 & \Delta x = 0 \end{cases}$$

$\therefore$ 극한은 어떠한 z에서도 존재하지 않는다.



복소함수의 미분가능성은 보다 엄격한 조건을 요구함.

13.3 Derivative. Analytic Function
(도함수와 해석함수)

- **Analytic Functions (해석함수)**

- **Analytic (해석적):** 함수가 정의역의 모든 점에서 정의되고 미분가능일 때

- **Analytic Functions:** 정의역에서 해석적인 함수

- **Ex. 5 Polynomials, Rational Functions (다항식. 유리함수)**

정수 거듭제곱 $1,\ z,\ z^2,\ \cdots$은 전 복소평면에서 해석적이다.

$\Rightarrow$ 다항식 $f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\cdots+c_nz^n$도 해석적이다.

$\Rightarrow$ 유리함수(Rational Function) $f(z)=\dfrac{g(z)}{h(z)}$ ($g(z),\ h(z)$는 다항식)도 해석적이다.

($h(z)=0$인 점 제외)

13.3 Derivative. Analytic Function
(도함수와 해석함수)

PROBLEM SET 13.3

HW: 15, 17, 22

13.4 Cauchy-Riemann Equations. Laplace's Equation

- **Cauchy-Riemann Equation:** $u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$
- **Cauchy-Riemann Equation**

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$가 한 점 $z = x + iy$ 의 어떤 근방에서 정의되고 연속이며 미분가능하다.

→ 그 점에서 u와 v의 1계 편도함수가 존재하고 Cauchy-Riemann 방정식을 만족한다.

$* \quad f'(z) = u_x + iv_x = -iu_y + v_y$ **Prove!**

- **Cauchy-Riemann Equation**

실변수 x및 y의 두 실수값을 가지는 연속함수 $u(x, y)$ 및 $v(x, y)$가 정의역에서 Cauchy – Riemann 방정식을 만족하는 연속인 1계 편도함수를 갖는다.

$\Rightarrow$ 그 복소함수 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$는 해석적이다.

13.4 Cauchy-Riemann Equations. Laplace's Equation

- **Ex. 2 Cauchy-Riemann Equations. Exponential Function (지수함수)**

  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = e^x(\cos y + i \sin y)$ analytic?

13.4 Cauchy-Riemann Equations. Laplace's Equation

- **Ex. 2 Cauchy-Riemann Equations. Exponential Function (지수함수)**

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = e^x(\cos y + i\sin y)$ analytic?

$$u = e^x \cos y, \quad v = e^x \sin y$$

$$\Rightarrow \quad u_x = e^x \cos y, \quad v_y = e^x \cos y, \quad u_y = -e^x \sin y, \quad v_x = e^x \sin y$$

$\Rightarrow$ Cauchy-Riemann 방정식을 만족

$\Rightarrow$ $f(z)$는 모든 z에서 해석적이다.

13.4 Cauchy-Riemann Equations. Laplace's Equation

- **Ex. 3 An Analytic Function of Constant Absolute Value Is Constant**

  $f(z)$ is analytic in a domain D and $|f(z)| = k = const$ in D, then $f(z) = const$ in D.

13.4 Cauchy-Riemann Equations. Laplace's Equation

- **Ex. 3 An Analytic Function of Constant Absolute Value Is Constant**

  $f(z)$ is analytic in a domain D and $|f(z)|=k=$const in D, then $f(z)=const$ in D.

$$|f(z)| = k = \text{상수} \quad \Rightarrow \quad |f|^2 = |u+iv|^2 = u^2 + v^2 = k^2$$

$$\text{미분 적용} \quad \Rightarrow \quad uu_x + vv_x = 0,\ uu_y + vv_y = 0$$

Cauchy - Riemann 방정식 적용

$$\Rightarrow \quad uu_x - vu_y = 0,\ uu_y + vu_x = 0$$

$$\Rightarrow \quad (u^2+v^2)u_x = 0,\ (u^2+v^2)u_y = 0$$

$$\text{(i)} \quad k^2 = u^2 + v^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad u = v = 0 \quad \Rightarrow \quad f = 0$$

$$\text{(ii)} \quad k^2 = u^2 + v^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad u_x = u_y = 0 \quad \Rightarrow \quad u = \text{상수}$$

Cauchy - Riemann 방정식 적용

$$\Rightarrow \quad v_x = v_y = 0 \quad \Rightarrow \quad v = \text{상수}$$

$$\therefore\ f = \text{상수}$$

13.4 Cauchy-Riemann Equations. Laplace's Equation

- **Laplace's Equation**

  $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$가 정의역 D에서 해석적이다.

  $\Rightarrow$ u와 v는 D에서 각각 라플라스 방정식을 만족하며 연속인 2계 편도함수를 갖는다.

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$\nabla^2 v = v_{xx} + v_{yy} = 0$$

$$u_x = v_y, \ u_y = -v_x$$

$$u_{xx} = v_{yx}, \ u_{yy} = -v_{xy}$$

$$u_{xy} = v_{yy}, \ u_{yx} = -v_{xx}$$

- **Harmonic function:** 연속인 이계 편도함수를 갖는 라플라스 방정식의 해

- **Conjugate harmonic function (공액조화함수):** 두 조화함수 u 및 v가 한 정의역 D에서 Cauchy-Riemann 방정식을 만족하면, 그들은 D에서 어떤 해석함수 f의 실수부 및 허수부가 된다. 이 때 v를 D에서 u의 공액조화함수라 함.

13.4 Cauchy-Riemann Equations. Laplace's Equation

- **Ex. 4 How to Find a Harmonic Conjugate Function by the Cauchy-Riemann Equations**

  Verify that $u = x^2 - y^2 - y$ is harmonic in the whole complex plane and find a harmonic conjugate function v of u.

13.4 Cauchy-Riemann Equations. Laplace's Equation

- **Ex. 4 How to Find a Harmonic Conjugate Function by the Cauchy-Riemann Equations**

  Verify that $u=x^2-y^2-y$ is harmonic in the whole complex plane and find a harmonic conjugate function v of u.

$$u_x = 2x, \quad u_y = -2y-1 \quad \Rightarrow \quad u_{xx} = 2, \quad u_{yy} = -2 \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 u = 0$$

$\therefore$ u는 조화함수이다.

공액조화함수 v 구하기

$$v_y = u_x = 2x, \quad v_x = -u_y = 2y+1 \quad \Rightarrow \quad v = 2xy + h(x)$$

$$\Rightarrow \quad v_x = 2y + \frac{dh}{dx} = 2y+1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dh}{dx} = 1 \quad \Rightarrow \quad h = x + c$$

$$\therefore \; v = 2xy + x + c$$

$$f(z) = u + iv = x^2 - y^2 - y + i(2xy + x + c) = z^2 + iz + ic$$

13.4 Cauchy-Riemann Equations. Laplace's Equation

PROBLEM SET 13.4

HW: 11, 23, 27

13.5 Exponential Function (지수함수)

- **Exponential Function (복소 지수함수):** $e^z = \exp z = e^x(\cos y + i\sin y)$

(i) 실수 $z = x$에 대하여 $e^z = e^x$ $(\because y = 0 \;\Rightarrow\; \cos y = 1,\; \sin y = 0)$

(ii) e^z은 모든 z에 대하여 해석적이다.

(iii) e^z의 도함수 $(e^z)' = e^z$ $\left(\because (e^z)' = (e^x\cos y)_x + i(e^x \sin y)_x = e^x\cos y + ie^x\sin y = e^z\right)$

$\therefore$ e^z은 실지수함수 e^x의 자연스러운 확장이다.

- **Further Properties**

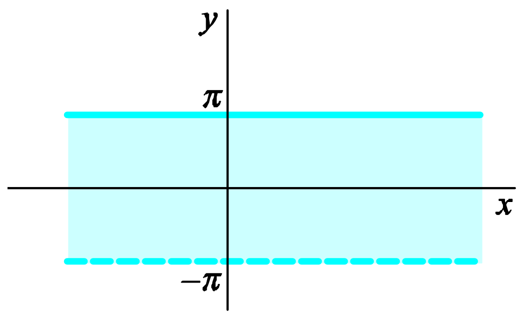
- e^z은 완전함수(모든 z에 대하여 해석적인 함수)이다.
- $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$ 특히, $e^z = e^x e^{iy} \;\Rightarrow\; e^{iy} = \cos y + i\sin y$(오일러공식) **Prove!**
- 복소수의극형식 : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} \;\Rightarrow\; e^{2\pi i} = 1$
- $e^z \neq 0$

13.5 Exponential Function (지수함수)

- **Periodicity:** $e^{z+2\pi i} = e^{z}$

  $\therefore\ w = e^{z}$가 가질 수 있는 모든 값은 폭 2π인 수평띠 안에 있게 된다.

  기본영역(Fundamental Region) : $w = e^{z}$의 모든 값이 만드는 무한 띠



■ **Ex. 1 Function Values. Solution of Equations.**

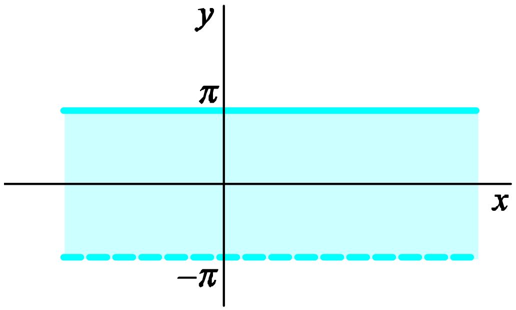
$$e^{z} = 3 + 4i$$

13.5 Exponential Function (지수함수)

- **Periodicity:** $e^{z+2\pi i} = e^{z}$

  $\therefore\ w = e^{z}$가 가질 수 있는 모든 값은 폭 2π인 수평띠 안에 있게 된다.

  기본영역(Fundamental Region) : $w = e^{z}$의 모든 값이 만드는 무한 띠



- **Ex. 1 Function Values. Solution of Equations.**

$$e^{z} = 3 + 4i$$

$$\left|e^{z}\right| = e^{x} = 5 \quad \Rightarrow \quad x = \ln 5 = 1.609$$

$$e^{x} = 5, \quad e^{x}\cos y = 3, \quad e^{x}\sin y = 4 \quad \Rightarrow \quad \cos y = 0.6, \quad \sin y = 0.8 \quad \Rightarrow \quad y = 0.927$$

$$\therefore\ z = 1.609 + 0.927i \pm 2n\pi i \ \ (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

13.5 Exponential Function (지수함수)

PROBLEM SET 13.5

HW: 15, 22

13.6 Trigonometric and Hyperbolic Functions (삼각함수와 쌍곡선 함수)

- **Definitions**

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right), \quad \sin z = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

- **Properties**
  - $\cos z$와 $\sin z$는 완전함수이다.
  - $\tan z$와 $\sec z$는 $\cos z = 0$인 점을 제외하고는 해석적이다.
  - $\cot z$와 $\csc z$는 $\sin z = 0$인 점을 제외하면 해석적이다.
  - $(\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z, \quad (\tan z)' = \sec^2 z$

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

13.6 Trigonometric and Hyperbolic Functions (삼각함수와 쌍곡선 함수)

- **Ex. 1 Real and Imaginary Parts. Absolute Value. Periodicity**

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$$

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$$

$$\cosh z = \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right), \quad \sinh z = \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right)$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z},$$

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \quad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z}$$

13.6 Trigonometric and Hyperbolic Functions (삼각함수와 쌍곡선 함수)

■ **Ex. 1 Real and Imaginary Parts. Absolute Value. Periodicity**

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$$

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$$

$$\cosh z = \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right), \quad \sinh z = \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right)$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z},$$

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \quad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z}$$

$$\begin{aligned} \cos z &= \tfrac{1}{2}\left(e^{i(x+iy)} + e^{-i(x+iy)}\right) \\ &= \tfrac{1}{2}e^{-y}(\cos x + i \sin x) + \tfrac{1}{2}e^{y}(\cos x - i \sin x) \\ &= \tfrac{1}{2}(e^{y} + e^{-y}) \cos x - \tfrac{1}{2}i(e^{y} - e^{-y}) \sin x. \end{aligned}$$

13.6 Trigonometric and Hyperbolic Functions (삼각함수와 쌍곡선 함수)

■ **Ex. 2 Solutions of Equations. Zeros of cos *z* and sin *z***

Solve $\cos z = 5$ (which has no real solution!)

13.6 Trigonometric and Hyperbolic Functions (삼각함수와 쌍곡선 함수)

- **Ex. 2 Solutions of Equations. Zeros of cos z and sin z**

Solve $\cos z = 5$ (which has no real solution!)

$$\cos z = 5$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = 5$$

$$\Rightarrow \quad e^{2iz} - 10e^{iz} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad e^{iz} = e^{-y+ix} = 5 \pm \sqrt{25-1} = 9.899\text{와 } 0.101$$

$$\therefore \; e^{-y} = 9.899 \quad \text{또는} \quad 0.101, \qquad e^{ix} = 1$$

$$\Rightarrow \quad y = \pm 2.292, \quad x = 2n\pi$$

$$\therefore \; z = \pm 2n\pi \pm 2.292i \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$$

13.6 Trigonometric and Hyperbolic Functions (삼각함수와 쌍곡선 함수)

- **General Formulas**
  - $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$, $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$
  - $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$

- **Hyperbolic Functions (쌍곡선 함수)**

$$\cosh z = \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right), \quad \sinh z = \frac{1}{2}\left(e^z - e^{-z}\right)$$

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}, \quad \operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \quad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z}$$

- **Formulas**
  - $(\cosh z)' = \sinh z, \quad (\sinh z)' = \cosh z$
  - 복소삼각함수와 쌍곡선 함수의 관계 $\cosh iz = \cos z, \quad \sinh iz = i \sin z$

$$\cos iz = \cosh z, \quad \sin iz = i \sinh z$$

서로 무관한 실함수들이 유사한 형태의 복소함수에서는 서로 유관하게 됨.

13.6 Trigonometric and Hyperbolic Functions (삼각함수와 쌍곡선 함수)

PROBLEM SET 13.6

HW: 16, 17

13.7 Logarithm. General Power (로그. 일반 거듭제곱)

- **Natural Logarithm (자연로그):** 지수함수의 역함수로 정의 $\left(w = \ln z \;\; (z \neq 0) \Leftrightarrow \;\; e^{w} = z\right)$

$$z = e^{w} = e^{u+iv} = re^{i\theta} \quad \Rightarrow \quad e^{u} = r, \quad v = \theta \quad \Rightarrow \quad u = \ln r \quad \therefore \; \mathrm{w} = \ln z = u + iv = \ln r + i\theta$$

- **Principal Value (주값):** $\mathrm{Ln} z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z = \ln r + i\theta$

$$\ln z = \mathrm{Ln}\, z \pm 2n\pi i = \ln r + i(\theta \pm 2n\pi)$$

- 자연로그에 대한 관계식
  - $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$
  - $\ln\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \ln z_1 - \ln z_2$
  - $\mathrm{Ln}(z_1 z_2) \neq \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2$

■ $z_1 = z_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Ln}\, z_1 = \mathrm{Ln}\, z_2 = \pi i \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Ln}(z_1 z_2) = \mathrm{Ln} 1 = 0, \quad \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2 = 2\pi i$

$\therefore \; \mathrm{Ln}(z_1 z_2) \neq \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2$

13.7 Logarithm. General Power (로그. 일반 거듭제곱)

- **Analyticity of the Lagarithm (로그의 해석성)**
  - 모든 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$에 대하여 로그함수는 0과 음의 실축을 제외한 점에서 해석적이다.
  - $(\ln z)' = \dfrac{1}{z}$ (z는 0 또는 음의 실수가 아님)

$$\ln z = \ln r + i(\theta \pm 2n\pi) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + i\left(\arctan\frac{y}{x} \pm 2n\pi\right)$$

13.7 Logarithm. General Power
(로그. 일반 거듭제곱)

- **Analyticity of the Lagarithm (로그의 해석성)**
  - 모든 $n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots$에 대하여 로그함수는 0과 음의 실축을 제외한 점에서 해석적이다.
  - $(\ln z)' = \dfrac{1}{z}$ (z는 0 또는 음의 실수가 아님)

$$\ln z = \ln r + i(\theta \pm 2n\pi) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + i\left(\arctan\frac{y}{x} \pm 2n\pi\right)$$

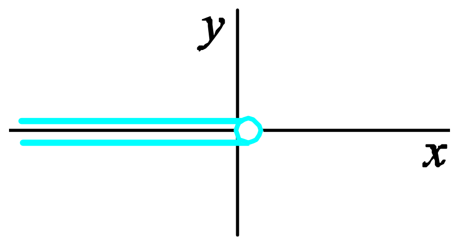
$$u_x = \frac{x}{x^2+y^2} = v_y = \frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{1}{x}$$

$$u_y = \frac{y}{x^2+y^2} = -v_x = -\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$(\ln z)' = u_x + iv_x = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{1}{z}$$

13.7 Logarithm. General Power (로그. 일반 거듭제곱)

- **Analyticity of the Lagarithm (로그의 해석성)**
  - 모든 $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$에 대하여 로그함수는 0과 음의 실축을 제외한 점에서 해석적이다.
  - $(\ln z)' = \dfrac{1}{z}$ (z는 0 또는 음의 실수가 아님)



- **Branch (가지):** 무한개의 많은 로그 함수
- **Branch Cut (가지절단):** 음의 실축
- **Principal Branch (주가지):** n = 0 인 가지

13.7 Logarithm. General Power (로그. 일반 거듭제곱)

- **General Power (일반 거듭제곱)**

$$z^c = e^{c \ln z} \quad (c \text{ complex}, \ z \neq 0) \qquad a^z = e^{z \ln a} \quad (a \text{ comples number})$$

- **Principal Value (주값):** $z^c = e^{c \,\mathrm{Ln}\, z}$

Ex. 3 General Power

$$i^i, \ (1+i)^{2-i}$$

13.7 Logarithm. General Power (로그. 일반 거듭제곱)

- **General Power (일반 거듭제곱)**

$$z^c = e^{c \ln z} \quad (c \text{ complex, } z \neq 0) \qquad a^z = e^{z \ln a} \quad (a \text{ comples number})$$

- **Principal Value (주값):** $z^c = e^{c \,\mathrm{Ln}\, z}$

■ **Ex. 3 General Power**

$$i^i,\ (1+i)^{2-i}$$

$$\mathrm{Lnz} = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z = \ln r + i\theta$$

$$i^i = e^{i \ln i} = \exp(i \ln i) = \exp\left[i\left(\frac{\pi}{2} i \pm 2n\pi i\right)\right] = e^{-\frac{\pi}{2} \mp 2n\pi}$$

$$\ln z = \mathrm{Ln}\, z \pm 2n\pi i = \ln r + i(\theta \pm 2n\pi)$$

13.7 Logarithm. General Power (로그. 일반 거듭제곱)

- **General Power (일반 거듭제곱)**

$$z^c = e^{c\ln z} \quad (c \text{ complex, } z \neq 0) \qquad a^z = e^{z\ln a} \quad (a \text{ comples number})$$

- **Principal Value (주값):** $z^c = e^{c\,\mathrm{Ln}\,z}$

Ex. 3 General Power

$$i^i,\ (1+i)^{2-i}$$

$$\mathrm{Ln} z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z = \ln r + i\theta$$

$$\ln z = \mathrm{Ln}\,z \pm 2n\pi i = \ln r + i(\theta \pm 2n\pi)$$

$$i^i = e^{i\ln i} = \exp(i\ln i) = \exp\left[i\left(\frac{\pi}{2}i \pm 2n\pi i\right)\right] = e^{-\frac{\pi}{2}\mp 2n\pi}$$

$$(1+i)^{2-i} = \exp[(2-i)\ln(1+i)] = \exp\left[(2-i)\left\{\ln\sqrt{2} + \frac{1}{4}\pi i \pm 2n\pi i\right\}\right]$$

$$= 2e^{\frac{\pi}{4}\pm 2n\pi}\left[\sin\left(\frac{1}{2}\ln 2\right) + i\cos\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)\right]$$

13.7 Logarithm. General Power
(로그. 일반 거듭제곱)

PROBLEM SET 13.7

HW: 17, 30 (a), (f)