Engineering Mathematics II

Prof. Dr. Yong-Su Na

(32-206, Tel. 880-7204)

Text book: Erwin Kreyszig, Advanced Engineering Mathematics, 9th Edition, Wiley (2006)

Ch. 16 Laurent Series. Residue Integration

Ch. 16 Laurent Series, Residue Integration
(Laurent 급수. 유수적분)

- 내용: Laurent 급수, 유수적분

$$1/(1-z)$$

$$(a)\quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z|<1\text{일 때 유효})$$

$$(b)\quad \frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z(1-z^{-1})} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = -\frac{1}{z}-\frac{1}{z^2}-\cdots \quad (|z|>1\text{일 때 유효})$$

16.1 Laurent Series (Laurent 급수)

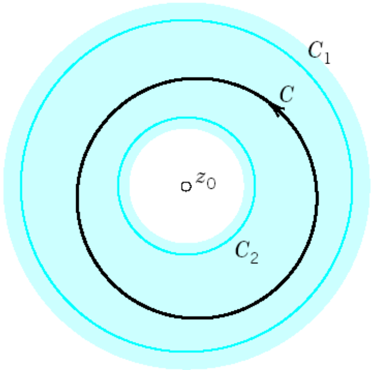
- **Laurent Series:** 음이 아닌 거듭제곱과 음수의 거듭제곱으로 이루어진 급수

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots+\frac{b_1}{z-z_0}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\cdots$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z^*)}{(z^*-z_0)^{n+1}}dz^*,\quad b_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C(z^*-z_0)^{n-1}f(z^*)dz^*$$

C : z_0를 둘러싸는 단순 닫힌 경로

적분방향 : 반시계방향



- **Laurent's Theorem**

$f(z)$: 중심이 z_0인 두 동심원 C_1, C_2와 동심원 사이의 환형을 포함하는 영역에서 해석적

$\Rightarrow$ $f(z)$는 Laurent 급수로 표현 가능

- **Principal Part (주부)**

z_0가 C_2 내에서 $f(z)$의 유일한 특이점일때, Laurent 급수의 음의 거듭제곱의급수

16.1 Laurent Series (Laurent 급수)

● **Uniqueness (유일성)**

- 수렴환형 안에서의 Laurent 급수는 유일하다.
- 같은 중심을 갖는 두 개의 환형 안에서 서로 다른 Laurent 급수를 가질 수 있다.

● **Laurent 급수의 다른 표현**

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n,\quad a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z^*)}{(z-z_0)^{n+1}}dz^*\ (n=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$

■ **Ex. 1 Use of Maclaurin Series**

Find the Laurent series of $z^{-5}\sin z$ with center 0.

$$z^{-5}\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n-4}=\frac{1}{z^4}-\frac{1}{6z^2}+\frac{1}{120}-\frac{1}{5040}z^2+-\cdots\quad(|z|>0)$$

수렴 환형 : 원점을 제외한 전 복소평면

0에서 급수의 주부 : $z^{-4}-\frac{1}{6}z^{-2}$

16.1 Laurent Series (Laurent 급수)

Ex. 2 Substitution (대입)

Find the Laurent series of $z^2 e^{1/z}$ with center 0.

$$z^2 e^{1/z} = z^2\left(1 + \frac{1}{1!\,z} + \frac{1}{2!\,z^2} + \cdots\right) = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!\,z} + \frac{1}{4!\,z^2} + \cdots$$

Ex. 3 Development (전개)

Develop $1/(1-z)$ (a) in nonnegative powers of z,
(b) in negative powers of z.

(a) $$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad (|z| < 1\text{일 때 유효})$$

(b) $$\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z(1-z^{-1})} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \cdots \qquad (|z| > 1\text{일 때 유효})$$

16.1 Laurent Series (Laurent 급수)

- **Ex. 4 Laurent Expansions in Different Concentric Annuli (서로 다른 동심환형에서의 Laurent 전개)**

  Find all Laurent series of $1/(z^3-z^4)$ with center 0.

$$\frac{1}{z^3-z^4}=\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-3}=\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+1+z+\cdots \qquad (0<|z|<1)$$

$$\frac{1}{z^3-z^4}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+4}}=-\frac{1}{z^4}-\frac{1}{z^5}-\cdots \qquad (|z|>1)$$

16.1 Laurent Series (Laurent 급수)

- **Ex. 5 Use of Partical Fractions (부분분수의 이용)**

  Find all Taylor and Laurent series of $f(z) = \dfrac{-2z+3}{z^2-3z+2}$ with center 0.

16.1 Laurent Series (Laurent 급수)

- **Ex. 5 Use of Partical Fractions (부분분수의 이용)**

  Find all Taylor and Laurent series of $f(z)=\dfrac{-2z+3}{z^2-3z+2}$ with center 0.

부분분수로 표현하면 $f(z)=-\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{z-2}$

$-\dfrac{1}{z-2}$ 의 Laurent 급수를 구하면 $-\dfrac{1}{z-2}=\dfrac{1}{2\left(1-\frac{1}{2}z\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}}z^n \qquad (|z|<2)$

$$-\frac{1}{z-2}=-\frac{1}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^{n+1}} \qquad (|z|>2)$$

$\therefore$ $|z|<1$일 때, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{2^{n+1}}\right)z^n=\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{4}z+\dfrac{9}{8}z^2+\cdots$

$1<|z|<2$일 때, $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n+1}}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^{n+1}}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}z+\dfrac{1}{8}z^2+\cdots-\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z^2}-\cdots$

$|z|>2$일 때, $f(z)=-\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^n+1\right)\dfrac{1}{z^{n+1}}=-\dfrac{2}{z}-\dfrac{3}{z^2}-\dfrac{5}{z^3}-\dfrac{9}{z^4}-\cdots$

16.1 Laurent Series (Laurent 급수)

PROBLEM SET 16.1

HW: 9, 16, 24 (c)

16.2 Singularities and Zeros. Infinity (특이점과 영점. 무한대)

- **Singular Point (특이점):** 주어진 함수가 해석적이지 않은 점으로 이 점의 모든 근방은 해석적인 점을 포함한다.
- **Isolated Singular Point (고립특이점):** 다른 특이점을 갖지 않는 근방을 갖고 있는 특이점

예제) $\tan z$는 고립특이점 $\pm \pi/2,\ \pm 3\pi/2,\ \cdots$등을 갖는다.

$\tan\left(1/z\right)$는 비고립특이점 0을 갖는다.

◆ 고립특이점은 Laurent급수에 의해 분류된다.

- **Pole (극):** 음의 거듭제곱을 포함하는 주부가 유한개의 항을 가질 때 ($z = z_0$)

  Order (위수): 주부의 제일 낮은 차수 (m)

$$\frac{b_1}{z-z_0}+\cdots+\frac{b_m}{(z-z_0)^m} \quad (b_m \neq 0)$$

- **Simple Order (단순극):** 위수가 1인 극
- **Isolated Essential Singular Point (고립진성특이점):** 주부가 무한히 많은 항을 가질 때

16.2 Singularities and Zeros. Infinity
(특이점과 영점. 무한대)

■ **Ex. 1 Poles. Essential Singularities**

함수 $f(z)=\dfrac{1}{z(z-2)^5}+\dfrac{3}{(z-2)^2}$은 $z=0$에서 단순극을 갖고,

$z=2$에서 위수가 5인 극을 갖는다.

함수 $e^{1/z}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!z^n}=1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2!z^2}+\cdots$과

$\sin\dfrac{1}{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!z^{2n+1}}=\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{3!z^3}+\dfrac{1}{5!z^5}-+\cdots$은 $z=0$에서고립진성특이점을 갖는다.

16.2 Singularities and Zeros. Infinity (특이점과 영점. 무한대)

Ex. 2 Behavior Near a Pole

함수 $f(z)=\dfrac{1}{z^2}$은 $z=0$에서 극을 가지며 임의의 방법으로 $z\to 0$일 때 $|f(z)|\to\infty$이다.

Poles (극)

$f(z)$가 해석적이고 $z=z_0$에서 극을 가지면 임의의 방법으로 $z\to z_0$일 때 $|f(z)|\to\infty$이다.

Ex. 3 Behavior Near an Essential Singularity

함수 $f(z)=e^{1/z}$은 $z=0$에서 진성특이점을 갖는다.

(i) 허수축을 따라 0에 접근시키면 극한값을 가지지 않는다.

(ii) 음의 실수값을 통하여 $z\to 0$이면 0에 수렴한다.

(iii) 양의 실수값을 통하여 $z\to 0$이면 무한대로 발산한다.

(iv) $z=0$의 임의의 작은 $\varepsilon-$근방에서 이 함수는 임의의 주어진 상수값 $c=c_0e^{i\alpha}\neq 0$을 갖는다.

16.2 Singularities and Zeros. Infinity (특이점과 영점. 무한대)

- **Picard's Theorem**

  $f(z)$가 해석적이고 점 z_0에서 고립진성특이점을 갖는다면

  z_0의 임의의 작은 $\varepsilon-$근방에서 기껏해야 한 개의 값이 제외된 모든값을 갖는다.

- **Zeros of Analytic Functions (해석함수의 영점)**

- **Zero (영점):** 해석적인 함수의 함수값이 0인 점

  영점은 함수값 뿐만 아니라 도함수의 값도 0일 수 있다.

  위수: 도함수의 값이 0이 되지 않는 가장 조금 미분한 횟수

- **Simple Zero (단순영점):** 위수 1인 영점

Ex. 4 Zeros

(i) 함수 $1+z^2$은 $\pm i$에서 단순영점을 갖는다.

(ii) 함수 $(1-z^4)^2$은 ± 1과 $\pm i$에서 위수 2의 영점을 갖는다.

(iii) 함수 e^z은 영점을 갖지 않는다.

16.2 Singularities and Zeros. Infinity (특이점과 영점. 무한대)

- **Taylor Series at a Zero (영점에서의 테일러 급수)**

$f(z)$가 위수 n의 영점 $z=z_0$를 갖는다. $\Leftrightarrow$ 도함수 $f'(z_0), \cdots, f^{(n-1)}(z_0)$는 0이다.

$\therefore$ 테일러급수에서 $a_0 = \cdots = a_{n-1} = 0$이고 $a_n \neq 0$이므로

$$f(z) = a_n(z-z_0)^n + a_{n+1}(z-z_0)^{n+1} + \cdots = (z-z_0)^n\left[a_n + a_{n+1}(z-z_0) + a_{n+2}(z-z_0)^2 + \cdots\right]$$

- **Zeros (영점)**

해석함수 $f(z)(\neq 0)$의 영점은 고립되어 있다. 즉, 각각은 영점을 갖지 않는 근방을 갖고 있다.

- **Poles and Zeros (극과 영점)**

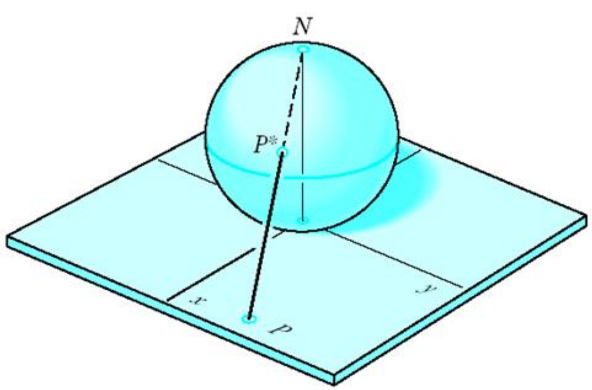
$f(z)$가 $z=z_0$에서 해석적이고 $z=z_0$에서 위수 n의 영점을 가지면

$\Rightarrow$ $\dfrac{1}{f(z)}$은 $z=z_0$에서 위수 n인 극을 갖는다.

$h(z)$가 $z=z_0$에서 해석적이고 $h(z_0)\neq 0$이면 $\dfrac{h(z)}{f(z)}$에 대해서도 똑같은 사실이 성립된다.

16.2 Singularities and Zeros. Infinity (특이점과 영점. 무한대)

- **Riemann Sphere:** $z = 0$인 지점에서 복소평면에 닿아 있는 지름 1인 구이다.
- **Image (상):** 지름방향으로 원점의 정반대에 위치한 북극에서 평면의 임의의 점을 잇는 선분이 구와 교차하는 점
- 북극을 제외한 구의 모든 점은 복소수를 나타내고, 북극은 복소평면 내의 어떤 점에도 해당되지 않는다.
- **Point at Infinity (무한대 점):** 북극의 상으로 설정된 점
- **Extended Complex Plane (확장복소평면):** 무한대 점이 포함된 복소평면
- **Finite Complex Plane (유한복소평면):** 무한대 점이 포함되지 않은 단순한 복소평면



16.2 Singularities and Zeros. Infinity (특이점과 영점. 무한대)

- **Analytic or Singular at Infinity (무한대에서 해석적이거나 특이한 함수)**

  큰 $|z|$에 대하여 함수 $f(z)$에서 $z=\dfrac{1}{w}$로 놓고 $w=0$의 근방에서 $f(z)=f\left(\dfrac{1}{w}\right)=g(w)$를 조사

- $g(w)$가 $w=0$에서 해석적 $\Leftrightarrow$ $f(z)$가 무한대에서 해석적
- $g(w)$가 $w=0$에서 특이하다 $\Leftrightarrow$ $f(z)$가 무한대에서 특이하다
- 극한값이 존재 $\Leftrightarrow$ $g(0)=\lim\limits_{w\to 0} g(w)$
- $w=0$에서 $f\left(\dfrac{1}{w}\right)$가 영점을 갖는다 $\Leftrightarrow$ $f(z)$가 무한대에서 위수 n의 영점을 갖는다.

16.2 Singularities and Zeros. Infinity
(특이점과 영점. 무한대)

PROBLEM SET 16.2

HW: 9, 18

16.3 Residue Integration Method (유수적분법)

- $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n+\frac{b_1}{z-z_0}+\frac{b_2}{(z-z_0)^2}+\cdots$에서 $b_1=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$이다.

  $\therefore \oint_C f(z)dz=2\pi i b_1$

- **Residue (유수):** z = z_0에서의 유수 $b_1=\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$

Ex. 1 Evaluation of an Integral by Means of a Residue

Integrate the function $f(z)=z^{-4}\sin z$ counterclockwise around the unit circle C.

$$f(z)=\frac{\sin z}{z^4}=\frac{1}{z^3}-\frac{1}{3!\,z}+\frac{z}{5!}-\frac{z^3}{7!}+-\cdots\text{이므로 } b_1=-\frac{1}{3!}\text{이다.}$$

$$\therefore \oint_C \frac{\sin z}{z^4}dz=2\pi i b_1=-\frac{\pi i}{3}$$

16.3 Residue Integration Method (유수적분법)

■ **Ex. 2 CAUTION! Use the Right Laurent Series!**

Integrate $f(z) = 1/(z^3-z^4)$ clockwise around the circle C: $|z|=1/2$.

$z^3 - z^4 = z^3(1-z)$이므로 $f(z)$의 특이점 : $z=0$과 $z=1$

$z=1$은 원 C의 외부에 존재하므로 고려하지 않는다.

$\dfrac{1}{z^3-z^4} = \dfrac{1}{z^3} + \dfrac{1}{z^2} + \dfrac{1}{z} + 1 + z + \cdots \left(0<|z|<1\right)$이므로 $z=0$에서의 유수는 1이다.

$$\therefore \oint_C \frac{1}{z^3-z^4}\,dz = -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = -2\pi i$$

CAUTION!

다른 급수인 $\dfrac{1}{z^3-z^4} = -\dfrac{1}{z^4} - \dfrac{1}{z^5} - \dfrac{1}{z^6} - \cdots \left(|z|>1\right)$에서 $\dfrac{1}{z}$항이 존재하지 않으므로 오답인 0이 얻어진다.

16.3 Residue Integration Method (유수적분법)

- **Formulas for Residues (유수에 대한 공식)**
- **Simple Poles (단순극)**

(i) 함수 $f(z)$가 z_0에서 단순극을 가지는 경우

$$: \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = b_1 = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$$

(ii) $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$에서 $p(z_0) \neq 0$이고 $q(z)$는 z_0에서 단순영을 가지는 경우

$$: \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

- **Poles of Any Order (임의 위수의 극)**

함수 $f(z)$가 z_0에서 위수 m의 극을 가지는 경우 : $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \dfrac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left\{ \dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right] \right\}$

위수 $2(m=2)$인 극 : $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^2 f(z) \right]'$

16.3 Residue Integration Method (유수적분법)

■ **Ex. 3 Residue at a Simple Pole**

$z^2+1=(z+i)(z-i)$이므로 $f(z)=\dfrac{9z+i}{z^3+z}$는 i에서 단순극을 가지며,

16.3 Residue Integration Method (유수적분법)

Ex. 3 Residue at a Simple Pole

$z^2+1=(z+i)(z-i)$이므로 $f(z)=\dfrac{9z+i}{z^3+z}$는 i에서 단순극을 가지며,

$$\text{(i)}\quad \operatorname*{Res}_{z=i}\frac{9z+i}{z^3+z}=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{9z+i}{z(z+i)(z-i)}=\left[\frac{9z+i}{z(z+i)}\right]_{z=i}=\frac{10i}{-2}=-5i$$

$$\text{(ii)}\quad p(z)=9z+i,\ q(z)=z^3+z \quad\Rightarrow\quad q'(z)=3z^2+1$$

$$\therefore\ \operatorname*{Res}_{z=i}\frac{9z+i}{z^3+z}=\left[\frac{9z+i}{3z^2+1}\right]_{z=i}=\frac{10i}{-2}=-5i$$

16.3 Residue Integration Method (유수적분법)

■ Ex. 3 Residue at a Simple Pole

$z^2+1=(z+i)(z-i)$이므로 $f(z)=\dfrac{9z+i}{z^3+z}$는 i에서 단순극을 가지며,

$$\text{(i)}\quad \operatorname*{Res}_{z=i}\frac{9z+i}{z^3+z}=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{9z+i}{z(z+i)(z-i)}=\left[\frac{9z+i}{z(z+i)}\right]_{z=i}=\frac{10i}{-2}=-5i$$

$$\text{(ii)}\quad p(z)=9z+i,\ q(z)=z^3+z\quad\Rightarrow\quad q'(z)=3z^2+1$$

$$\therefore\ \operatorname*{Res}_{z=i}\frac{9z+i}{z^3+z}=\left[\frac{9z+i}{3z^2+1}\right]_{z=i}=\frac{10i}{-2}=-5i$$

■ Ex. 4 Residue at a Pole of Higher Order

$f(z)=\dfrac{50z}{z^3+2z^2-7z+4}$는 분모가 $(z+4)(z-1)^2$과 같기 때문에 $z=1$에서 위수 2의 극을 갖는다.

16.3 Residue Integration Method (유수적분법)

■ Ex. 3 Residue at a Simple Pole

$z^2+1=(z+i)(z-i)$이므로 $f(z)=\dfrac{9z+i}{z^3+z}$는 i에서 단순극을 가지며,

$$\text{(i)}\quad \operatorname*{Res}_{z=i}\frac{9z+i}{z^3+z}=\lim_{z\to i}(z-i)\frac{9z+i}{z(z+i)(z-i)}=\left[\frac{9z+i}{z(z+i)}\right]_{z=i}=\frac{10i}{-2}=-5i$$

$$\text{(ii)}\quad p(z)=9z+i,\ q(z)=z^3+z \quad\Rightarrow\quad q'(z)=3z^2+1$$

$$\therefore\ \operatorname*{Res}_{z=i}\frac{9z+i}{z^3+z}=\left[\frac{9z+i}{3z^2+1}\right]_{z=i}=\frac{10i}{-2}=-5i$$

■ Ex. 4 Residue at a Pole of Higher Order

$f(z)=\dfrac{50z}{z^3+2z^2-7z+4}$는 분모가 $(z+4)(z-1)^2$과 같기 때문에 $z=1$에서 위수 2의 극을 갖는다.

$$\therefore\ \operatorname*{Res}_{z=i} f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2 f(z)\right]=\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\frac{50z}{z+4}\right)=\frac{200}{5^2}=8$$

16.3 Residue Integration Method (유수적분법)

- **Residue Theorem (유수정리)**

C:단순닫힌경로

$z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_k$:C 내부에 있는 유한개의 특이점

$f(z)$:특이점을 제외한 C 내부와 C상에서 해석적인 함수

$$\Rightarrow \oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname*{Res}_{z=z_j} f(z)$$

- **Ex. 6 Another Application of the Residue Theorem**

Integrate $(\tan z)/(z^2-1)$ counterclockwise around the circle C: $|z|=3/2$.

$\tan z$의 특이점 $\pm\frac{\pi}{2},\ \pm\frac{3\pi}{2},\ \cdots$는 윤곽선 C의 바깥에 놓여 있다.

주어진 함수의 분모 $z^2-1=(z+1)(z-1)$은 ±1에서 단순극을 갖는다.

$$\oint_C \frac{\tan z}{z^2-1}dz = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=1}\frac{\tan z}{z^2-1}+\operatorname*{Res}_{z=-1}\frac{\tan z}{z^2-1}\right) = 2\pi i\left(\left.\frac{\tan z}{2z}\right|_{z=1}+\left.\frac{\tan z}{2z}\right|_{z=-1}\right) = 2\pi i\tan 1 = 9.7855i$$

16.3 Residue Integration Method (유수적분법)

■ **Ex. 7 Poles and Essential Singularities**

Evaluate the following integral, where C is the ellipse $9x^2+y^2 = 9$ (counterclockwise).

$$\oint_C \left(\frac{ze^{\pi z}}{z^4-16} + ze^{\pi/z} \right) dz$$

16.3 Residue Integration Method (유수적분법)

Ex. 7 Poles and Essential Singularities

Evaluate the following integral, where C is the ellipse $9x^2+y^2 = 9$ (counterclockwise).

$$\oint_C \left(\frac{ze^{\pi z}}{z^4-16} + ze^{\pi/z} \right) dz$$

$\dfrac{ze^{\pi z}}{z^4-16}$는 C내부에 존재하는 $\pm 2i$에서 단순극을 갖는다.

$$\Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=2i} \frac{ze^{\pi z}}{z^4-16} = \left[\frac{ze^{\pi z}}{4z^3} \right]_{z=2i} = -\frac{1}{16}, \quad \operatorname*{Res}_{z=-2i} \frac{ze^{\pi z}}{z^4-16} = \left[\frac{ze^{\pi z}}{4z^3} \right]_{z=-2i} = -\frac{1}{16}$$

$ze^{\pi/z}$는 0에서 진성특이점을 가지며 $ze^{\pi/z} = z\left(1+\dfrac{\pi}{z}+\dfrac{\pi^2}{2!z^2}+\dfrac{\pi^3}{3!z^3}+\cdots\right) = z+\pi+\dfrac{\pi^2}{2!z}+\dfrac{\pi^3}{3!z^2}+\cdots (|z|>0)$

$$\Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=0} ze^{\pi/z} = \frac{\pi^2}{2!}$$

$$\therefore \oint_C \left(\frac{ze^{\pi z}}{z^4-16} + ze^{\pi/z} \right) dz = 2\pi i \left(-\frac{1}{16} - \frac{1}{16} + \frac{\pi^2}{2} \right) = \pi\left(\pi^2 - \frac{1}{4} \right) i = 30.221 i$$

16.3 Residue Integration Method (유수적분법)

PROBLEM SET 16.3

HW: 8, 25

16.4 Residue Integration of Real Integrals (실적분의 유수적분)

- **cosθ 와 sinθ 의 유리함수의 적분:** $J = \int_0^{2\pi} F(\cos\theta,\ \sin\theta)\,d\theta$

$e^{i\theta} = z$라 치환하면 $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$, $\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)$

$\Rightarrow\ F(\cos\theta,\ \sin\theta) = f(z),\ \ d\theta = \frac{dz}{iz}$

$\Rightarrow\ J = \oint_C f(z)\frac{dz}{iz},\quad C: |z| = 1$(반시계방향)

16.4 Residue Integration of Real Integrals (실적분의 유수적분)

- **Ex. 1 An Integral of the Type (1)**

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta} = 2\pi$$

16.4 Residue Integration of Real Integrals (실적분의 유수적분)

■ **Ex. 1 An Integral of the Type (1)**

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta} = 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta} = \oint_C \frac{dz/iz}{\sqrt{2}-\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} = \oint_C \frac{dz}{-\frac{i}{2}\left(z^2-2\sqrt{2}z+1\right)} = -\frac{2}{i}\oint_C \frac{dz}{\left(z-\sqrt{2}-1\right)\left(z-\sqrt{2}+1\right)}$$

단순극 $z_1=\sqrt{2}+1$은 원 C 외부에 존재하므로 제외된다.

단순극 $z_2=\sqrt{2}-1$은 원 C 내부에 있으므로

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2} \frac{1}{\left(z-\sqrt{2}-1\right)\left(z-\sqrt{2}+1\right)} = \left[\frac{1}{z-\sqrt{2}-1}\right]_{z=\sqrt{2}-1} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{2}-\cos\theta} = 2\pi i\left(-\frac{2}{i}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\pi$$

16.4 Residue Integration of Real Integrals (실적분의 유수적분)

- **Improper Integral (이상적분)**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx$$

$$\text{pr.v.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

- **Cauchy Principal Value:**

sum over all the residues at the poles of f(z) in the upper half-plane.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum \text{Res } f(z)$$

$$\oint_C f(z)dz = \int_S f(z)dz + \int_{-R}^{R} f(x)dx = 2\pi i\sum \text{Res } f(z)$$

16.4 Residue Integration of Real Integrals (실적분의 유수적분)

- **Ex. 2 An Improper Integral from 0 to ∞**

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

16.4 Residue Integration of Real Integrals (실적분의 유수적분)

■ **Ex. 2 An Improper Integral from 0 to ∞**

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

함수 $f(z) = \dfrac{1}{1+z^4}$ 은 네 개의 단순극 $z_1 = e^{\pi i/4}$, $z_2 = e^{3\pi i/4}$, $z_3 = e^{-3\pi i/4}$, $z_4 = e^{-\pi i/4}$을 갖는다.

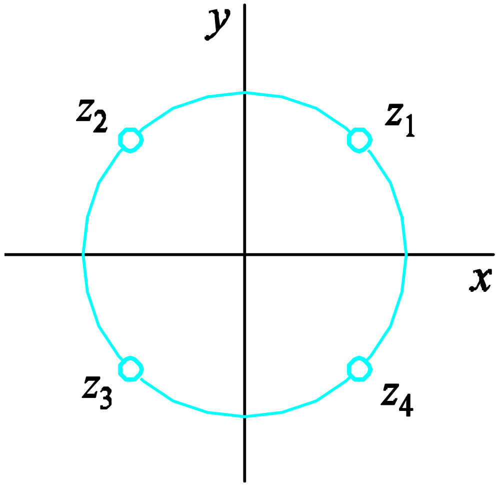
극 $z_1 = e^{\pi i/4}$, $z_2 = e^{3\pi i/4}$는 상반평면에 존재하므로

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \left[\frac{1}{(1+z^4)'}\right]_{z=z_1} = \left[\frac{1}{4z^3}\right]_{z=z_1} = \frac{1}{4}e^{-3\pi i/4} = -\frac{1}{4}e^{\pi i/4},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) = \left[\frac{1}{(1+z^4)'}\right]_{z=z_2} = \left[\frac{1}{4z^3}\right]_{z=z_2} = \frac{1}{4}e^{-9\pi i/4} = \frac{1}{4}e^{-\pi i/4}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4} = -\frac{2\pi i}{4}\left(e^{\pi i/4} - e^{-\pi i/4}\right) = -\frac{2\pi i}{4}\cdot 2i\cdot\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$



16.4 Residue Integration of Real Integrals (실적분의 유수적분)

- **Fourier Integrals**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos sx dx \quad \text{그리고} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin sx dx \quad (s\text{는 실수})$$

$$\Rightarrow \quad 2\pi i \sum \operatorname{Res}\left[f(z)e^{isz}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{isx}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos sx dx + i\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin sx dx$$

$$\therefore \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos sx dx = -2\pi \sum \operatorname{Im}\ \operatorname{Res}\left[f(z)e^{isz}\right], \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin sx dx = 2\pi \sum \operatorname{Re}\operatorname{Res}\left[f(z)e^{isz}\right]$$

- **Ex. 3 An Application**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos sx}{k^2+x^2}dx = \frac{\pi}{k}e^{-ks}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin sx}{k^2+x^2}dx = 0 \quad (s>0,\ \ k>0)$$

$\dfrac{e^{isz}}{k^2+z^2}$는 상반평면에서 한 개의 단순극 $z = ik$를 갖는다.

$$\Rightarrow \quad \operatorname*{Res}_{z=ik} \frac{e^{isz}}{k^2+z^2} = \left[\frac{e^{isz}}{2z}\right]_{z=ik} = \frac{e^{-ks}}{2ik} \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{isx}}{k^2+x^2}dx = 2\pi i \frac{e^{-ks}}{2ik} = \frac{\pi}{k}e^{-ks}$$

$$\therefore \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos sx}{k^2+x^2}dx = \frac{\pi}{k}e^{-ks}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin sx}{k^2+x^2}dx = 0$$

16.4 Residue Integration of Real Integrals (실적분의 유수적분)

- **Another Kind of Improper Integral (이상적분의 다른 형태)**
  - 피적분함수가 적분구간 내의 점 *a* 에서 무한대가 될 때 $\left(\lim_{x\to a}|f(x)|=\infty\right)$

$$\int_A^B f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_A^{a-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\eta\to 0}\int_{a+\eta}^{B} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_A^{a-\varepsilon} f(x)dx + \int_{a+\varepsilon}^{B} f(x)dx\right]$$

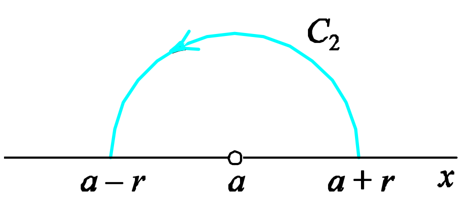
  - **Cauchy Principal Value:** $\mathrm{pr.v.}\int_A^B f(x)dx$

■ Ex.

$$\mathrm{pr.v.}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^3} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x^3} + \int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x^3}\right] = 0$$

- **Simple Poles on the Real Axis (실축 상의 단순극)**

함수 $f(z)$가 실축 상의 점 $z=a$에서 단순극을 가질 경우 : $\lim_{r\to 0}\int_{C_2} f(z)dz = \pi i \operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$



16.4 Residue Integration of Real Integrals (실적분의 유수적분)

- $\text{pr.v.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum \operatorname{Res} f(z) + \pi i \sum \operatorname{Res} f(z)$

  첫 번째 합은 상반평면에 있는 모든 극들에 대해 행해지면

  두 번째 합은 실축 위에 있는 모든 극들에 대해 행해진다.

Ex. 4 Poles on the Real Axis

Find the principle value $\text{pr.v.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-3x+2)(x^2+1)}$

16.4 Residue Integration of Real Integrals (실적분의 유수적분)

- $\text{pr.v.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum \text{Res} f(z) + \pi i \sum \text{Res} f(z)$

  첫 번째 합은 상반평면에 있는 모든 극들에 대해 행해지면

  두 번째 합은 실축 위에 있는 모든 극들에 대해 행해진다.

Ex. 4 Poles on the Real Axis

Find the principle value $\text{pr.v.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-3x+2)(x^2+1)}$

$\frac{1}{(z^2-3z+2)(z^2+1)}$의 단순극은 $z=1,\ z=2,\ z=i,\ z=-i$이다.

$z=-i$은 하반평면에 존재하므로 제외된다.

$$\underset{z=1}{\text{Res}}\frac{1}{(z^2-3z+2)(z^2+1)} = \left[\frac{1}{(z-2)(z^2+1)}\right]_{z=1} = -\frac{1}{2}, \quad \underset{z=2}{\text{Res}}\frac{1}{(z^2-3z+2)(z^2+1)} = \left[\frac{1}{(z-1)(z^2+1)}\right]_{z=2} = \frac{1}{5},$$

$$\underset{z=i}{\text{Res}}\frac{1}{(z^2-3z+2)(z^2+1)} = \left[\frac{1}{(z^2-3z+2)(z+i)}\right]_{z=i} = \frac{1}{6+2i} = \frac{3-i}{20}$$

$$\therefore\ \text{pr.v.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2-3x+2)(x^2+1)} = 2\pi i\left(\frac{3-i}{20}\right) + \pi i\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right) = \frac{\pi}{10}$$

16.4 Residue Integration of Real Integrals (실적분의 유수적분)

PROBLEM SET 16.4

HW:

직업선택 십계명

- **거창고등학교**

1. 월급이 적은 쪽을 택하라.
2. 내가 원하는 곳이 아니라 나를 필요로 하는 곳을 택하라.
3. 승진의 기회가 거의 없는 곳을 택하라.
4. 모든 조건이 갖추어진 곳은 피하고, 처음부터 시작해야 하는 황무지를 택하라.
5. 앞을 다투어 모여드는 곳은 절대 가지 마라. 아무도 가지 않는 곳으로 가라.
6. 장래성이 전혀 없다고 생각되는 곳으로 가라.
7. 사회적 존경 같은 것을 바라볼 수 없는 곳으로 가라.
8. 한가운데가 아니라 가장자리로 가라.
9. 부모나 아내나, 약혼자가 결사반대를 하는 곳이면 틀림없다. 의심치 말고 가라.
10. 왕관이 아니라 단두대가 기다리고 있는 곳으로 가라.

직업선택 십계명

- 풀무농업고등기술학교

1. 직업 결정 전에 나의 천성과 장점, 능력을 잘 파악하자.
2. 이 직업은 낮은 생활, 높은 정신을 실현하는, 더불어 사는 평민의 목표에 맞는 직업인가 생각해 보자.
3. 준비는 길수록 좋다. 예수는 3년의 공적 생애를 위해 30년을 준비했다.
4. 학교는 직업 선택과 준비 기간으로 알되, 직업을 통해 일생 배우고 향상할 수 있어야 한다.
5. 수입이나 명예보다 이웃사랑의 실천도를 기준으로 하라.
6. 내게 맞는 직업보다 우리 사회가 필요로 하는 직업이 무엇인가 찾아보라.
7. 편한 곳보다 되도록 힘든 곳을 택하라. 그만한 가치가 분명히 있다.
8. 인생을 어떻게 살까 큰 틀을 생각하고 직업문제를 채우도록 하라.
9. 남이 닦아 놓은 길보다 새로운 길을 개척하라.
10. 직업에 귀천이 없다.