Naval Architecture & Ocean Engineering

Computer Aided Ship design

-Part I. Optimal Ship Design-

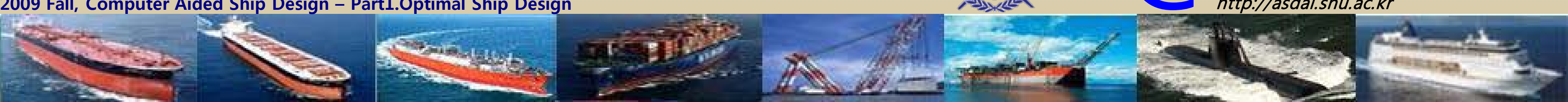
September, 2009

Prof. Kyu-Yeul Lee

Department of Naval Architecture and Ocean Engineering,
Seoul National University of College of Engineering

Seoul National Univ.

@SDAL
Advanced Ship Design Automation Lab.
http://asdal.snu.ac.kr



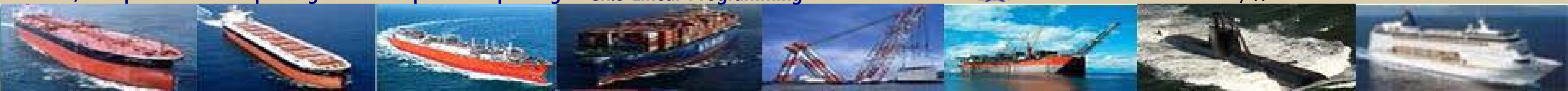
Ch.5 Linear Programming (선형 계획법)

5.1 Linear Programming Problems

5.2 Geometric solution of Linear Programming Problems

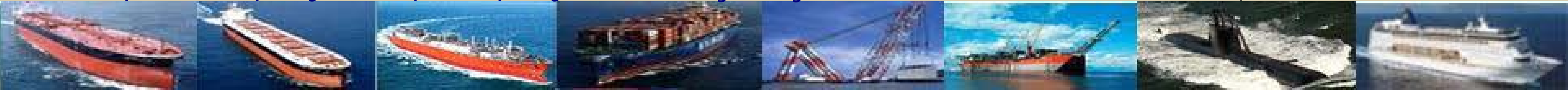
5.3 Solution of Linear Programming problem using Simplex method

Seoul National Univ.
@SDAL Advanced Ship Design Automation Lab.
http://asdal.snu.ac.kr



Ch.5 Linear Programming (선형 계획법)

5.1 Linear Programming Problem



5.1 선형 계획 문제(Linear Programming Problem)

- 선형 계획 문제
  - 목적 함수와 제약 조건이 설계 변수에 대하여 모두 선형임
  - 모든 함수들이 선형이기 때문에 등호 제약 조건이나 부등호 제약 조건에 의해 정의된 가능해 공간(feasible region)은 볼록(convex) 집합임
  - 따라서 선형 계획 문제는 볼록 계획 문제이고, 만일 하나의 최적해가 존재한다면 그것은 전역 최적해(global optimum)임

목적 함수

Minimize $f = -4x_1 - 5x_2$

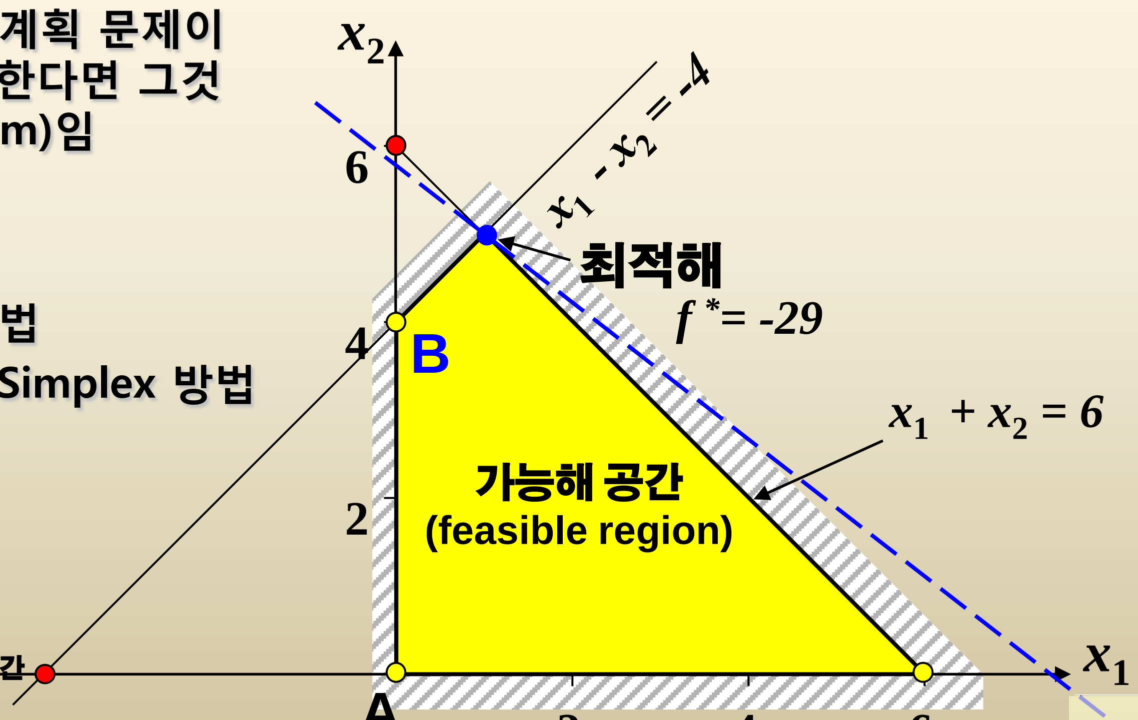
제약 조건

Subject to $x_1 - x_2 \geq -4$

$x_1 + x_2 \leq 6$

$x_1, x_2 \geq 0$

- 선형 계획법
  - 선형 계획 문제를 풀기 위한 방법
  - 1947년 George B. Dantzig가 Simplex 방법이라는 선형 계획법을 고안함



* 가능해 공간: 모든 제약 조건을 만족하며 최적해가 존재하는 공간

선형 계획 문제의 특징

- 목적 함수와 제약 조건들이 변수의 선형 관계를 표현함
  - 1개의 목적 함수와 1개 이상의 제약 조건으로 구성
  - 목적 함수는 최대화 혹은 최소화의 형태임

목적 함수

Minimize $f = -4x_1 - 5x_2$

제약 조건

Subject to $x_1 - x_2 \geq -4$

$x_1 + x_2 \leq 6$

$x_1, x_2 \geq 0$

- 각 제약 조건들은 등식(=; equality constraint) 혹은 부등식(≥, ≤; inequality constraint)으로 표현됨

- Simplex 방법을 적용하기 위해서 선형 계획 문제의 변수들을 양수로 변경 함
  - 음수인 경우는 적절한 변형을 통해 양수화 시킴
    - 예, x = -y (x는 음수, y는 양수)
  - 부호에 제약이 없는 경우(양수 또는 음수를 가질 경우)는 적절한 변형을 통해 양수화 시킴
    - 예, x = y – z(x는 양수 또는 음수의 값을 가짐, y와 z는 양수)

- 변수가 음이 아닌 문제의 예
  + 동물의 사료 배분 : 사료는 양은 음이 될 수 없음
  + 제품의 원료 배분 : 원료의 양은 음이 될 수 없음

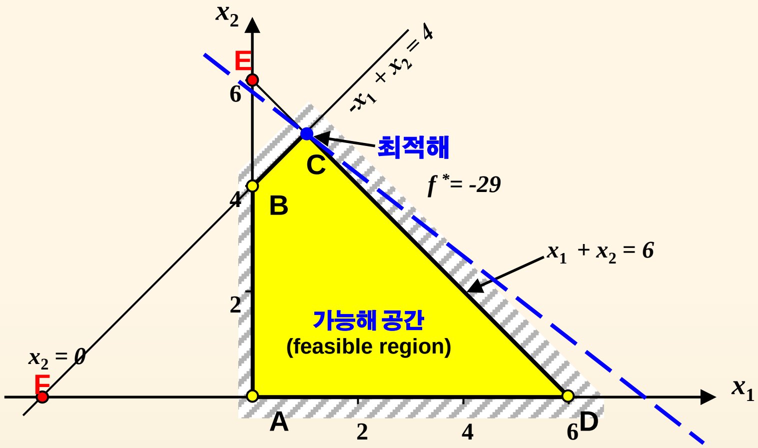
- 변수의 부호 제약이 없으나, 양의 변수로 변경될 수 있는 예
  + 조선소의 이익 = 선가 - 건조비

선형 계획 문제의 예
– 2개의 설계 변수와 부등호("≤") 제약 조건을 가진 문제

목적 함수 → Maximize $z = 4x_1 + 5x_2$

제약 조건 Subject to

$$x_1 - x_2 \geq -4$$
$$x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



목적 함수의 최대화 문제를 최소화 문제로 변환
제약 조건의 좌변에 음수가 있다면 양수로 변환

Minimize $f = -4x_1 - 5x_2$

Subject to

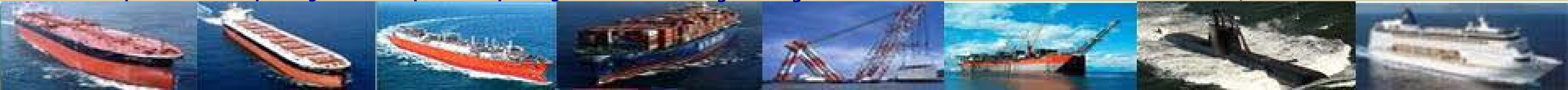
$$-x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

최대화 문제를 최소화 문제로 변환하는 이유
- 최소화 문제로 변환하지 않으면, 최대/최소 문제를 푸는 방법 양쪽을 모두 구현해야 함

Ch.5 Linear Programming
(선형 계획법)

5.2 Geometric solution of Linear Programming Problem

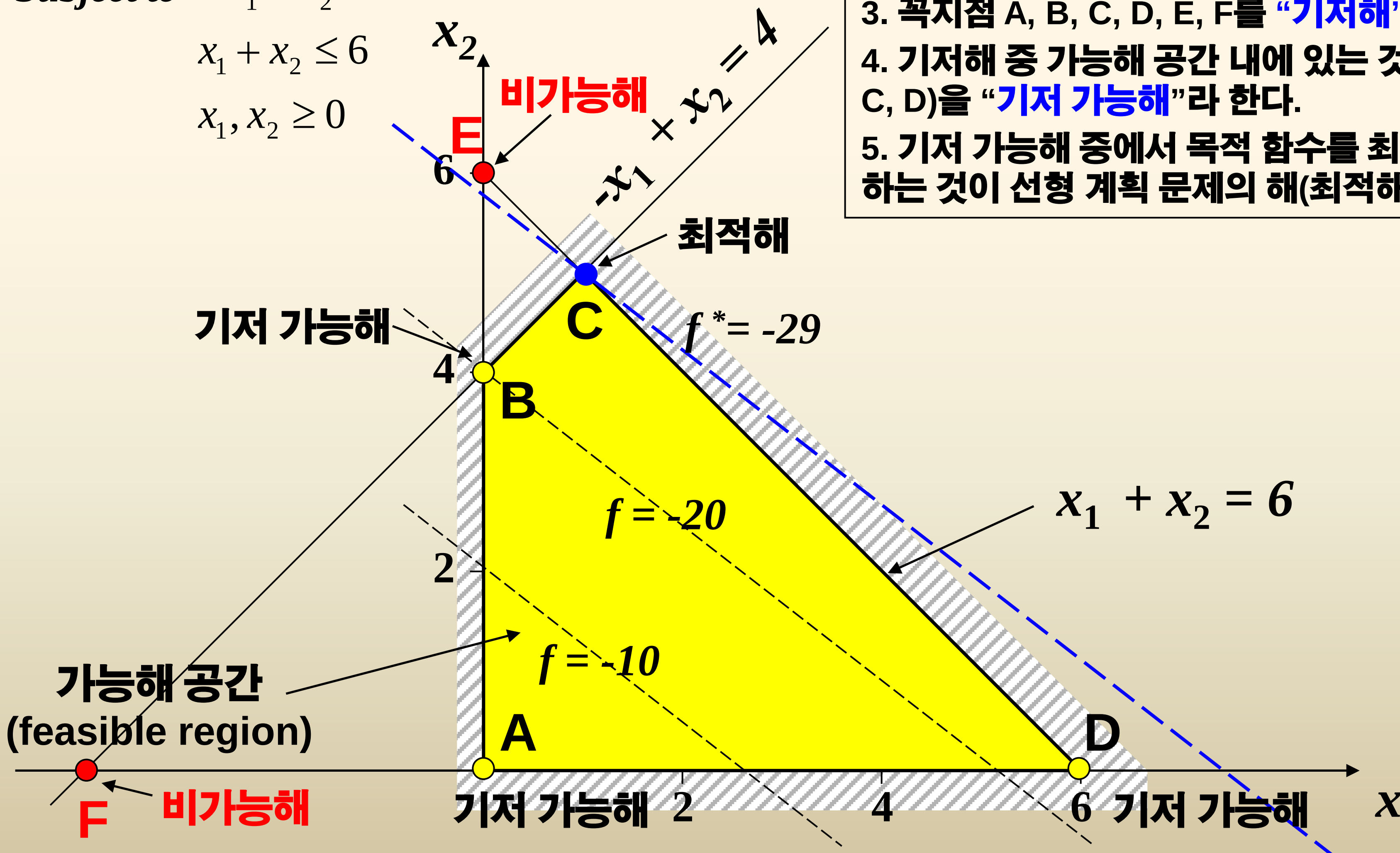
Seoul National Univ.
@SDAL
Advanced Ship Design Automation Lab.
http://asdal.snu.ac.kr



5.2 선형 계획 문제의 기하학적 해법

$$\textit{Minimize} \quad f = -4x_1 - 5x_2$$
$$\textit{Subject to} \quad -x_1 + x_2 \le 4$$
$$x_1 + x_2 \le 6$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

1. 선형 계획 문제의 해는 꼭지점 상에 있다.
2. 꼭지점이란 제약조건 사이의 교점이다.
3. 꼭지점 A, B, C, D, E, F를 "**기저해**"라 한다.
4. 기저해 중 가능해 공간 내에 있는 것(A, B, C, D)을 "**기저 가능해**"라 한다.
5. 기저 가능해 중에서 목적 함수를 최소로 하는 것이 선형 계획 문제의 해(최적해)이다.



Ch.5 Linear Programming
(선형 계획법)

5.3 Solution of Linear Programming problem using Simplex method

Seoul National Univ.
@SDAL
Advanced Ship Design Automation Lab.
http://asdal.snu.ac.kr

선형 계획 문제의 해결을 위한
부등호("≤") 제약 조건의 변환 방법

$$\text{Minimize} \quad f = -4x_1 - 5x_2$$

$$\text{Subject to} \quad \boxed{-x_1 + x_2 \le 4}$$

$$x_1 + x_2 \le 6$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

"≤" 형태의 부등호 제약 조건: 완화 변수(slack variable)의 도입

$$-x_1 + x_2 \le 4 \quad \Rightarrow \quad -x_1 + x_2 + \underline{x_3} = 4$$

완화 변수(0보다 크거나 같음)

선형 계획 문제를 풀 때 "≤" 형태의 부등호 제약 조건을 등호 제약 조건으로 변환함("표준형")

선형 계획 문제의 해법(1)

"≤" 형태의 제약 조건을 등호 제약 조건으로 변환하기 위해 도입된 완화 변수(slack variable)

$$\begin{aligned} &\textit{Minimize} && f = -4x_1 - 5x_2 \\ &\textit{Subject to} && -x_1 + x_2 \le 4 \\ &&& x_1 + x_2 \le 6 \\ &&& x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

부등호 제약 조건을 등호 제약 조건으로 변환 →

$$\begin{aligned} &\textit{Minimize} && f = -4x_1 - 5x_2 \\ &\textit{Subject to} && -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ &&& x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ &&& x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{aligned}$$

원래의 문제를 등호 제약 조건으로 표현("표준형")(단, 우변은 0보다 작지 않다고 가정함)

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 6 \end{aligned}$$

무수히 많은 해가 존재(미지수 4개, 선형 독립인 식 2개)하는 부정 방정식

➡ 4개의 변수 중 2(=4-2)개의 변수를 가정하면 해를 구할 수 있다.

➡ 선형 계획 문제의 해법인 "Simplex 방법"에서는 2개의 변수를 0으로 가정하여 해를 구한다.
이때, 0으로 가정하는 변수를 "비기저 변수", 이로부터 구해지는 변수를 "기저 변수"라고 한다.

미지수의 개수가 n개이고 선형 독립인 등호 방정식(제약 조건)의 개수가 m개 일 때, (단, n≥m)

- 자유도는 n-m이다.
- n-m개의 변수(자유도)를 가정하면 해를 구할 수 있다.
- "Simplex 방법"에서는 총 n-m개의 변수를 0으로 가정하여 해를 구한다.

선형 계획 문제의 해법(2)

$$
\begin{aligned}
\textit{Minimize} \quad & f = -4x_1 - 5x_2 \\
\textit{Subject to} \quad & -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\
& x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\
& x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0
\end{aligned}
$$

1. 4개의 변수 중 2개의 변수를 가정하면 해를 구할 수 있다.
2. 선형 계획 문제의 해법인 **"Simplex 방법"**에서는 **2개의 변수를 0으로 가정**하여 해를 구한다.
   이때, 0으로 가정하는 변수를 **"비기저 변수"**, 이로부터 구해지는 변수를 **"기저 변수"**라고 한다.

$$
\begin{aligned}
-x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \quad \text{----} \quad ① \\
x_1 + x_2 + x_4 &= 6 \quad \text{----} \quad ② \\
x_1, x_2, x_3, x_4 &\ge 0
\end{aligned}
$$

등호 방정식으로 변경된 제약조건으로부터

비기저 변수 (0으로 가정)	기저 변수	해 (x_1, x_2, x_3, x_4)	해("꼭지점") 의 위치	목적 함수
(x_2, x_3)	(x_1, x_4)	(-4, 0, 0, 10)	F	16
(x_1, x_4)	(x_2, x_3)	(0, 6, -2 0)	E	-30
(x_1, x_2)	(x_3, x_4)	(0, 0, 4, 6)	A	0
(x_2, x_4)	(x_1, x_3)	(6, 0, 10, 0)	D	-24
(x_1, x_3)	(x_2, x_4)	(0, 4, 0, 2)	B	-20
(x_3, x_4)	(x_1, x_2)	(1, 5, 0, 0)	C	**-29**

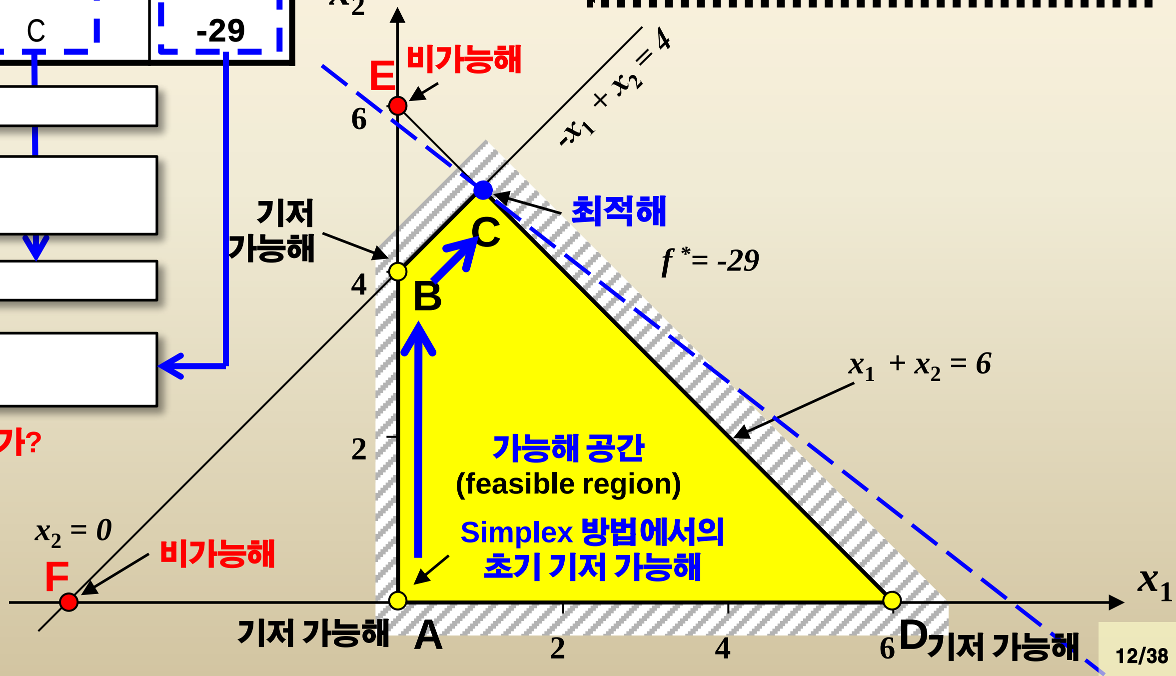
1) 0으로 가정할 2개의 변수를 선정함(총 6쌍)

2) 0으로 가정한 6쌍의 변수를 식 ①, ②에 대입해 6개의 기저해(꼭지점)을 계산함

3) 6개의 기저해 중 "**가능해 공간**"에 있는 기저해를 찾아 냄

4) "**가능해 공간**"에 있는 기저해 중 목적 함수 값을 최소로 하는 기저해가 "**최적해**" 이다.

각 꼭지점은 두 개의 변수를 0으로 가정할 때 얻어지는 것임



질문: 항상 모든 꼭지점을 찾아 함수값을 계산해야 하는가?

선형 계획 문제의 일반적인 해법: "Simplex 방법"

초기 기저 가능해로부터 시작하여목 적 함수를 점차 개선시켜 최적해를 구하는 방법 → 최소한의 꼭지점을 거쳐감

5.3 Simplex 방법을 이용한 선형 계획 문제의 해법(1)
- 비기저 변수와 기저 변수의 구분

Pivot: Gauss-Jordan 소거법과 같은 개념
선택한 변수를 하나의 행에만 남기고 다른 행에서는 모두 소거함

- **비기저 변수: Simplex방법에서 연립 방정식을 풀기 위해 0으로 가정하는 변수**
- **기저 변수: Simplex방법에서 비기저 변수에 의해 구해지는 변수**
- **본 예제에서는 2개의 변수를 비기저 변수로 가정해야 식을 풀 수 있음**

(1) 부등호 제약 조건을 등호 제약 조건으로 변경

Minimize $f = -4x_1 - 5x_2$

Subject to $-x_1 + x_2 \le 4$

$x_1 + x_2 \le 6$

$x_1, x_2 \ge 0$

각 행에 포함된 기저 변수를 표시 | **비기저 변수** | **기저 변수**

$\boxed{}$ **: 비기저 변수(=0)**

◯ **: 기저 변수**

1행:	x_3	$\boxed{-x_1} \boxed{+x_2} + x_3 = 4$
2행:	x_4	$\boxed{x_1} \boxed{+x_2} + x_4 = 6$
3행:		$\boxed{-4x_1} \boxed{-5x_2} = f - 0$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

- **비기저 변수를 구분하는 방법 → 목 적 함수는 비기저 변수로만 구성되어 있음**
- **기저 변수를 구분하는 방법 → 하나의 행에만 나타나고 다른 행에는 나타나지 않는 변수**

변수 종류	설명	구분 방법
비기저 변수	0으로 가정하는 변수	목적 함수는 비기저 변수로만 구성되어 있음
기저 변수	비기저 변수에 의해 구해지는 변수	하나의 행에만 존재하고 다른 행에는 존재하지 않음

5.3 Simplex 방법을 이용한 선형 계획 문제의 해법(2)

- 비기저 변수와 기저 변수의 교환

변수 종류	설명	구분 방법
비기저 변수	0으로 가정하는 변수	목적 함수는 비기저 변수로만 구성되어 있음
기저 변수	비기저 변수에 의해 구해지는 변수	하나의 행에만 존재하고 다른 행에는 존재하지 않음

- 본 예제에서는 2개의 변수를 비기저 변수(=0)로 가정해야 식을 풀 수 있음

1행:	x_3	$-x_1 + x_2 + x_3 = 4 \quad \longleftarrow \mathbf{4/1 = 4}$
2행:	x_4	$x_1 + x_2 + x_4 = 6 \quad \longleftarrow \mathbf{6/1 = 6}$
3행:		$-4x_1 - 5x_2 = f - 0$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

□: 비기저 변수(=0)
○: 기저 변수

1행에 포함된 기저변수 x3가 비기저 변수로 변경

비기저 변수: x1, x2, x3

기저 변수 : x3, x4 , x2

목적 함수의 계수가 최소(음수)인 변수 x2의 값을 증가시키면 목적 함수 값이 더 작아짐 → x2를 기저 변수로 변경할 예정

2개의 변수를 0으로 가정해야 식이 풀리므로 x3와 x4중 하나를 0으로 가정해야 함 → x3, x4중 하나를 비기저 변수로 변경

제약 조건식 중 선택된 열의 계수가 양수이며 최소의 비율을 갖는 행의 기저 변수를 선택 → x3를 비기저 변수로 변경할 예정

$$\text{비율} = \frac{\text{각 행의 우변의 값}}{\text{각 행의 선택된 열에서의 해당 변수의 계수}}$$

<참고> 만약 최소의 비율을 갖는 행을 선택하지 않는다면?

5.3 Simplex 방법을 이용한 선형 계획 문제의 해법(3)

- 선택된 변수를 중심으로 Pivot

변수 종류	설명	구분 방법
비기저 변수	0으로 가정하는 변수	목적 함수는 비기저 변수로만 구성되어 있음
기저 변수	비기저 변수에 의해 구해지는 변수	하나의 행에만 존재하고 다른 행에는 존재하지 않음

- **본 예제에서는 2개의 변수를 비기저 변수(=0)로 가정해야 식을 풀 수 있음**

1행: $x_3 \mid -x_1 + x_2 + x_3 = 4$ ← 4/1 = 4

2행: $x_4 \mid x_1 + x_2 + x_4 = 6$ ← 6/1 = 6

3행: $\mid -4x_1 - 5x_2 = f - 0$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

□: 비기저 변수(=0)
○: 기저 변수

1행에 포함된 기저변수 x3가 비기저 변수로 변경

1행을 정리하면, $x_2 = 4 + x_1 - x_3$

이를 2, 3행에 대입하면

$$x_1 + (4 + x_1 - x_3) + x_4 = 6$$
$$\Rightarrow 2x_1 - x_3 + x_4 = 2$$
$$-4x_1 - 5(4 + x_1 - x_3) = f$$
$$\Rightarrow -9x_1 + 5x_3 = f + 20$$

비기저 변수: x1, x2 ,x3

기저 변수 : x3, x4 ,x2

선택된 변수(x_2 / 1행, 2열)를 중심으로 Pivot을 실시

1행: $x_2 \mid -x_1 + x_2 + x_3 = 4$

2행: $x_4 \mid 2x_1 - x_3 + x_4 = 2$

3행: $\mid -9x_1 + 5x_3 = f + 20$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

□: 비기저 변수(=0)
○: 기저 변수

Pivot: Gauss-Jordan 소거법과 같은 개념
선택한 변수를 하나의 행에만 남기고
다른 행에서는 모두 소거

5.3 Simplex 방법을 이용한 선형 계획 문제의 해법(4)

- Pivot 후 변경된 기저 해(“꼭지점”)

변수 종류	설명	구분 방법
비기저 변수	0으로 가정하는 변수	목적 함수는 비기저 변수로만 구성되어 있음
기저 변수	비기저 변수에 의해 구해지는 변수	하나의 행에만 존재하고 다른 행에는 존재하지 않음

- 본 예제에서는 2개의 변수를 비기저 변수(=0)로 가정해야 식을 풀 수 있음

1행: x_2 | $\boxed{-x_1} + x_2 + \boxed{x_3} = 4$

2행: x_4 | $\boxed{2x_1} \quad \boxed{-x_3} + x_4 = 2$

3행: | $\boxed{-9x_1} \quad \boxed{+5x_3} = f + 20$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

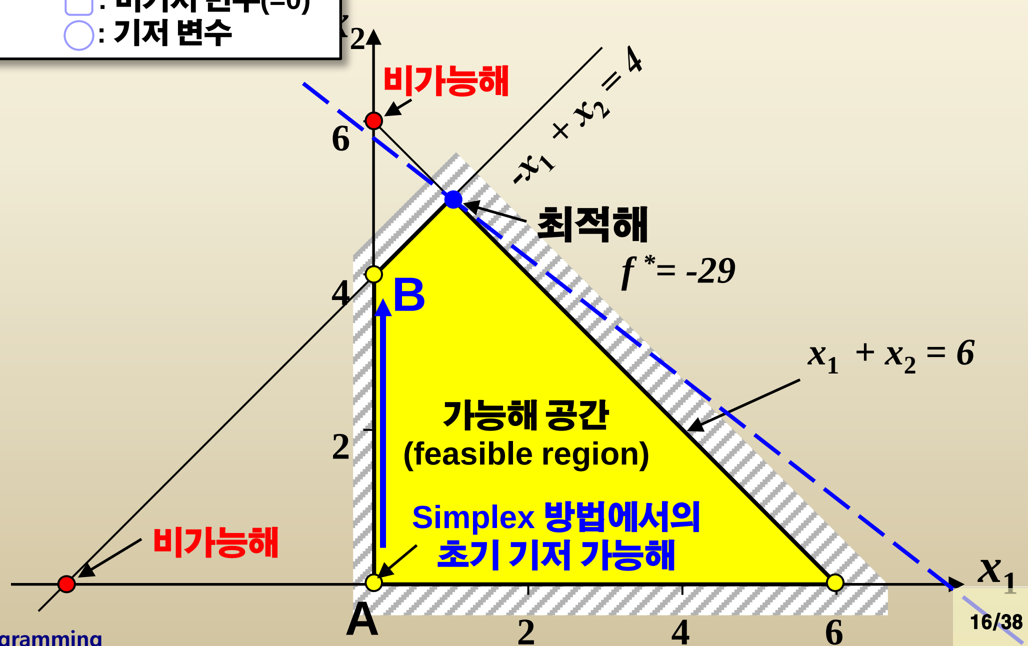
□ : 비기저 변수(=0)
○ : 기저 변수

비기저 변수: x1, x3

기저 변수 : x2, x4

X1=x3=0 을 대입 ➡ x2=4, x4=2

**➡ 새로운 해 B(x_1, x_2, x_3, x_4)
= (0, 4, 0, 2)와
개선된 목적 함수 값 -20을 얻게 됨**



5.3 Simplex 방법을 이용한 선형 계획 문제의 해법(5)

- 비기저 변수와 기저 변수의 교환

변수 종류	설명	구분 방법
비기저 변수	0으로 가정하는 변수	목적 함수는 비기저 변수로만 구성되어 있음
기저 변수	비기저 변수에 의해 구해지는 변수	하나의 행에만 존재하고 다른 행에는 존재하지 않음

- 본 예제에서는 2개의 변수를 비기저 변수(=0)로 가정해야 식을 풀 수 있음

1행: $x_2 \quad -x_1 + x_2 + x_3 = 4$

2행: $x_4 \quad 2x_1 - x_3 + x_4 = 2 \quad \longleftarrow 2/2 = 1$

3행: $-9x_1 + 5x_3 = f + 20$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

□: 비기저 변수(=0)
○: 기저 변수

→ **2행에 포함된 기저변수 x4가 비기저 변수로 변경**

비기저 변수: x1, x3 ,x4

기저 변수 : x2, x4 ,x1

목적 함수의 계수가 최소(음수)인 변수 x1의 값을 증가시키면 목적 함수 값이 더 작아짐 → x1를 기저 변수로 변경할 예정

2개의 변수를 0으로 가정해야 식이 풀리므로 x2와 x4중 하나를 0으로 가정해야 함 → x2, x4중 하나를 비기저 변수로 변경

제약 조건식 중 선택된 열의 계수가 양수이며 최소의

$$\frac{\text{각 행의 우변의 값}}{\text{각 행의 선택된 열에서의 해당 변수의 계수}} =$$

비율을 갖는 행의 기저 변수를 선택 → x4를 비기저 변수로 변경할 예정

<참고> 선택된 열의 계수가 음수인 행은 선택 안됨

5.3 Simplex 방법을 이용한 선형 계획 문제의 해법(6)

- 선택된 변수를 중심으로 Pivot

변수 종류	설명	구분 방법
비기저 변수	0으로 가정하는 변수	목적 함수는 비기저 변수로만 구성되어 있음
기저 변수	비기저 변수에 의해 구해지는 변수	하나의 행에만 존재하고 다른 행에는 존재하지 않음

- 본 예제에서는 **2개의 변수를 비기저 변수(=0)로 가정**해야 식을 풀 수 있음

$$
\begin{array}{lll|l}
\text{1행:} & x_2 & & -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\
\text{2행:} & x_4 & & 2x_1 - x_3 + x_4 = 2 \quad \longleftarrow 2/2 = 1 \\
\text{3행:} & & & -9x_1 + 5x_3 = f + 20
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

□ : 비기저 변수(=0)
○ : 기저 변수

→ 2행에 포함된 기저변수 x4가 비기저 변수로 변경

비기저 변수: x1, x3 ,x4

기저 변수 : x2, x4 ,x1

선택된 변수(x_1 / 2행, 1열)를 중심으로 Pivot을 실시

(1행 + 0.5×2행)을 해서 나온 결과 →

(0.5×2행)을 해서 나온 결과 →

(3행 + 4.5×2행)을 해서 나온 결과 →

$$
\begin{array}{ll|l}
\text{1행:} & x_2 & x_2 + 0.5x_3 + 0.5x_4 = 5 \\
\text{2행:} & x_1 & x_1 - 0.5x_3 + 0.5x_4 = 1 \\
\text{3행:} & & +0.5x_3 + 4.5x_4 = f + 29
\end{array}
$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

□ : 비기저 변수(=0)
○ : 기저 변수

5.3 Simplex 방법을 이용한 선형 계획 문제의 해법(7)

- Pivot 후 변경된 기저 해("꼭지점") / Simplex 종료

변수 종류	설명	구분 방법
비기저 변수	0으로 가정하는 변수	목적 함수는 비기저 변수로만 구성되어 있음
기저 변수	비기저 변수에 의해 구해지는 변수	하나의 행에만 존재하고 다른 행에는 존재하지 않음

- 본 예제에서는 2개의 변수를 비기저 변수(=0)로 가정해야 식을 풀 수 있음

1행: x_2 | $x_2 + \boxed{0.5x_3} + \boxed{0.5x_4} = 5$

2행: x_1 | $x_1 - \boxed{0.5x_3} + \boxed{0.5x_4} = 1$

3행: | $+\boxed{0.5x_3} + \boxed{4.5x_4} = f + 29$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

□: 비기저 변수(=0)
○: 기저 변수

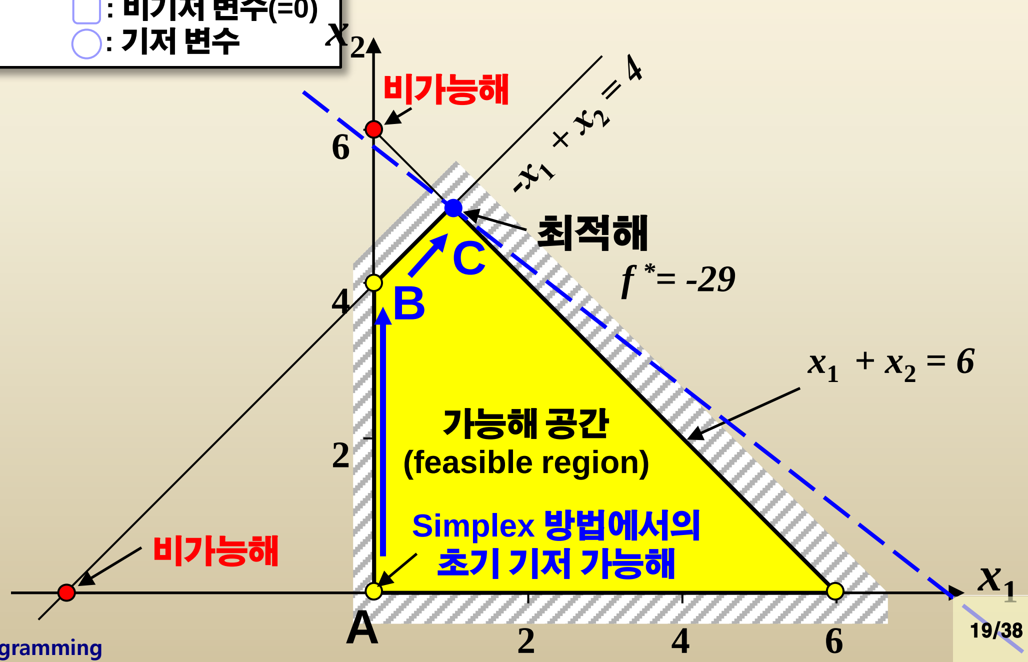
목적 함수의 모든 계수가 0 이상이므로 현재의 해가 최적해임
→ Simplex 종료

비기저 변수: x3, x4

기저 변수 : x1, x2

X3=x4=0 을 대입 ➡ X1=1, x2=5

➡ 새로운 해 C(x_1, x_2, x_3, x_4)
= (1, 5, 0, 2)와
개선된 목적 함수 값 -29을 얻게 됨



[참고] Simplex 방법에서 Pivot을 수행할 열을 선택할 때 목적 함수의 계수가 최소인 열을 선택하는 이유

1행:	x_3	$-x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 4$
2행:	x_4	$x_1 + x_2 \qquad + x_4 = 6$
3행:		$-4x_1 - 5x_2 \qquad = f - 0$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

□ : 비기저 변수(=0)
○ : 기저 변수

비기저 변수인 x_1과 x_2는 0이다. $(x_3 = 4,\ x_4 = 6)$

목적 함수의 계수가 음수인 변수가 있다면, 해당 변수(x_1과 x_2)는 더 크게 변경하는 것이 좋다.

계수가 최소인 변수(x_2)를 증가시키는 것이 목적 함수를 더 빨리 감소시킬 수 있다.

[참고] Simplex 방법에서 선택된 열이 양수이며 최소의 비율을 갖는 행을 선택하는 이유

$$
\begin{array}{lll}
\text{1행:} & x_3 & \big| \; -x_1 + x_2 + x_3 \qquad = 4 \quad \longleftarrow \ 4/1 = 4 \longleftarrow \text{최소의 비율을 갖는 행(1행)} \\
\text{2행:} & x_4 & \big| \; x_1 + x_2 \qquad + x_4 = 6 \quad \longleftarrow \ 6/1 = 6 \\
\text{3행:} & & \big| \; -4x_1 - 5x_2 \qquad = f - 0 \\
 & & \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0
\end{array}
$$

□: 비기저 변수(=0)
○: 기저 변수

위의 1, 2행을 다시 정리하면,

$$-x_1 + x_3 = 4 - x_2$$
$$x_1 + x_4 = 6 - x_2$$

1) 1행을 선택하고 x_2 가 최대로 되는 4 로 정하면 목 적함수가 최소로 되고, $(\because \text{비기저 변수}\ x_1 = x_3 = 0)$

$$x_1 = x_3 = 0, x_4 = 2$$

2) 2행을 선택하고 x_2 가 최대로 되는 6 으로 정하면 목 적함수가 최소로 되지만, $(\because \text{비기저 변수}\ x_1 = x_4 = 0)$ **그러나**

$x_1 = x_4 = 0, x_3 = -2$ ➡ **변수가 음이 아니라는 조건을 위배함**

[참고] Simplex 방법에서 선택된 열의 계수가 음수인 행은 선택하지 않는 이유

1행:	x_2	$-x_1 + x_2 + x_3 = 4$	← 선택된 열의 계수가 음수인 행은 선택 안됨
2행:	x_4	$2x_1 - x_3 + x_4 = 2$	← 2/2 = 1
3행:		$-9x_1 + 5x_3 = f + 20$	

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$$

□: 비기저 변수(=0)
○: 기저 변수

비기저 변수: x1, x3

기저 변수 : x2, x4 ,x1

1. 위의 1, 2행을 다시 정리하면,

$$x_2 + x_3 = 4 + x_1 \quad \text{------} \quad ①$$

$$-x_3 + x_4 = 2 - 2x_1 \quad \text{------} \quad ②$$

2. x2, x4중 하나를 비기저 변수로 변경해야 함

3. x4를 비기저 변수로 변경하면

3-1. 식 ②는 다음과 같이 변경 됨 (비기저 변수 x_3=0, x_4=0)

$$0 = 2 - 2x_1 \rightarrow 2 = 2x_1 \rightarrow 1 = x_1$$

3-2. 식 ①은 다음과 같이 변경 됨(비기저 변수 x_3=0, x_4=0)

$$x_2 = 4 + x_1 \ge 0$$

3-1에서 x_1의 값이 어떤 것으로 결정 되더라도 식 ①을 만족한다.

→ 계수가 양인 행에 포함된 기저 변수를 선택하면 계수가 음수인 행의 식은 항상 만족함.

[참고] Simplex 방법에서 선택된 열의 계수가 음수인 행은 선택하지 않는 이유

1행: $x_2 \;|\; -x_1 + x_2 + x_3 = 4$ ⟵ 선택된 열의 계수가 음수인 행은 선택 안됨

2행: $x_4 \;|\; 2x_1 - x_3 + x_4 = 2$ ⟵ 2/2 = 1

3행: $\;|\; -9x_1 + 5x_3 = f + 20$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

□: 비기저 변수(=0)
○: 기저 변수

비기저 변수: x1, x3

기저 변수 : x2, x4 ,x1

1. 위의 1, 2행을 다시 정리하면,

$$x_2 + x_3 = 4 + x_1 \quad \text{------} \quad ①$$

$$-x_3 + x_4 = 2 - 2x_1 \quad \text{------} \quad ②$$

2. x2, x4중 하나를 비기저 변수로 변경해야 함

3. **x2를 비기저 변수로 변경**하면

3-1. 식 ①은 다음과 같이 변경 됨 (비기저 변수 $x_2=0, x_3=0$)

$0 = 4 + x_1 \rightarrow x_1 = -4$ ➡ 변수가 음이 아니라는 조건을 위배함

Simplex 단체표를 이용한 선형 계획 문제의 해법

Pivot: Gauss-Jordan 소거법과 같은 개념
선택한 변수를 하나의 행에만 남기고
다른 행에서는 모두 소거

비기저 변수 (0으로 두는 변수) / **기저 변수**

기저 변수		
1행:	x_3	$-x_1 + x_2 + x_3 = 4$ ← **4/1 = 4**
2행:	x_4	$x_1 + x_2 + x_4 = 6$ ← **6/1 = 6**
3행:		$-4x_1 - 5x_2 = f - 0$

기저 변수	x1	x2	x3	x4	bi	bi/ai
1행: x3	-1	**1**	1	0	4	**4**
2행: x4	1	1	0	1	6	6
3행: Obj.	-4	**-5**	0	0	f-0	-

1행 2열 중심으로 Pivot을 실시

새로운 2행 = (2행 - 1행)
새로운 3행 = (3행 + 5×1행)

비기저 변수

기저 변수		
1행:	x_2	$-x_1 + x_2 + x_3 = 4$ ← **4/-1 = -4** (음수면 선택 안됨)
2행:	x_4	$2x_1 - x_3 + x_4 = 2$ ← **2/2 = 1**
3행:		$-9x_1 + 5x_3 = f + 20$

기저 변수	x1	x2	x3	x4	bi	bi/ai
1행: X2	-1	1	1	0	4	-4
2행: x4	**2**	0	-1	1	2	**1**
3행: Obj.	**-9**	0	5	0	f+20	-

2행 1열 중심으로 Pivot을 실시

새로운 1행 = (1행 + 0.5×2행)
새로운 2행 = (0.5×2행)
새로운 3행 = (3행 + 4.5×2행)

비기저 변수

기저 변수		
1행:	x_2	$x_2 + 0.5x_3 + 0.5x_4 = 5$
2행:	x_1	$x_1 - 0.5x_3 + 0.5x_4 = 1$
3행:		$+0.5x_3 + 4.5x_4 = f + 29$

기저 변수	x1	x2	x3	x4	bi	bi/ai
1행: x2	0	1	0.5	0.5	**5**	-
2행: x1	1	0	-0.5	0.5	**1**	-
3행: Obj.	**0**	**0**	**0.5**	**4.5**	**f+29**	-

목적 함수의 모든 계수가 0 이상이므로
현재의 해가 최적해임(x_1=1, x_2=5, x_3=x_4=0, f=-29)

선형 계획 문제의 예
– 2개의 설계 변수와 부등호("≥") 제약 조건을 가진 문제

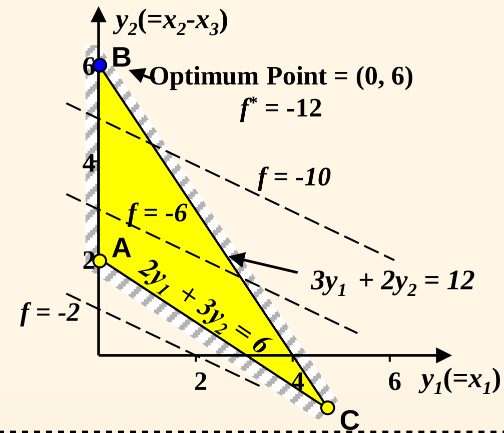
Maximize $z = y_1 + 2y_2$

Subject to $3y_1 + 2y_2 \le 12$

$2y_1 + 3y_2 \ge 6$

$y_1 \ge 0$

y_2 는 부호 제한 없음



목적 함수의 최대화 문제를 최소화 문제로 변환

Minimize $F = -y_1 - 2y_2$

Subject to $3y_1 + 2y_2 \le 12$

$2y_1 + 3y_2 \ge 6$

$y_1 \ge 0$

y_2 는 부호 제한 없음

- 변수의 부호 제약이 없으나, 양의 변수로 변경될 수 있는 예
+ 조선소의 이익 = 선가 - 건조비

부호 제한이 없는 변수를
값이 음이 아닌 변수로 변환
($y_2 = y_2^+ - y_2^-$)
$x_1 = y_1, x_2 = y_2^+, x_3 = y_2^-$ **라고 가정하면**

Minimize $f = -x_1 - 2x_2 + 2x_3$

Subject to $3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 12$

$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 \ge 6$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

Simplex 방법을 이용하기 위한 부등호("≥") 제약 조건의 변환 방법(1)

Minimize $f = -x_1 - 2x_2 + 2x_3$

Subject to

$3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 12$ $\Rightarrow$ $3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + \underline{x_4} = 12$

[복습] "≤" 형태의 부등호 제약 조건: **완화 변수(slack variable)의 도입**

$\boxed{2x_1 + 3x_2 - 3x_3 \ge 6}$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

"≥" 형태의 부등호 제약 조건:

잉여 변수(surplus variable) 및 인위 변수(artificial variable)의 도입

$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 \ge 6$ ➡ $2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - \underline{x_5} + \underline{x_6} = 6$

x_5: 잉여 변수 (0보다 크거나 같음)

x_6: 인위 변수(0보다 크거나 같음)

"인위 변수 도입 이유"

Simplex 방법을 시작할 때 문제의 원래 변수(x_1, x_2, x_3)를 "비기저 변수" 로 가정하면(x_1=x_2=x_3=0), -x_5 = 6이 된다.

➡ 수학적으로 정합성이 없으므로 x_6를 인위적으로 추가하여 수학적인 정합성을 유지한다.
그런데 x_6는 인위적으로 추가한 것이므로 최적해가 존재하면 이 변수의 값은 반드시 0이 되어야 한다.

Simplex 단체표를 이용한 선형 계획 문제의 해법
- “≥” 형태의 제약 조건을 가진 문제에 대한 Simplex 방법(1)

①

Maximize $z = y_1 + 2y_2$

Subject to $3y_1 + 2y_2 \le 12$

$2y_1 + 3y_2 \ge 6$

$y_1 \ge 0$

y_2 는 부호 제한 없음

1. 최소화 문제로 변환함
2. y_2 는 부호 제한이 없으므로 $y_2 = y_2^+ - y_2^-$ 로 분해함
3. $x_1 = y_1, x_2 = y_2^+, x_3 = y_2^-$ 라고 가정함
4. 부등호 제약 조건을 등호 제약 조건으로 만듬 (완화, 잉여 변수의 도입)

②

Minimize $f = -x_1 - 2x_2 + 2x_3$

Subject to $3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 12$

$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_5 = 6$

$x_i \ge 0; i = 1 \; to \; 5$

완화 변수 (x_4), 잉여 변수 (x_5)

원래 변수 x_1, x_2, x_3 를 모두 0이라 두고(비기저 변수)

기저 변수 x_4, x_5 를 구하면

$x_4 = 12, x_5 = -6$ ➡ 음이 아니라는 조건을 위배함

“≥” 형태의 등호 제약 조건에 인위 변수 x_6를 추가적으로 도입함

③

Minimize $f = -x_1 - 2x_2 + 2x_3$

Subject to $3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 12$

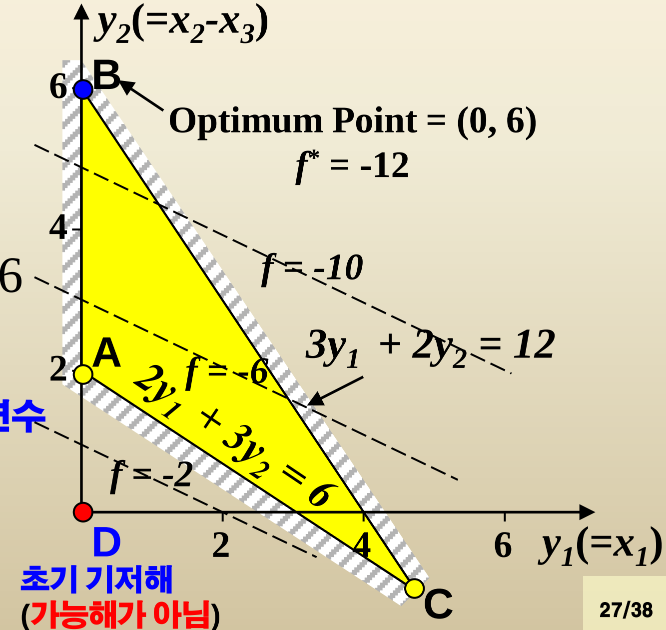
$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_5 + x_6 = 6$

$x_i \ge 0; i = 1 \; to \; 6$

완화 변수 (x_4), 잉여 변수 (x_5), 인위 변수 (x_6)

원래 변수 x_1, x_2, x_3와 잉여 변수 x_5를 모두 0이라 두고(비기저 변수) 기저변수 x_4, x_6을 구하면 x_4=12, x_6=6이다. ➡ 초기 기저해(가능해가 아님)

그런데 x_6은 인위적으로 추가한 변수이므로 이 값을 0으로 만들어야 한다.



Simplex 단체표를 이용한 선형 계획 문제의 해법
- "≥" 형태의 제약 조건을 가진 문제에 대한 Simplex 방법(2)

③

완화 변수

Minimize $f = -x_1 - 2x_2 + 2x_3$

Subject to $3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 12$

$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_5 + x_6 = 6$

$x_i \geq 0; i = 1\,to\,6$

잉여 변수 인위 변수

인위 변수의 합으로 표현되는 인위 목적 함수(w=x_6)를 정의함

④

$$3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 12$$

$$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_5 + x_6 = 6$$

$$-x_1 - 2x_2 + 2x_3 = f$$

$$\boxed{-2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_5 = w - 6}$$

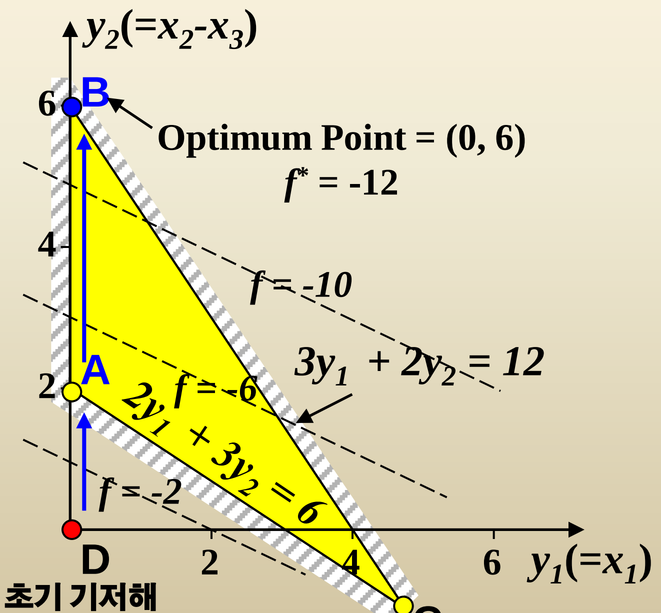
인위 목적 함수 식

$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_5 + x_6 = 6$ 식에서 x_6=w라 두고 정리한 것임

⑤ 초기 기저 가능해(인위 목적 함수 w=x_6을 최소화("w=0") 하는 해)를 구함 (Simplex 방법의 Phase 1)

인위 변수는 인위적으로 추가한 것이므로 최적해가 존재하면 이 변수의 값은 0이어야 함

⑥ 목적 함수 *f* 를 최소화 하는 해를 구함 (Simplex 방법의 Phase 2)



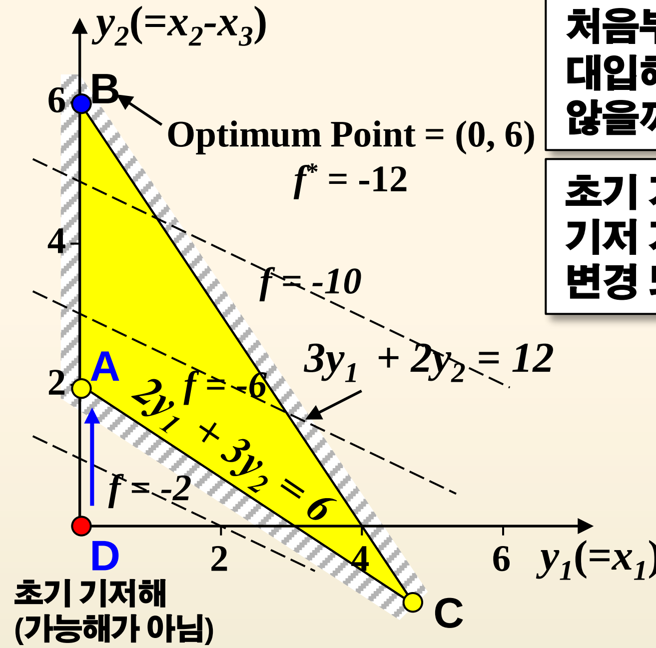
Simplex 단체표를 이용한 선형 계획 문제의 해법
- “≥” 형태의 제약 조건을 가진 문제에 대한 Simplex 방법(3)

④

$$3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 12$$
$$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_5 + x_6 = 6$$
$$-x_1 - 2x_2 + 2x_3 = f$$
$$-2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_5 = w - 6$$

초기에는 원래 변수($x_1, \ldots, x_3$), 잉여 변수(x_5)를 0으로 가정하고(“비기저 변수”), 완화 변수(x_4)와 인위 변수(x_6)를 기저 변수로 가정하여 풀기 시작함(“초기 기저해로부터 시작”)

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	bi	bi/ai
x4	3	2	-2	1	0	0	12	-
x6	2	3	-3	0	-1	1	6	-
Obj.	-1	-2	2	0	0	0	*f*-0	-
A. Obj.	-2	-3	3	0	1	0	w-6	-



처음부터 x_6에 0을 대입해도 되지 않을까? ▷

초기 기저해가 기저 가능해로 변경 되는 과정 ▷

⑤ **Phase 1: 인위 목적 함수를 기준으로 Pivot을 수행함(w = 0이 될 때까지 수행)**

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	bi	bi/ai
x4	3	2	-2	1	0	0	12	6
x6	2	**3**	-3	0	-1	1	6	**2**
Obj.	-1	**-2**	2	0	0	0	*f*-0	-
A. Obj.	-2	-3	3	0	1	0	w-6	-

➡

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	bi	bi/ai
x4	5/3	0	0	1	2/3	-2/3	8	-
x2	2/3	1	-1	0	-1/3	1/3	2	-
Obj.	1/3	0	0	0	-2/3	2/3	*f*+4	-
A. Obj.	0	0	0	0	0	1	**w-0**	-

인위 변수는 인위적으로 추가한 것이므로 최적해가 존재하면 이 변수의 값은 0이어야 함

새로운 1행 = 1행 - (2/3)×2행
새로운 2행 = (1/3)×2행
새로운 2행 = 3행 - (2/3)×2행
새로운 4행 = 4행 + 2행

인위 목적 함수가 0이므로 Phase 1이 완료되었음
점 A(x_1=x_3=x_5=x_6=0, x_2=2, x_4=8)

Simplex 단체표를 이용한 선형 계획 문제의 해법
- “≥” 형태의 제약 조건을 가진 문제에 대한 Simplex 방법(4)

⑤ Phase 1: 인위 목적 함수를 기준으로 Pivot을 수행함(w = 0이 될 때까지 수행)

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	bi	bi/ai
x4	3	2	-2	1	0	0	12	6
x6	2	**3**	-3	0	-1	1	6	**2**
Obj.	-1	**-2**	2	0	0	0	f-0	-
A. Obj.	-2	-3	3	0	1	0	w-6	-

➡

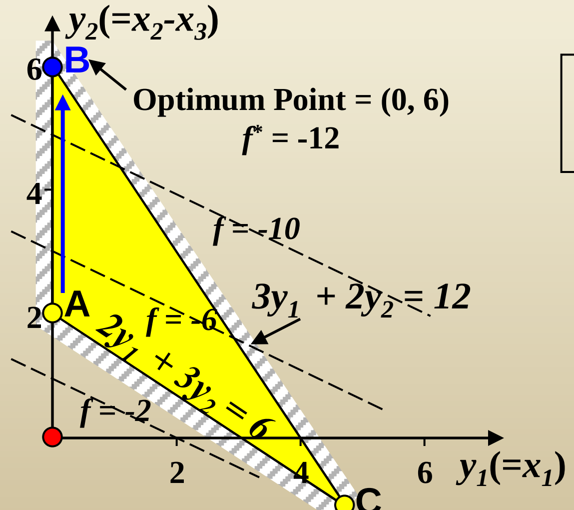
	x1	x2	x3	x4	x5	x6	bi	bi/ai
x4	5/3	0	0	1	2/3	-2/3	8	-
x2	2/3	1	-1	0	-1/3	1/3	2	-
Obj.	1/3	0	0	0	-2/3	2/3	f+4	-
A. Obj.	0	0	0	0	0	1	**w-0**	-

⑥ Phase 2: 목적 함수 f를 기준으로 Pivot을 수행함(목적 함수의 모든 계수가 음이 아닐 때까지 수행)

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	bi	bi/ai
x4	5/3	0	0	1	**2/3**	-2/3	8	**12**
x2	2/3	1	-1	0	-1/3	1/3	2	-6
Obj.	1/3	0	0	0	**-2/3**	2/3	f+4	-

➡

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	bi	bi/ai
x5	5/2	0	0	3/2	1	-1	**12**	-
x2	3/2	1	-1	1/2	0	0	**6**	-
Obj.	2	0	0	1	0	0	***f*+12**	-



새로운 1행 = 1행 × (2/3)
새로운 2행 = 2행 + (1/2)×1행
새로운 3행 = 3행 + 1행

목적 함수의 모든 계수가 0 이상이므로 현재의 해가 최적해임
($x_1=x_3=x_4=0, x_2=6, x_5=12, f=-12$)

인위 목적 함수의 구성 방법Simplex 방법을 이용하기 위한 등호("=") 제약 조건의 변환 방법

Minimize $f = -x_1 - 2x_2 + 2x_3$

Subject to $3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 12$ → $3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + \underline{x_4} = 12$

[복습] "≤" 형태의 부등호 제약 조건: 완화 변수(slack variable)의 도입

$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 \ge 6$ → $2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - \underline{x_5} + \underline{x_6} = 6$

[복습]"≥" 형태의 부등호 제약 조건:
잉여 변수(surplus variable) 및 인위 변수(artificial variable)의 도입

$\boxed{x_1 + x_2 + x_3 = 6}$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$

"=" 형태의 등호 제약 조건: 인위 변수(artificial variable)의 도입

$x_1 + x_2 + x_3 = 6$ ➡ $x_1 + x_2 + x_3 + \underline{x_7} = 6$

인위 변수(0보다 크거나 같음)

"인위 변수 도입 이유"

**Simplex 방법을 시작할 때 문제의 원래 변수(x_1, x_2, x_3)를 "비기저 변수"로 가정하면(x_1=x_2=x_3=0),
이 식이 성립하지 않는다.**

**➡ 수학적으로 정합성이 없으므로 x_7를 인위적으로 추가하여 수학적인 정합성을 유지한다.
그런데 x_7는 인위적으로 추가한 것이므로 최적해가 존재하면 이 변수의 값은 반드시 0이 되어야 한다.**

인위 목적 함수의 정의 방법

①

$$\text{Minimize} \quad f = -x_1 - 2x_2 + 2x_3$$

$$\text{Subject to} \quad 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 12$$

$$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 \ge 6$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

부등호 제약 조건을 등호 제약 조건으로 변환 →

②

$$\text{Minimize} \quad f = -x_1 - 2x_2 + 2x_3$$

$$\text{Subject to} \quad 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 12$$

$$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_5 + x_6 = 6$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_7 = 6$$

$$x_i \ge 0; \; i = 1 \; to \; 7$$

$$x_6 - 6 = -2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_5$$

$$x_7 - 6 = -x_1 - x_2 - x_3$$

$$w(= x_6 + x_7) - 12 = -3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_5$$

인위 변수의 합으로 표현되는 인위 목적 함수(w=x_6+x_7)를 정의함

③

$$3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 12$$

$$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_5 + x_6 = 6$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_7 = 6$$

$$-x_1 - 2x_2 + 2x_3 = f$$

$$-3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_5 = w - 12$$

초기 기저 가능해(인위 목적 함수 w=x_6+x_7을 최소화 ("w=0"; x_6=x_7=0) 하는 해)를 구함

<참고> 인위 변수 각각에 대해 인위 목적 함수를 정의하는 경우

$$3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 12$$

$$2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_5 + x_6 = 6$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_7 = 6$$

$$-x_1 - 2x_2 + 2x_3 = f$$

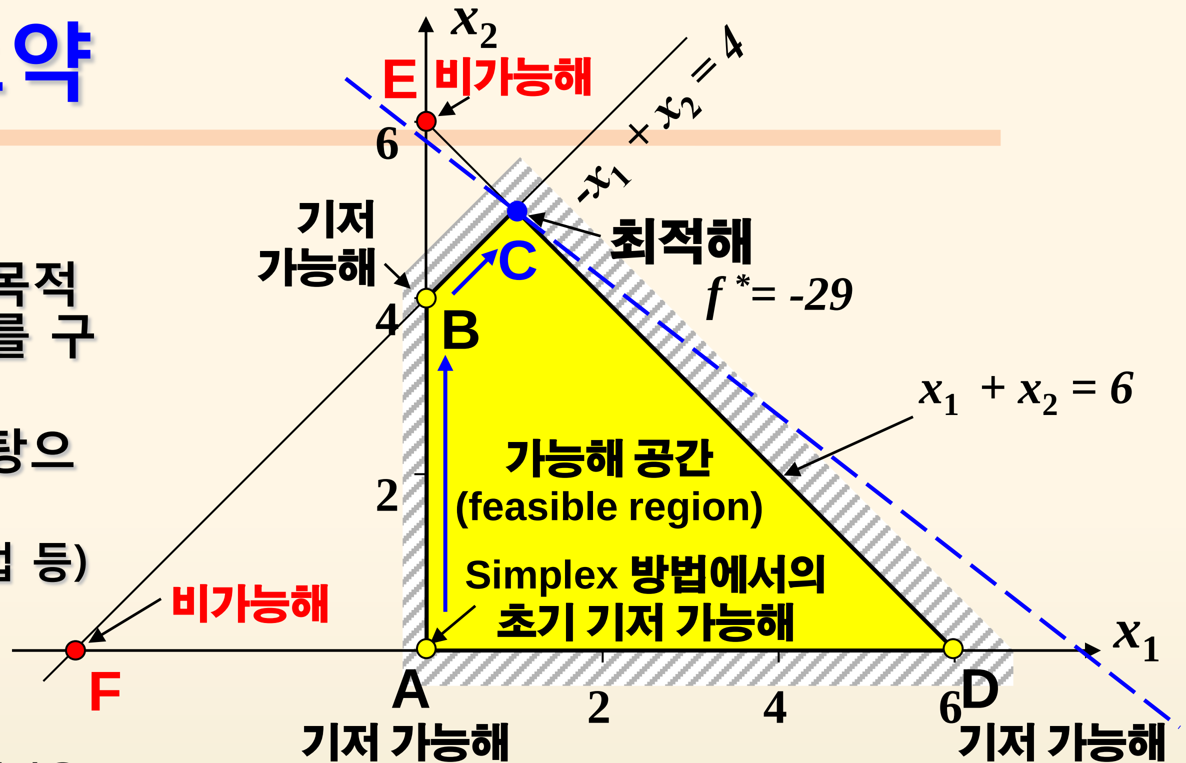
$$\left.\begin{aligned} -2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_5 &= w_1 - 6 \\ -x_1 - x_2 - x_3 &= w_2 - 6 \end{aligned}\right\}$$

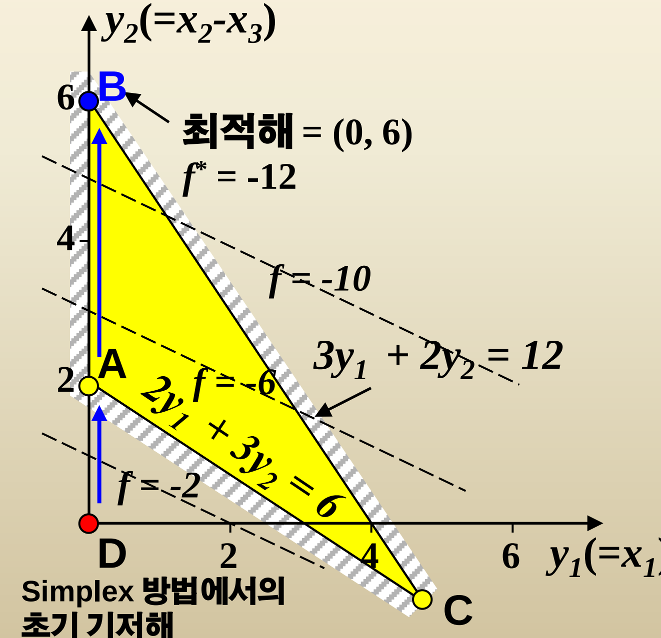
➡ **인위목 적 함수 w_1을 최소화(x_6=0) 하고, 인위목 적 함수 w_2를 최소화(x_7=0) 하는 과정을 각각 수행함**

인위 변수는 0보다 크거나 같으므로,
인위 목적 함수를 최소화 한다는 것은
인위 변수가 모두 0의 값을 가져
인위 목적 함수의 값이 0인 것을 의미함
따라서, 인위 변수의 합으로 인위 목적 함수를 정의하는 것이 편리함

Simplex 방법의 요약

- 기저 가능해로부터 시작하여 목적 함수를 점차 개선시켜 최적해를 구하는 방법
- 1차 연립 방정식의 이론을 바탕으로 함
  - 행렬 연산(가우스-조단 소거법 등)을 이용함
- Simplex 방법의 종류
  - One-phase Simplex 방법
    - "≤" 형태의 부등호 제약 조건만을 가진 문제
  - Two-phase Simplex 방법
    - "≥" 형태의 부등호 제약 조건 또는 등호 제약 조건("=")을 가진 문제
    - Phase 1: 초기 기저 가능해를 선정하기 위해 인위 목적 함수(w)를 0으로 하는 해를 구하는 단계
    - Phase 2: 초기 기저 가능해로부터 해의 개선을 통해 최적해를 구하는 단계





Simplex 방법의 알고리즘의 요약

- 단계 1: 초기 기저 가능해를 선정한다.
  - “<=” 형태의 부등호 제약 조건: 주어진 문제의 원래의 변수를 비기저 변수(0으로 가정)로, 완화 변수를 기저 변수로 가정하여 초기 기저 가능해를 결정함
  - “>=” 형태의 부등로 제약 조건 또는 등호 제약 조건(“=”): Two-phase Simplex 방법을 이용하며, Phase 1에서 인위 목적 함수 w를 0으로 하는 초기 기저 가능해를 선정함
- 단계 2: 목적 함수를 비기저 변수로만 표현한다.
- 단계 3: 비기저 변수에 대한 목적 함수의 계수가 모두 음이 아닌지를 확인한다. 만약 그렇다면 현재의 해가 최적해이며 그렇지 않다면 다음 단계로 간다.
- 단계 4: Pivot 열과 행을 결정한다. 이때 결정된 Pivot 열에 해당하는 비기저 변수가 새로운 기저 변수로 되고, Pivot 행에 해당하는 기저 변수가 비기저 변수로 된다.
- 단계 5: 가우스-조단 소거법을 이용하여 Pivot을 수행한다.
- 단계 6: 비기저 및 기저 변수의 값을 구한다. 그리고 단계 3으로 간다.

[참고] 부호 제약 조건이 없는 변수를 음이 아닌 2개의 변수로 치환하는 시점

수학 모델

Minimize $z = -y_1 - 2y_2$

Subject to $3y_1 + 2y_2 \le 12$

$2y_1 + 3y_2 \ge 6$

$y_1 \ge 0$

y_2 는 부호 제한 없음

$y_2 = y_2^+ - y_2^-$

$y_2^+, y_2^+ \ge 0$

부호 제한이 없는 변수 → 음이 아닌 변수로 수정

Minimize $f = -y_1 \boxed{- 2y_2^+ + 2y_2^-}$

Subject to $3y_1 + \boxed{2y_2^+ - 2y_2^-} \le 12$

$2y_1 + \boxed{3y_2^+ - 3y_2^-} \ge 6$

$y_1, y_2^+, y_2^- \ge 0$

순서 (1)

"≤" 형태의 부등호 제약 조건:
완화 변수(slack variable)의 도입

"≥" 형태의 부등호 제약 조건:
잉여 변수(surplus variable) 및
인위 변수(artificial variable)의 도입

"≤" 형태의 부등호 제약 조건:
완화 변수(slack variable)의 도입

"≥" 형태의 부등호 제약 조건:
잉여 변수(surplus variable) 및
인위 변수(artificial variable)의 도입

순서 (2)

Minimize $f = -y_1 - 2y_2$

Subject to $3y_1 + 2y_2 + \boxed{x_1} = 12$

$2y_1 + 3y_2 - \boxed{x_2} + \boxed{x_3} = 6$

$y_1, x_i \ge 0; i = 1 \ to \ 3$

y_2 는 부호 제한 없음

$y_2 = y_2^+ - y_2^-$

$y_2^+, y_2^+ \ge 0$

부호 제한이 없는 변수 → 음이 아닌 변수로 수정

Minimize $f = -y_1 \boxed{- 2y_2^+ + 2y_2^-}$

Subject to $3y_1 + \boxed{2y_2^+ - 2y_2^-} + \boxed{x_1} = 12$

$2y_1 + \boxed{3y_2^+ - 3y_2^-} - \boxed{x_2} + \boxed{x_3} = 6$

$y_1, y_2^+, y_2^- \ge 0, \ x_i \ge 0; i = 1 \ to \ 3$

수학 모델이 결정된 후에는 부호 제한이 없는 변수를 음이 아닌 변수로 수정하는 과정과 완화, 잉여, 인위변수를 추가하는 과정의 순서에 상관 없이 같은 결과를 얻을 수 있다.

[참고] Simplex 방법에서 인위 변수에 처음부터 0을 넣으면 어떻게 되는가?

$$
\begin{aligned}
&3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 12 \\
&2x_1 + 3x_2 - 3x_3 - x_5 + x_6 = 6 \\
&-x_1 - 2x_2 + 2x_3 = f
\end{aligned}
$$

인위 변수인 x_6에 0을 대입하기 위해서는

같은 식 내의 다른 변수 x_1, x_2, x_3, x_5가 음수가 되지 않도록 계산해야 한다.

x_1, x_2, x_3, x_5를 계산하는 과정이 바로
Simplex 방법에서 인위 목적함수를 이용하여 x_6를 0으로 계산하는 과정이다.

[참고] Simplex 방법에서 인위 목적 함수를 이용하여 초기 기저해를 기저 가능해로 변경하는 과정(1/2)

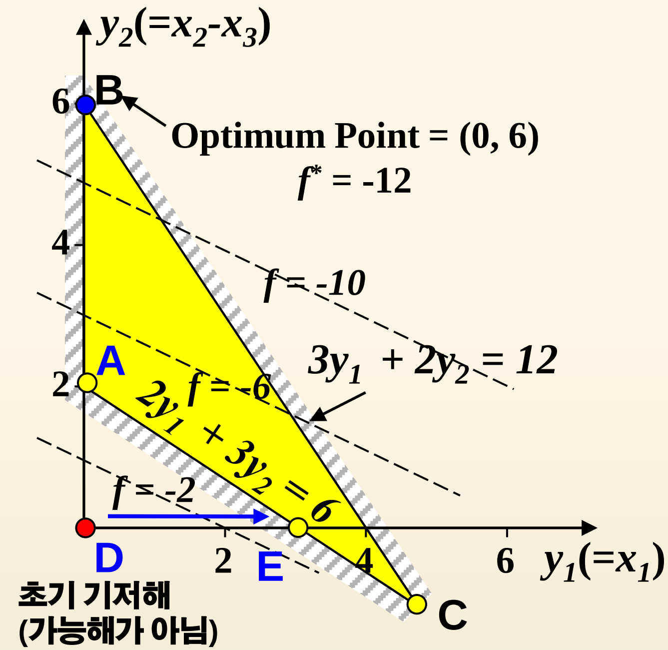
	x1	x2	x3	x4	x5	x6	bi	bi/ai
x4	3	2	-2	1	0	0	12	4
x6	2	**3**	-3	0	-1	1	6	**3**
Obj.	-1	**-2**	2	0	0	0	*f*-0	-
A. Obj.	-2	-3	3	0	1	0	w-6	-

첫번째 열을 선택하여 Pivot을 수행

(일반적인 Simplex 방법에서는 두번째 열을 선택 함)

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	bi	bi/ai
x4	0	-5/2	5/2	1	3/2	-3/2	3	-
x1	1	3/2	-3/2	0	-1/2	1/2	3	-
Obj.	0	-1/2	1/2	0	-1/2	1/2	*f*+3	-
A. Obj.	0	0	0	0	0	1	**w-0**	-

인위 목적 함수가 0이므로
Phase 1이 완료되었음
점 E(x_2=x_3=x_5=x_6=0, x_1=3, x_4=3)



초기 기저해에서 인접한 모서리를 거쳐 기저 가능해로 변경 됨
→ 기저 가능해에서 최적점을 찾아가는 과정과 유사함
(인접한 모서리를 거쳐 찾아감)

- Phase1이 종료되었으므로 Phase2를 진행
- Phase2: 목적함수 f를 기준으로 Pivot을 수행

[참고] Simplex 방법에서 인위 목적 함수를 이용하여 초기 기저해를 기저 가능해로 변경하는 과정(2/2)

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	bi	bi/ai
x4	0	-5/2	5/2	1	3/2	-3/2	3	-6/5
x1	1	3/2	-3/2	0	-1/2	1/2	3	2
Obj.	0	-1/2	1/2	0	-1/2	1/2	*f*+3	-
A. Obj.	0	0	0	0	0	1	w-0	-

인위 목적 함수가 0이므로
Phase 1이 완료되었음
점 E($x_2=x_3=x_5=x_6=0$, $x_1=3$, $x_4=3$)

새로운 1행 = 1행 + 2행 × (5/3)
새로운 2행 = 2행 × (2/3)
새로운 3행 = 3행 + 2행 × (1/3)

- Phase1이 종료되었으므로 Phase2를 진행
- Phase2: 목적함수 f를 기준으로 Pivot을 수행

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	bi	bi/ai
x4	5/3	0	0	1	**2/3**	-2/3	8	**12**
x2	2/3	1	-1	0	-1/3	1/3	2	-6
Obj.	1/3	0	0	0	**-2/3**	2/3	*f*+4	-

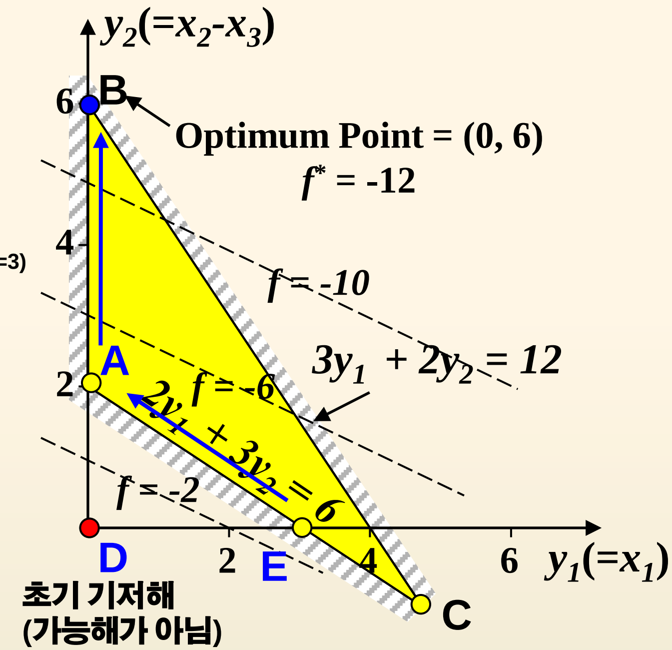
새로운 1행 = 1행 × (2/3)
새로운 2행 = 2행 + (1/2)×1행
새로운 3행 = 3행 + 1행

점 A($x_1=x_3=x_5=x_6=0, x_2=2, x_4=8$)

	x1	x2	x3	x4	x5	x6	bi	bi/ai
x5	5/2	0	0	3/2	1	-1	**12**	-
x2	3/2	1	-1	1/2	0	0	**6**	-
Obj.	2	0	0	1	0	0	***f*+12**	-

목적 함수의 모든 계수가 0 이상이므로
현재의 해가 최적해임

점 B($x_1=x_3=x_4=x_6=0, x_2=6, x_5=12, f=-12$)



초기 기저해에서 인접한 모서리를 거쳐 기저 가능해로 변경 됨

→ 기저 가능해에서 최적점을 찾아가는 과정과 유사함
(인접한 모서리를 거쳐 찾아감)