Naval Architecture & Ocean Engineering

Computer Aided Ship design

-Part I. Optimal Ship Design-

September, 2009

Prof. Kyu-Yeul Lee

Department of Naval Architecture and Ocean Engineering,
Seoul National University of College of Engineering

Seoul National Univ.

@SDAL Advanced Ship Design Automation Lab.
http://asdal.snu.ac.kr

Ch.6 Constrained Nonlinear Optimization method

6.1 Quadratic Programming; QP
6.2 Sequential Linear Programming; SLP
6.3 Sequential Quadratic Programming; SQP

Seoul National Univ.
@SDAL
Advanced Ship Design Automation Lab.
http://asdal.snu.ac.kr

Naval Architecture & Ocean Engineering

Ch.6 Constrained Nonlinear Optimization method

6.1 Quadratic Programming:QP

Seoul National Univ.
@SDAL
Advanced Ship Design Automation Lab.
http://asdal.snu.ac.kr

[참고] 2변수 함수의 테일러 전개 (복습 / 1)

2변수 함수 $f(x_1, x_2)$ 에 대한 점 (x_1^*, x_2^*) 에서의 테일러 전개식(3차 이상의 고차항은 무시할 경우)

$$f(x_1,x_2) = f(x_1^*,x_2^*) + \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2}(x_1 - x_1^*)^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1 - x_1^*)(x_2 - x_2^*) + \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^2}(x_2 - x_2^*)^2\right) \quad \cdots\cdots ①$$

$\mathbf{c} = \nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{d} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$라 가정

$$\Rightarrow f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*) + \nabla f(\mathbf{x}^*)^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)^T \mathbf{H}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) = f(\mathbf{x}^*) + \mathbf{c}^T\mathbf{d} + \frac{1}{2}\mathbf{d}^T\mathbf{H}(\mathbf{x}^*)\mathbf{d} \quad \cdots\cdots ②$$

식 ②를 x로 미분하면 어떤 형태의 Matrix로 표현 될까?

식①을 전개하면,

$$f(x_1,x_2) = f(x_1^*,x_2^*) + \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1}x_1 - \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1}x_1^* + \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}x_2 - \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}x_2^*$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2}(x_1^2 - 2x_1x_1^* + x_1^{*2}) + 2\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1x_2 - x_1^*x_2 + x_1^*x_2^* - x_1x_2^*) + \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^2}(x_2^2 - 2x_2x_2^* + x_2^{*2})\right) \cdots\cdots ③$$

식③을 전개하면,

$$f(x_1,x_2) = \boxed{f(x_1^*,x_2^*)} + \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1}x_1 - \boxed{\frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1}x_1^*} + \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}x_2 - \boxed{\frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}x_2^*}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2}x_1^2 - \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2}x_1x_1^* + \boxed{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2}x_1^{*2}}$$

$$+\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1 \partial x_2}x_1x_2 - \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1 \partial x_2}x_1^*x_2 + \boxed{\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1 \partial x_2}x_1^*x_2^*} - \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1 \partial x_2}x_1x_2^* \quad \cdots\cdots ④$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^2}x_2^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^2}x_2x_2^* + \boxed{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^2}x_2^{*2}}$$

x^*는 상수 이므로
파란색 네모 안의 수는
모두 상수이다.

[참고] 2변수 함수의 테일러 전개 (복습 / 2)

2변수 함수 $f(x_1, x_2)$ 에 대한 점 (x_1^*, x_2^*) 에서의 테일러 전개식(3차 이상의 고차항은 무시할 경우)

$$f(x_1,x_2) = f(x_1^*,x_2^*) + \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2}(x_1-x_1^*)^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1-x_1^*)(x_2-x_2^*) + \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^2}(x_2-x_2^*)^2\right) \quad \cdots\cdots ①$$

$\mathbf{c} = \nabla f(\mathbf{x}^*)$, $\mathbf{d} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$라 가정

$$\Rightarrow f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*) + \nabla f(\mathbf{x}^*)^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*)^T \mathbf{H}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*) = f(\mathbf{x}^*) + \mathbf{c}^T\mathbf{d} + \frac{1}{2}\mathbf{d}^T\mathbf{H}(\mathbf{x}^*)\,\mathbf{d} \quad \cdots\cdots ②$$

식 ②를 x로 미분하면 어떤 형태의 Matrix로 표현 될까?

$$f(x_1,x_2) = \boxed{f(x_1^*,x_2^*)} + \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1}x_1 - \boxed{\frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1}x_1^*} + \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}x_2 - \boxed{\frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}x_2^*} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2}x_1^2 - \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2}x_1x_1^* + \boxed{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2}x_1^{*2}}$$

$$+\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2}x_1x_2 - \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2}x_1^*x_2 + \boxed{\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2}x_1^*x_2^*} - \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2}x_1x_2^* + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^2}x_2^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^2}x_2x_2^* + \boxed{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^2}x_2^{*2}} \quad \cdots ④$$

식④를 x_1과 x_2로 각각 미분(3차 이상의 고차항은 무시할 경우)

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2}x_1 - \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2}x_1^* + \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2}x_2 - \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2}x_2^*$$

$$= \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2}(x_2 - x_2^*)$$

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^2}x_2 - \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^2}x_2^* + \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2}x_1 - \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2}x_1^*$$

$$= \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^2}(x_2 - x_2^*) + \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2}(x_1 - x_1^*)$$

x^*는 상수 이므로 파란색 네모 안의 수는 모두 상수이다.

[참고] 2변수 함수의 테일러 전개 (복습 / 3)

2변수 함수 $f(x_1, x_2)$ 에 대한 점 (x_1^*, x_2^*) 에서의 테일러 전개식(3차 이상의 고차항은 무시할 경우)

$$f(x_1,x_2) = f(x_1^*,x_2^*) + \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2}(x_1-x_1^*)^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1-x_1^*)(x_2-x_2^*) + \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^2}(x_2-x_2^*)^2\right) \quad \cdots\cdots ①$$

$\mathbf{c} = \nabla f(\mathbf{x}^*),\ \mathbf{d} = (\mathbf{x}-\mathbf{x}^*)$**라 가정**

$$\Rightarrow f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*) + \nabla f(\mathbf{x}^*)^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*) + \frac{1}{2}\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\right)^T \mathbf{H}(\mathbf{x}^*)\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\right) = f(\mathbf{x}^*) + \mathbf{c}^T\mathbf{d} + \frac{1}{2}\mathbf{d}^T\mathbf{H}(\mathbf{x}^*)\,\mathbf{d}$$

식 ②를 x로 미분하면 어떤 형태의 Matrix로 표현 될까?

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2}(x_1-x_1^*) + \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2}(x_2-x_2^*),\quad \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2}(x_1-x_1^*) + \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^2}(x_2-x_2^*)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1} + \dfrac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2}(x_1-x_1^*) + \dfrac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2}(x_2-x_2^*) \\ \dfrac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2} + \dfrac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2}(x_1-x_1^*) + \dfrac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^2}(x_2-x_2^*) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2}(x_1-x_1^*) + \dfrac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2}(x_2-x_2^*) \\ \dfrac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2}(x_1-x_1^*) + \dfrac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^2}(x_2-x_2^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_1-x_1^*) \\ (x_2-x_2^*) \end{bmatrix}$$

$$= \nabla f(\mathbf{x}^*) + \mathbf{H}(\mathbf{x}^*)\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\right) = \mathbf{c} + \mathbf{H}(\mathbf{x}^*)\,\mathbf{d}$$

$\mathbf{c} = \nabla f(\mathbf{x}^*),\ \mathbf{d} = (\mathbf{x}-\mathbf{x}^*)$ **라 가정**

[참고] 2변수 함수의 테일러 전개 (복습 / 4)

2변수 함수 $f(x_1, x_2)$ 에 대한 점 (x_1^*, x_2^*) 에서의 테일러 전개식(3차 이상의 고차항은 무시할 경우)

$$f(x_1,x_2) = f(x_1^*,x_2^*) + \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2}(x_1-x_1^*)^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1-x_1^*)(x_2-x_2^*) + \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^2}(x_2-x_2^*)^2\right) \quad \cdots\cdots ①$$

$\mathbf{c} = \nabla f(\mathbf{x}^*),\ \mathbf{d} = (\mathbf{x}-\mathbf{x}^*)$라 가정

$$\Rightarrow f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*) + \nabla f(\mathbf{x}^*)^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*)^T\mathbf{H}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*) = f(\mathbf{x}^*) + \mathbf{c}^T\mathbf{d} + \frac{1}{2}\mathbf{d}^T\mathbf{H}(\mathbf{x}^*)\,\mathbf{d} \quad \cdots\cdots ②$$

식 ②를 d로 미분하면 어떤 형태의 Matrix로 표현 될까?

식 ①을 d_1과 d_2로 각각 미분(3차 이상의 고차항은 무시할 경우)

Chain rule에 의해

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial d_1} = \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial d_1} = \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} \qquad \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial d_2} = \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial d_2} = \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}$$

$\because d_1 = x_1 - x_1^*$ 양면을 d_1으로 미분 $1 = \frac{\partial x_1}{\partial d_1}$

$\because d_2 = x_2 - x_2^*$ 양면을 d_2로 미분 $1 = \frac{\partial x_2}{\partial d_2}$

식 ②를 d로 미분한 결과는 x로 미분한 결과와 같다.

$$\frac{\partial f(\mathbf{d})}{\partial \mathbf{d}} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \nabla f(\mathbf{x}^*) + \mathbf{H}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*) = \mathbf{c} + \mathbf{H}(\mathbf{x}^*)\,\mathbf{d}$$

$\mathbf{c} = \nabla f(\mathbf{x}^*),\ \mathbf{d} = (\mathbf{x}-\mathbf{x}^*)$ 라 가정

2차 계획 문제(Quadratic Programming Problem)의 정식화

$$\textit{Minimize} \quad f(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}) \cong f(\mathbf{x}) + \nabla f^T(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} + 0.5\Delta\mathbf{x}^T\mathbf{H}\Delta\mathbf{x}$$

Taylor 급수의 2차항까지 고려한 목적 함수

$$\textit{Subject to} \quad h_j(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}) \cong h_j(\mathbf{x}) + \nabla h_j^{\,T}(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} = 0;\ j = 1\ to\ p$$

Taylor 급수의 1차항(선형항)만 고려한 등호 제약 조건

$$g_j(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}) \cong g_j(\mathbf{x}) + \nabla g_j^{\,T}(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} \le 0;\ j = 1\ to\ m$$

Taylor 급수의 1차항(선형항)만 고려한 부등호 제약 조건

여기서, $\bar{f} = f(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}),\ e_j = -h_j(\mathbf{x}),\ b_j = -g_j(\mathbf{x}),$

$c_i = \partial f(\mathbf{x})/\partial x_i,\ n_{ij} = \partial h_j(\mathbf{x})/\partial x_i,\ a_{ij} = \partial g_j(\mathbf{x})/\partial x_i,$

$d_i = \Delta x_i$ **라고 가정하면**

<u>Matrix form</u>

$$\textit{Minimize} \quad \bar{f} = \mathbf{c}^T{}_{(1\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)} + \frac{1}{2}\mathbf{d}^T{}_{(1\times n)}\mathbf{H}_{(n\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)}$$

: 2차 형식의 목적 함수

$$\textit{Subject to} \quad \mathbf{N}^T{}_{(p\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)} = \mathbf{e}_{(p\times 1)}$$

: 선형화 된 등호 제약 조건

$$\mathbf{A}^T{}_{(m\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)} \le \mathbf{b}_{(m\times 1)}$$

: 선형화 된 부등호 제약 조건

Simplex 방법을 이용한 2차 계획 문제의 풀이 방법

$$\textit{Minimize} \quad \bar{f} = \mathbf{c}^T{}_{(1\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)} + \frac{1}{2}\mathbf{d}^T{}_{(1\times n)}\mathbf{H}_{(n\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)}$$

$$\textit{Subject to} \quad \mathbf{N}^T{}_{(p\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)} = \mathbf{e}_{(p\times 1)}$$

$$\mathbf{A}^T{}_{(m\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)} \le \mathbf{b}_{(m\times 1)} \Rightarrow \mathbf{A}^T{}_{(m\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)} - \mathbf{b}_{(m\times 1)} + \mathbf{s}_{(m\times 1)}{}^2 = \mathbf{0}$$

Lagrange 함수

$$L = \mathbf{c}^T{}_{(1\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)} + \frac{1}{2}\mathbf{d}^T{}_{(1\times n)}\mathbf{H}_{(n\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)}$$

$$+\mathbf{u}^T{}_{(1\times m)}(\mathbf{A}^T{}_{(m\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)} + \mathbf{s}_{(m\times 1)}{}^2 - \mathbf{b}_{(m\times 1)})$$

$$+\mathbf{v}^T{}_{(1\times p)}(\mathbf{N}^T{}_{(p\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)} - \mathbf{e}_{(p\times 1)})$$

Simplex 방법을 이용한 2차 계획 문제의 풀이 방법

Lagrange 함수

$$L(\mathbf{d},\mathbf{v},\mathbf{s},\mathbf{u}) = \mathbf{c}^T{}_{(1\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)} + \frac{1}{2}\mathbf{d}^T{}_{(1\times n)}\mathbf{H}_{(n\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)}$$
$$+\mathbf{u}^T{}_{(1\times m)}(\mathbf{A}^T{}_{(m\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)} + \mathbf{s}_{(m\times 1)}{}^2 - \mathbf{b}_{(m\times 1)})$$
$$+\mathbf{v}^T{}_{(1\times p)}(\mathbf{N}^T{}_{(p\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)} - \mathbf{e}_{(p\times 1)})$$

Kuhn-Tucker 필요 조건: $\nabla L(\mathbf{d},\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{s},\mathbf{u}) = \mathbf{0}$

$$\frac{\partial L(\mathbf{d},\mathbf{v},\mathbf{s},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{d}_{(n\times 1)}} = \mathbf{c}_{(n\times 1)} + \mathbf{H}_{(n\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)} + \mathbf{A}_{(n\times m)}\mathbf{u}_{(m\times 1)} + \mathbf{N}_{(n\times p)}\mathbf{v}_{(p\times 1)} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{d},\mathbf{v},\mathbf{s},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{v}_{(p\times 1)}} = \mathbf{N}^T{}_{(p\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)} - \mathbf{e}_{(p\times 1)} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{d},\mathbf{v},\mathbf{s},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}_{(n\times 1)}} = \mathbf{A}^T{}_{(m\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)} + \mathbf{s}_{(m\times 1)}{}^2 - \mathbf{b}_{(m\times 1)} = 0$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{d},\mathbf{v},\mathbf{s},\mathbf{u})}{\partial s_i} = u_i s_i = 0, \quad i = 0 \ to \ m$$

Simplex 방법을 이용한 2차 계획 문제의 풀이 방법

Kuhn-Tucker 필요 조건: $\nabla L(\mathbf{d}, \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{s}) = \mathbf{0}$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{d}_{(n\times1)}} = \mathbf{c}_{(n\times1)} + \mathbf{H}_{(n\times n)}\mathbf{d}_{(n\times1)} + \mathbf{A}_{(n\times m)}\mathbf{u}_{(m\times1)} + \mathbf{N}_{(n\times p)}\mathbf{v}_{(p\times1)} = \mathbf{0}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{(p\times1)}} = \mathbf{N}^T{}_{(p\times n)}\mathbf{d}_{(n\times1)} - \mathbf{e}_{(p\times1)} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_i} = u_i \boxed{s_i} = 0,\ i = 0\ to\ m \text{ ----①} \qquad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}_{(n\times1)}} = \mathbf{A}^T_{(m\times n)}\mathbf{d}_{(n\times1)} + \mathbf{s}_{(m\times1)}{}^2 - \mathbf{b}_{(m\times1)} = 0$$

식①의 양변에 s_i를 곱한다.

$$u_i s_i = 0 \quad \Rightarrow \quad u_i s_i^2 = 0$$

양변에 s_i 를 곱해도 $u_i = 0\ or\ s_i = 0$이라는 해는 변하지 않는다.

변경된 Kuhn-Tucker 필요 조건: $\nabla L(\mathbf{d}, \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{s}) = \mathbf{0}$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{d}_{(n\times1)}} = \mathbf{c}_{(n\times1)} + \mathbf{H}_{(n\times n)}\mathbf{d}_{(n\times1)} + \mathbf{A}_{(n\times m)}\mathbf{u}_{(m\times1)} + \mathbf{N}_{(n\times p)}\mathbf{v}_{(p\times1)} = \mathbf{0}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{(p\times1)}} = \mathbf{N}^T{}_{(p\times n)}\mathbf{d}_{(n\times1)} - \mathbf{e}_{(p\times1)} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_i} = u_i \boxed{s_i^2} = 0,\ i = 0\ to\ m \text{ ----①'} \qquad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}_{(n\times1)}} = \mathbf{A}^T_{(m\times n)}\mathbf{d}_{(n\times1)} + \mathbf{s}_{(m\times1)}{}^2 - \mathbf{b}_{(m\times1)} = 0$$

Simplex 방법을 이용한 2차 계획 문제의 풀이 방법

변경된 Kuhn-Tucker 필요 조건: $\nabla L(\mathbf{d},\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{s}) = \mathbf{0}$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{d}_{(n\times1)}} = \mathbf{c}_{(n\times1)} + \mathbf{H}_{(n\times n)}\mathbf{d}_{(n\times1)} + \mathbf{A}_{(n\times m)}\mathbf{u}_{(m\times1)} + \mathbf{N}_{(n\times p)}\mathbf{v}_{(p\times1)} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{(p\times1)}} = \mathbf{N}^T{}_{(p\times n)}\mathbf{d}_{(n\times1)} - \mathbf{e}_{(p\times1)} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_i} = u_i \boxed{s_i^2} = 0,\ i = 0\ to\ m \text{----①'} \qquad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}_{(n\times1)}} = \mathbf{A}^T_{(m\times n)}\mathbf{d}_{(n\times1)} + \boxed{\mathbf{s}_{(m\times1)}^{\ 2}} - \mathbf{b}_{(m\times1)} = 0$$

s_i^2 **를** s_i' **로 치환 (단,** $s_i' \geq 0$**)**

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{d}_{(n\times1)}} = \mathbf{c}_{(n\times1)} + \mathbf{H}_{(n\times n)}\mathbf{d}_{(n\times1)} + \mathbf{A}_{(n\times m)}\mathbf{u}_{(m\times1)} + \mathbf{N}_{(n\times p)}\mathbf{v}_{(p\times1)} = \mathbf{0}, \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{(p\times1)}} = \mathbf{N}^T{}_{(p\times n)}\mathbf{d}_{(n\times1)} - \mathbf{e}_{(p\times1)} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_i} = u_i s_i' = 0,\ i = 0\ to\ m$$

비선형 부정 방정식

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}_{(n\times1)}} = \mathbf{A}^T_{(m\times n)}\mathbf{d}_{(n\times1)} + \mathbf{s}'_{(m\times1)} - \mathbf{b}_{(m\times1)} = 0$$

선형 부정 방정식

선형 부정 방정식에서 구한 해가 이 비선형 부정 방정식을 만족하는지 확인하여 해를 확정한다.

이 식들은 설계 변수 d,s',u,v에 대해 모두 선형이므로, 이 식들로부터 설계 변수 를 구하는 문제는 등호 제약 조건만으로 이루어진 선형 계획 문제임

여기서, $u_i, s_i' \geq 0;\ i = 1\ to\ m$

Simplex 방법을 이용한 2차 계획 문제의 풀이 방법

Kuhn-Tucker 필요 조건으로부터

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{d}_{(n\times1)}} = \mathbf{c}_{(n\times1)} + \mathbf{H}_{(n\times n)}\mathbf{d}_{(n\times1)} + \mathbf{A}_{(n\times m)}\mathbf{u}_{(m\times1)} + \mathbf{N}_{(n\times p)}\mathbf{v}_{(p\times1)} = \mathbf{0},\qquad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{(p\times1)}} = \mathbf{N}^{T}{}_{(p\times n)}\mathbf{d}_{(n\times1)} - \mathbf{e}_{(p\times1)} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_i} = u_i s_i' = 0,\ i = 0\ to\ m$$

비선형 부정 방정식

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}_{(n\times1)}} = \mathbf{A}^{T}_{(m\times n)}\mathbf{d}_{(n\times1)} + \mathbf{s}'_{(m\times1)} - \mathbf{b}_{(m\times1)} = 0$$

선형 부정 방정식

선형 부정 방정식에서 구한 해가 이 비선형 부정 방정식을 만족하는지 확인하여 해를 확정한다.

이 식들은 설계 변수 d,s',u,v에 대해 모두 선형이므로, 이 식들로부터 설계 변수 를 구하는 문제는 등호 제약 조건만으로 이루어진 선형 계획 문제임

여기서, $u_i, s_i' \geq 0;\quad i = 1\ to\ m$

설계 변수 $\mathbf{d}_{(n\times1)}$는 부호의 제한이 없으므로 Simplex 방법을 이용하기 위해서 설계 변수를 아래와 같이 변환해야 함

$$\mathbf{d}_{(n\times1)} = \mathbf{d}^{+}_{(n\times1)} - \mathbf{d}^{-}_{(n\times1)},\ (d_i^{+} \geq 0,\ d_i^{-} \geq 0; i = 1\ to\ n)$$

등호 제약 조건에 대한 Lagrange multiplier $\mathbf{v}_{(p\times1)}$ 는 부호의 제한이 없으므로 Simplex 방법을 이용하기 위해서 다음과 같이 변환해야 함

$$\mathbf{v}_{(p\times1)} = \mathbf{y}_{(p\times1)} - \mathbf{z}_{(p\times1)},\ (y_i \geq 0,\ z_i \geq 0;\ i = 1\ \ to\ \ p)$$

Simplex 방법을 이용한 2차 계획 문제의 풀이 방법

Kuhn-Tucker 필요 조건으로부터

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{d}_{(n\times1)}} = \mathbf{c}_{(n\times1)} + \mathbf{H}_{(n\times n)}\mathbf{d}_{(n\times1)} + \mathbf{A}_{(n\times m)}\mathbf{u}_{(m\times1)} + \mathbf{N}_{(n\times p)}\mathbf{v}_{(p\times1)} = \mathbf{0}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{(p\times1)}} = \mathbf{N}^T{}_{(p\times n)}\mathbf{d}_{(n\times1)} - \mathbf{e}_{(p\times1)} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_i} = u_i s_i' = 0,\ i = 0 \ to\ m$$

비선형 부정 방정식

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}_{(n\times1)}} = \mathbf{A}^T_{(m\times n)}\mathbf{d}_{(n\times1)} + \mathbf{s}'_{(m\times1)} - \mathbf{b}_{(m\times1)} = 0$$

선형 부정 방정식

선형 부정 방정식에서 구한 해가
이 비선형 부정 방정식을 만족하는지
확인하여 해를 확정한다.

이 식들은 설계 변수 d,s',u,v에 대해
모두 선형이므로, 이 식들로부터
설계 변수 를 구하는 문제는
등호 제약 조건만으로 이루어진
선형 계획 문제임

여기서, $u_i, s_i' \ \geq 0;\ i = 1 \, to\ m$

여기에서 d와 v는
그 부호를 확신할 수 없으므로

$$\mathbf{d}_{(n\times1)} = \mathbf{d}^+_{(n\times1)} - \mathbf{d}^-_{(n\times1)},\ (d_i^+ \geq 0,\ d_i^- \geq 0; i = 1\ to\ n)$$

$$\mathbf{v}_{(p\times1)} = \mathbf{y}_{(p\times1)} - \mathbf{z}_{(p\times1)},\ (y_i \geq 0,\ z_i \geq 0;\ i = 1\ to\ p)$$

행렬식 표현

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{(n\times n)} & -\mathbf{H}_{(n\times n)} & \mathbf{A}_{(n\times m)} & \mathbf{0}_{(n\times m)} & \mathbf{N}_{(n\times p)} & -\mathbf{N}_{(n\times p)} \\ \mathbf{A}^T{}_{(m\times n)} & -\mathbf{A}^T{}_{(m\times n)} & \mathbf{0}_{(m\times m)} & \mathbf{I}_{(m\times m)} & \mathbf{0}_{(m\times p)} & \mathbf{0}_{(m\times p)} \\ \mathbf{N}^T{}_{(p\times n)} & -\mathbf{N}^T{}_{(p\times n)} & \mathbf{0}_{(p\times m)} & \mathbf{0}_{(p\times m)} & \mathbf{0}_{(p\times p)} & \mathbf{0}_{(p\times p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}^+_{(n\times1)} \\ \mathbf{d}^-_{(n\times1)} \\ \mathbf{u}_{(m\times1)} \\ \mathbf{s}'_{(m\times1)} \\ \mathbf{y}_{(p\times1)} \\ \mathbf{z}_{(p\times1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{c}_{(n\times1)} \\ \mathbf{b}_{(m\times1)} \\ \mathbf{e}_{(p\times1)} \end{bmatrix}$$

인위 변수를 추가하고 인위 목적 함수를 만들어서 Simplex 방법으로 문제를 푼다.

Simplex 방법을 이용한 2차 계획 문제의 풀이 방법

행렬식 표현

인위 변수를 추가하고 인위 목적 함수를 만들어서 Simplex 방법으로 문제를 푼다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{(n\times n)} & -\mathbf{H}_{(n\times n)} & \mathbf{A}_{(n\times m)} & \mathbf{0}_{(n\times m)} & \mathbf{N}_{(n\times p)} & -\mathbf{N}_{(n\times p)} \\ \mathbf{A}^T{}_{(m\times n)} & -\mathbf{A}^T{}_{(m\times n)} & \mathbf{0}_{(m\times m)} & \mathbf{I}_{(m\times m)} & \mathbf{0}_{(m\times p)} & \mathbf{0}_{(m\times p)} \\ \mathbf{N}^T{}_{(p\times n)} & -\mathbf{N}^T{}_{(p\times n)} & \mathbf{0}_{(p\times m)} & \mathbf{0}_{(p\times m)} & \mathbf{0}_{(p\times p)} & \mathbf{0}_{(p\times p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}^+_{(n\times 1)} \\ \mathbf{d}^-_{(n\times 1)} \\ \mathbf{u}_{(m\times 1)} \\ \mathbf{s}'_{(m\times 1)} \\ \mathbf{y}_{(p\times 1)} \\ \mathbf{z}_{(p\times 1)} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{n+m+p} \end{bmatrix}}_{\text{인위 변수}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{c}_{(n\times 1)} \\ \mathbf{b}_{(m\times 1)} \\ \mathbf{e}_{(p\times 1)} \end{bmatrix}$$

인위 목적함수를 만드는 법

- 1행부터 n+m+p행까지 모두 더해서 하나의 방정식을 만든다.
- 인위변수의 총 합($Y_1+Y_2+\ldots+Y_{n+m+p}$)를 목적함수(w)로 정의한다.

- 위의 선형 부정 방정식의 초기 기저 가능해를 Simplex 방법을 이용하여 구한다.
- 초기 기저 가능해 중 아래의 비선형 부정 방정식을 만족하는지 확인하여 해를 확정한다.

$$\frac{\partial L}{\partial s_i} = u_i s_i' = 0, \;\; i = 0 \; to \; m$$

[참고] Simplex 방법을 이용한 2차 계획 문제의 풀이 방법

Kuhn-Tucker 필요 조건(행렬식 표현)

$$\mathbf{B}_{((n+m+p)\times(2n+2m+2p))}\mathbf{X}_{((2n+2m+2p)\times 1)} = \mathbf{D}_{((n+m+p)\times 1)}$$

Simplex 방법을 이용한 QP 문제의 해법

1. Kuhn-Tucker 필요 조건의 해를 구하는 문제는 등호 제약 조건만으로 이루어진 부정 선형 연립 방정식의 해를 구하는 문제(선형 계획 문제)임
2. 부정 선형 연립 방정식의 해를 구하기 위하여 Simplex 방법에서 인위 변수 및 인위 목적 함수를 도입하여 초기 기저 가능해를 구하는 방법임

$$\mathbf{B}_{((n+m+p)\times(2n+2m+2p))}\mathbf{X}_{((2n+2m+2p)\times 1)} + \mathbf{Y}_{((n+m+p)\times 1)} = \mathbf{D}_{((n+m+p)\times 1)}$$

여기서, D의 어떤 요소가 음이면 해당 식을 -1로 곱하여 양수로 만듦

3. 인위 목적 함수를 다음과 같이 정의함

$$w = \sum_{i=1}^{n+m+p} Y_i = \sum_{i=1}^{n+m+p} D_i - \sum_{j=1}^{2(n+m+p)} \sum_{i=1}^{n+m+p} B_{ij} X_j = w_0 + \sum_{j=1}^{2(n+m+p)} C_j X_j$$

여기서, $\underline{C_j = -\sum_{i=1}^{n+m+p} B_{ij}}$, $\underline{w_0 = \sum_{i=1}^{n+m+p} D_i}$ 인위 목적 함수의 초기값

행렬 B의 j번째 열의 요소를 모두 더해 부호를 바꾼 것(상대 비용 계수)

4. Simplex 방법을 이용하여 해를 구하고 다음 식을 만족하는지 확인함

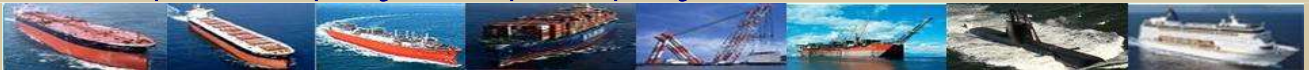
$$u_i s_i' = 0;\ i = 1 \, to \, m$$: 이 식은 비선형 방정식으로서 해를 구한 후 이를 만족하는지 평가하기 위한 용도로 사용됨

2차 계획 법(QP)- Class의 구현 예

```
class QP
{
public:
	QP();
	virtual ~QP();

	Simplex BXYD;                   // 선형 방정식 "BX + Y = D"를 해결하기 위한 Simplex
	double** m_pH;                  // H를 나타내는 2차원 배열
	double** m_pA;                  // A를 나타내는 2차원 배열
	double** m_pN;                  // N을 나타내는 2차원 배열
	double* m_pD;                   // 선형 방정식을 푼 결과 Search Direction을 저장한 변수
	double* m_pU;                   // 선형 방정식을 푼 결과 부등호 제약 조건식에 대한 Lagrange Multipliers를 저장한 변수
	double* m_pXi;                  // 선형 방정식을 푼 결과 설계 변수의 양수 조건식에 대한 Lagrange Multipliers를 저장한 변수
	double* m_pS;                   // 선형 방정식을 푼 결과 부등호 제약 조건식에 대한 완화 변수를 저장한 변수
	double* m_pY;                   // 선형 방정식을 푼 결과 등호 제약 조건식에 대한 Lagrange Multipliers를 저장한 변수
	double* m_pZ;                   // 선형 방정식을 푼 결과 등호 제약 조건식에 대한 Lagrange Multipliers를 저장한 변수

	void ConstructSimplexTable();   // 선형 방정식 "BX + Y = D"에 해당하는 Simplex를 구성하는 함수
	int CheckEndCondition();        // QP 방법의 종료 조건을 판단(U*S = 0 & Xi*D = 0)하는 함수
	int Solve();                    // QP를 실행하는 함수
};
```

Lagrange multiplier를 이용한 프로펠러의 최적 주요 치수 결정 예(1/4)

Given $P, n, A_E / A_O, V$

Find $J, P_i / D_P$

Maximize $\eta_O = \frac{J}{2\pi} \cdot \frac{K_T}{K_Q}$ → K_T와 K_Q가 모두 J와 P_i/D_p의 함수이므로 목적 함수 역시 J와 P_i/D_p의 함수임

Subject to $\frac{P}{2\pi n} = \rho \cdot n^2 \cdot D_P{}^5 \cdot K_Q$

: 주기관이 전달한 토오크를 프로펠러가 흡수하는 조건

Where, $J = \frac{V(1-w)}{n \cdot D_P}$

$$K_T = f(J, P_i / D_P)$$

$$K_Q = f(J, P_i / D_P)$$

P: 프로펠러 전달 마력
n: 프로펠러 회전수
D_P: 프로펠러 직경
P_i: 프로펠러 피치
A_E/A_O: 프로펠러 날개 면적비
V: 선속
η_O: 프로펠러 효율

➡ 미지수 2개, 등호 제약 조건 1개인 최적화 문제

Lagrange multiplier를 이용한 프로펠러의 최적 주요 치수 결정 예(2/4)

$$\frac{P}{2\pi n} = \rho \cdot n^2 \cdot D_P{}^5 \cdot K_Q \quad \cdots\cdots \quad \text{(a)}$$

: 주기관이 전달한 토오크를 프로펠러가 흡수하는 조건

주기관 전달 마력을 프로펠러가 흡수하는 경우, 그 조건은 식 (a)로부터

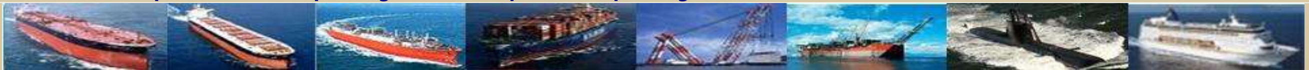
$$C = \frac{K_Q}{J^5} = \frac{P \cdot n^2}{2\pi\rho \cdot V_A{}^5}$$

$$G(J, P_i / D_P) = K_Q - C \cdot J^5 = 0 \quad \cdots\cdots \quad \text{(b)}$$

프로펠러 단독 효율(η_0)은

$$F(J, P_i / D_P) = \eta_0 = \frac{J}{2\pi} \cdot \frac{K_T}{K_Q} \quad \cdots\cdots \quad \text{(c)}$$

목적 함수 F는 P_i / D_P와 J의 함수이며 따라서 식 (b)를 만족하면서 단독 효율이 최대가 되는 프로펠러 피치비(P_i / D_P)와 전진비(J)를 구하는 최적화 문제가 됨



Lagrange multiplier를 이용한 프로펠러의 최적 주요 치수 결정 예(3/4)

$$G(J, P_i/D_P) = K_Q - C \cdot J^5 = 0 \quad \cdots\cdots \quad \text{(b)}$$

$$F(J, P_i/D_P) = \eta_0 = \frac{J}{2\pi} \cdot \frac{K_T}{K_Q} \quad \cdots\cdots \quad \text{(c)}$$

라그란지 승수 λ를 도입하여 식(b)와 식(c)로부터

$$H(J, P_i/D_P, \lambda) = F(J, P_i/D_P) + \lambda G(J, P_i/D_P) \quad \cdots\cdots \quad \text{(d)}$$

와 같은 함수를 정의하고 이로부터 함수 H가 최대가 되는 미정 계수 P_i/D_P J 및 를 결정함

$$\frac{\partial H}{\partial J} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{K_T}{K_Q}\right) + \frac{J}{2\pi}\frac{\left\{\left(\frac{\partial K_T}{\partial J}\right)\cdot K_Q - \left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)\cdot K_T\right\}}{K_Q{}^2} + \lambda\left\{\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right) - 5\cdot C\cdot J^4\right\}$$
$$= 0 \quad \cdots\cdots \quad \text{(e)}$$

$$\frac{\partial H}{\partial (P_i/D_P)} = \frac{J}{2\pi}\frac{\left\{\left(\frac{\partial K_T}{\partial P_i/D_P}\right)\cdot K_Q - \left(\frac{\partial K_Q}{\partial P_i/D_P}\right)\cdot K_T\right\}}{K_Q{}^2} + \lambda\left(\frac{\partial K_Q}{\partial P_i/D_P}\right)$$
$$= 0 \quad \cdots\cdots \quad \text{(f)}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = K_Q - C\cdot J^5 = 0 \quad \cdots\cdots \quad \text{(g)}$$

Lagrange multiplier를 이용한 프로펠러의 최적 주요 치수 결정 예(4/4)

식 (e), (f), (g)에서 λ를 소거하여 정리하면

$$(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i / D_P)})\{J \cdot (\frac{\partial K_T}{\partial J}) - 4K_T\}$$

$$+(\frac{\partial K_T}{\partial(P_i / D_P)})\{5K_Q - J \cdot (\frac{\partial K_Q}{\partial J})\} = 0 \quad \cdots\cdots \quad \text{(h)}$$

$$K_Q - C \cdot J^5 = 0 \quad \cdots\cdots \quad \text{(i)}$$

식 (h), (i)의 해를 구함으로써 전달 마력을 흡수하는 최대의 효율을 갖는 피치비(P_i / D_P)와 전진비(J)를 구할 수 있다.

$J = \dfrac{V(1-w)}{n \cdot D_P}$ **이므로 J를 구하면 D_p를 구할 수 있고, 또한 P_i/D_p로부터 P_i 역시 구할 수 있다.**

즉, 프로펠러 직경(D_P)과 피치(P_i)를 모두 구할 수 있다.

(참고) e, f, g로부터 h 유도 (1)

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{K_T}{K_Q}\right)+\frac{J}{2\pi}\frac{\left\{\left(\frac{\partial K_T}{\partial J}\right)\cdot K_Q-\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)\cdot K_T\right\}}{K_Q{}^2}+\lambda\left\{\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)-5\cdot C\cdot J^4\right\}=0 \quad \cdots\cdots \quad \text{(e)}$$

$$\frac{J}{2\pi}\frac{\left\{\left(\frac{\partial K_T}{\partial (P_i/D_P)}\right)\cdot K_Q-\left(\frac{\partial K_Q}{\partial (P_i/D_P)}\right)\cdot K_T\right\}}{K_Q{}^2}+\lambda\left(\frac{\partial K_Q}{\partial (P_i/D_P)}\right)=0 \quad \cdots\cdots \quad \text{(f)}$$

λ를 소거하기 위해 다음과 같은 연산을 한다.

$$\text{(e)}\times\left(\frac{\partial K_Q}{\partial (P_i/D_P)}\right)-(f)\times\left\{\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)-5\cdot C\cdot J^4\right\}=0$$

$$\text{(e)}\times\left(\frac{\partial K_Q}{\partial (P_i/D_P)}\right):\ \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial K_Q}{\partial (P_i/D_P)}\right)\left(\frac{K_T}{K_Q}\right)+\frac{J}{2\pi}\left(\frac{\partial K_Q}{\partial (P_i/D_P)}\right)\frac{\left\{\left(\frac{\partial K_T}{\partial J}\right)\cdot K_Q-\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)\cdot K_T\right\}}{K_Q{}^2}+\cancel{\lambda\left(\frac{\partial K_Q}{\partial (P_i/D_P)}\right)\left\{\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)-5\cdot C\cdot J^4\right\}}=0$$

$$(f)\times\left\{\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)-5\cdot C\cdot J^4\right\}:\ \frac{J}{2\pi}\frac{\left\{\left(\frac{\partial K_T}{\partial (P_i/D_P)}\right)\cdot K_Q-\left(\frac{\partial K_Q}{\partial (P_i/D_P)}\right)\cdot K_T\right\}}{K_Q{}^2}\left\{\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)-5\cdot C\cdot J^4\right\}+\cancel{\lambda\left(\frac{\partial K_Q}{\partial (P_i/D_P)}\right)\left\{\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)-5\cdot C\cdot J^4\right\}}=0$$

$$\text{(e)}\times\left(\frac{\partial K_Q}{\partial (P_i/D_P)}\right)-(f)\times\left\{\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)-5\cdot C\cdot J^4\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial K_Q}{\partial (P_i/D_P)}\right)\left(\frac{K_T}{K_Q}\right)+\frac{J}{2\pi}\left(\frac{\partial K_Q}{\partial (P_i/D_P)}\right)\frac{\left\{\left(\frac{\partial K_T}{\partial J}\right)\cdot K_Q-\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)\cdot K_T\right\}}{K_Q{}^2}-\frac{J}{2\pi}\frac{\left\{\left(\frac{\partial K_T}{\partial (P_i/D_P)}\right)\cdot K_Q-\left(\frac{\partial K_Q}{\partial (P_i/D_P)}\right)\cdot K_T\right\}}{K_Q{}^2}\left\{\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)-5\cdot C\cdot J^4\right\}=0$$

(참고) e, f, g로부터 h 유도 (2)

$$(e)\times\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)-(f)\times\left\{\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)-5\cdot C\cdot J^4\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left(\frac{K_T}{K_Q}\right)+\frac{J}{2\pi}\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\frac{\left\{\left(\frac{\partial K_T}{\partial J}\right)\cdot K_Q-\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)\cdot K_T\right\}}{{K_Q}^2}-\frac{J}{2\pi}\frac{\left\{\left(\frac{\partial K_T}{\partial(P_i/D_P)}\right)\cdot K_Q-\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\cdot K_T\right\}}{{K_Q}^2}\left\{\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)-5\cdot C\cdot J^4\right\}=0$$

양변에 2π 곱하기, 2번째 항과 3번째 항 정리하여 묶기

$$\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left(\frac{K_T}{K_Q}\right)+\frac{J}{{K_Q}^2}\underline{\left[\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left\{\left(\frac{\partial K_T}{\partial J}\right)\cdot K_Q-\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)\cdot K_T\right\}-\left\{\left(\frac{\partial K_T}{\partial(P_i/D_P)}\right)\cdot K_Q-\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\cdot K_T\right\}\left\{\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)-5\cdot C\cdot J^4\right\}\right]}=0$$

밑줄 친 부분부터 정리

$$=\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left(\frac{\partial K_T}{\partial J}\right)\cdot K_Q-\cancel{\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)\cdot K_T}-\left(\frac{\partial K_T}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)\cdot K_Q+\cancel{\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)\cdot K_T}+5\cdot\left(\frac{\partial K_T}{\partial(P_i/D_P)}\right)\cdot K_Q\cdot C\cdot J^4-5\cdot\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\cdot K_T\cdot C\cdot J^4$$

$$=\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left(\frac{\partial K_T}{\partial J}\right)\cdot K_Q-\left(\frac{\partial K_T}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)\cdot K_Q+5\cdot\left(\frac{\partial K_T}{\partial(P_i/D_P)}\right)\cdot K_Q\cdot C\cdot J^4-5\cdot\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\cdot K_T\cdot C\cdot J^4$$

위 식에 결과 대입

$$\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left(\frac{K_T}{K_Q}\right)+\frac{J}{{K_Q}^2}\left[\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left(\frac{\partial K_T}{\partial J}\right)\cdot K_Q-\left(\frac{\partial K_T}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)\cdot K_Q+5\cdot\left(\frac{\partial K_T}{\partial(P_i/D_P)}\right)\cdot K_Q\cdot C\cdot J^4-5\cdot\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\cdot K_T\cdot C\cdot J^4\right]=0$$

(참고) e, f, g로부터 h 유도 (2)

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda}=K_Q-C\cdot J^5=0 \quad \cdots\cdots \quad (g)$$

$$\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left(\frac{K_T}{K_Q}\right)+\frac{J}{K_Q{}^2}\left[\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left(\frac{\partial K_T}{\partial J}\right)\cdot K_Q-\left(\frac{\partial K_T}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)\cdot K_Q+5\cdot\left(\frac{\partial K_T}{\partial(P_i/D_P)}\right)\cdot K_Q\cdot C\cdot J^4-5\cdot\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\cdot K_T\cdot C\cdot J^4\right]=0$$

전개

$$\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left(\frac{K_T}{K_Q}\right)+\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left(\frac{\partial K_T}{\partial J}\right)\cdot\frac{J}{K_Q}-\left(\frac{\partial K_T}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)\cdot\frac{J}{K_Q}+5\cdot\left(\frac{\partial K_T}{\partial(P_i/D_P)}\right)\cdot\cancel{\frac{C\cdot J^5}{K_Q}}-5\cdot\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\cdot\frac{K_T}{K_Q}\cdot\cancel{\frac{C\cdot J^5}{K_Q}}=0$$

(g)에 의해 $\dfrac{C\cdot J^5}{K_Q}=1$

$$\underline{\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left(\frac{K_T}{K_Q}\right)}+\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left(\frac{\partial K_T}{\partial J}\right)\cdot\frac{J}{K_Q}-\left(\frac{\partial K_T}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)\cdot\frac{J}{K_Q}+5\cdot\left(\frac{\partial K_T}{\partial(P_i/D_P)}\right)-\underline{5\cdot\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\cdot\frac{K_T}{K_Q}}=0$$

밑줄 친 부분 계산

$$-4\cdot\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left(\frac{K_T}{K_Q}\right)+\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left(\frac{\partial K_T}{\partial J}\right)\cdot\frac{J}{K_Q}-\left(\frac{\partial K_T}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)\cdot\frac{J}{K_Q}+5\cdot\left(\frac{\partial K_T}{\partial(P_i/D_P)}\right)=0$$

양변에 K_Q 곱하기

$$-4\cdot\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)K_T+\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left(\frac{\partial K_T}{\partial J}\right)J-\left(\frac{\partial K_T}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)\cdot J+5\cdot K_Q\left(\frac{\partial K_T}{\partial(P_i/D_P)}\right)=0$$

$\left(\dfrac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right),\left(\dfrac{\partial K_T}{\partial(P_i/D_P)}\right)$ **로 묶기**

$$\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left\{J\cdot\left(\frac{\partial K_T}{\partial J}\right)-4K_T\right\}+\left(\frac{\partial K_T}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left\{5K_Q-J\cdot\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)\right\}=0 \quad \cdots\cdots \quad (h)$$

제약 비선형 최적화 문제의 풀이 방법 비교

최적화 문제

Minimize $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

Subject to $h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1,\ldots,p$ **등호 제약 조건**

$g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1,\ldots,m$ **부등호 제약 조건**

Lagrange 함수의 정의 $L(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{s}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{p} v_i h_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i (g_i(\mathbf{x}) + s_i^2)$

v_i : 등호 제약 조건에 대한 Lagrange multiplier로서 부호에 제한이 없음

u_i : 부등호 제약 조건에 대한 Lagrange multiplier로서 0보다 크거나 같아야 함

s_i : 부등호 제약 조건을 등호 제약 조건으로 변환하기 위한 완화 변수

Kuhn-Tucker 필요 조건: $\nabla L(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{s}) = \mathbf{0}$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{p} v_i^* \frac{\partial h_i}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} u_i^* \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \qquad j = 1, \ \ldots \ , n$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = h_i(\mathbf{x}^*) = 0, \qquad i = 1, \ \ldots \ , p$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} = g_i(\mathbf{x}^*) + s_i^{*2} = 0, \qquad i = 1, \ \ldots \ , \mathrm{m}$$

선형 부정 방정식

$$\frac{\partial L}{\partial s_i} = u_i^* s_i^* = 0, \qquad i = 1, \ \ldots \ , m$$

비선형 부정 방정식

$$u_i^* \geq 0, \qquad i = 1, \ \ldots \ , m$$

방법 1.
- **비선형 부정 방정식**을 만족하는 해를 먼저 구함
- 각 해에 대해 **선형 부정 방정식**을 만족하는지를 확인하여 해를 확정하는 방법
- 이 방법을 이용할 경우 사람은 비교적 간단하게 해를 구할 수 있음

방법 2.
- **Simplex 방법**을 사용하여 **선형 부정 방정식**을 만족하는 해를 먼저 구함
- 각 해에 대해 **비선형 부정 방정식**을 만족하는지를 확인하여 해를 확정하는 방법
- 이 방법은 체계적으로 알고리즘화 된 방법이므로 **컴퓨터로 구현할 때 유리함**

2차 계획 문제 예제
- Simplex 방법을 이용한 풀이(1)

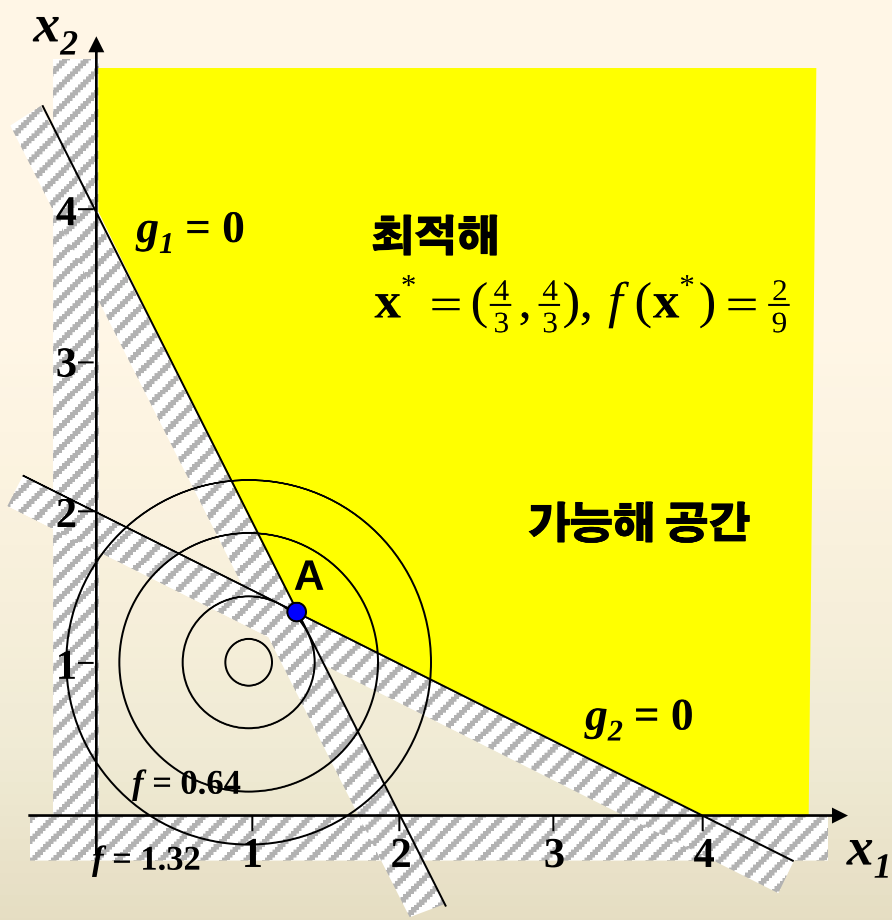
Minimize $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 2$

Subject to $g_1(\mathbf{x}) = -2x_1 - x_2 + 4 \le 0$

$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 - 2x_2 + 4 \le 0$

단, $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

최적해는 $\mathbf{x}^* = (\frac{4}{3}, \frac{4}{3}),\ f(\mathbf{x}^*) = \frac{2}{9}$



2차 계획 문제 예제
- Simplex 방법을 이용한 풀이(3)

Minimize $f(\mathbf{x}) = -2x_1 - 2x_2 + x_1^2 + x_2^2 + 2$

Subject to $-2x_1 - x_2 \le -4$ ➡ $-2x_1 - x_2 + 4 + s_1^2 = 0$

$-x_1 - 2x_2 \le -4$ ➡ $-x_1 - 2x_2 + 4 + s_2^2 = 0$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ ➡ $-x_1 + \delta_1^2 = 0,\ -x_2 + \delta_2^2 = 0$

Lagrange 함수

$$L(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{s},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\delta}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 2$$
$$+u_1(-2x_1 - x_2 + 4 + s_1^2) + u_2(-x_1 - 2x_2 + 4 + s_2^2)$$
$$+\zeta_1(-x_1 + \delta_1^2) + \zeta_2(-x_2 + \delta_2^2) \text{ 단, } u_i, \zeta_i \ge 0$$

Kuhn-Tucker 필요 조건: $\nabla L(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{s},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\delta}) = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2 + 2x_1 - 2u_1 - u_2 - \zeta_1 = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = -2 + 2x_2 - u_1 - 2u_2 - \zeta_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = -2x_1 - x_2 + 4 + s_1^2 = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial u_2} = -x_1 - 2x_2 + 4 + s_2^2 = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \zeta_1} = -x_1 + \delta_1^2 = 0$$

$$\underbrace{\frac{\partial L}{\partial s_1} = 2u_1 s_1 = 0,}_{\text{식①}} \quad \underbrace{\frac{\partial L}{\partial s_2} = 2u_2 s_2 = 0}_{\text{식②}} \quad \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \delta_1} = 2\zeta_1\delta_1 = 0,}_{\text{식③}} \quad \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \delta_2} = 2\zeta_2\delta_2 = 0}_{\text{식④}} \quad \frac{\partial L}{\partial \zeta_2} = -x_2 + \delta_2^2 = 0$$

단, $u_i, \zeta_i \ge 0$

식①, ②의 양변에 각각 s_1, s_2 를 곱한다.

식③, ④의 양변에 각각 δ_1, δ_2를 곱한다.

2차 계획 문제 예제
- Simplex 방법을 이용한 풀이(4)

Kuhn-Tucker 필요 조건: $\nabla L(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{s},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\delta})=0$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=-2+2x_1-2u_1-u_2-\zeta_1=0,\qquad \frac{\partial L}{\partial x_2}=-2+2x_2-u_1-2u_2-\zeta_2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_1}=-2x_1-x_2+4+s_1^2=0,\qquad \frac{\partial L}{\partial u_2}=-x_1-2x_2+4+s_2^2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_1}=2u_1s_1^2=0,\ \frac{\partial L}{\partial s_2}=2u_2s_2^2=0\qquad \frac{\partial L}{\partial \delta_1}=2\zeta_1\delta_1^2=0,\ \frac{\partial L}{\partial \delta_2}=2\zeta_2\delta_2^2=0$$

대입

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial \zeta_1}=-x_1+\delta_1^2=0,\qquad \frac{\partial L}{\partial \zeta_2}=-x_2+\delta_2^2=0}$$

$\mathbf{s}_i^2 \Rightarrow \mathbf{s}_i'$ 치환

단, $u_i,\zeta_i,s_i'\ge 0$

Kuhn-Tucker 필요 조건: $\nabla L(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{s},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\delta})=0$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=-2+2x_1-2u_1-u_2-\zeta_1=0,\qquad \frac{\partial L}{\partial x_2}=-2+2x_2-u_1-2u_2-\zeta_2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_1}=-2x_1-x_2+4+s_1'=0,\qquad \frac{\partial L}{\partial u_2}=-x_1-2x_2+4+s_2'=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_1}=2u_1s_1'=0,\ \frac{\partial L}{\partial s_2}=2u_2s_2'=0\qquad \frac{\partial L}{\partial \delta_1}=2\zeta_1x_1=0,\ \frac{\partial L}{\partial \delta_2}=2\zeta_2x_2=0$$

단, $u_i,\zeta_i,s_i',x_i\ge 0$

2차 계획 문제 예제
- Simplex 방법을 이용한 풀이(5)

Kuhn-Tucker 필요 조건: $\nabla L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\delta}) = 0$

선형 부정 방정식

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2 + 2x_1 - 2u_1 - u_2 - \zeta_1 = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = -2 + 2x_2 - u_1 - 2u_2 - \zeta_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = -2x_1 - x_2 + 4 + s_1' = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial u_2} = -x_1 - 2x_2 + 4 + s_2' = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_1} = 2u_1 s_1' = 0, \frac{\partial L}{\partial s_2} = 2u_2 s_2' = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \delta_1} = 2\zeta_1 x_1 = 0, \frac{\partial L}{\partial \delta_2} = 2\zeta_2 x_2 = 0$$

단, $u_i, \zeta_i, s_i', x_i \ge 0$

선형 부정 방정식의 해를 구하기 위해 Simplex방법을 이용한다.

Simplex방법을 적용하기 위해서는 우변의 모든 요소가 음이 아니어야 함

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u_1 \\ u_2 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ s_1' \\ s_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u_1 \\ u_2 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ s_1' \\ s_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

양변에 -1을 곱함

2차 계획 문제 예제
- Simplex 방법을 이용한 풀이(8)

Simplex방법을 적용하기 위해 인위 변수 추가

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(=X_1) \\ x_2(=X_2) \\ u_1(=X_3) \\ u_2(=X_4) \\ \zeta_1(=X_5) \\ \zeta_2(=X_6) \\ s_1'(=X_7) \\ s_2'(=X_8) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Simplex방법을 적용하기 위해 인위 목적함수 계산

1, 2, 3, 4행을 모두 더하여 인위 변수의 합(Y_1+Y_2+Y_3+Y_4)을 최소화 하는 목적 함수 구성

$$5x_1 + 5x_2 - 3u_1 - 3u_2 - \zeta_1 - \zeta_2 - s_1' - s_2' + \underbrace{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4}_{w} = 12$$

$$-5x_1 - 5x_2 + 3u_1 + 3u_2 + \zeta_1 + \zeta_2 + s_1' + s_2' = w - 12$$ **: 인위 목적 함수**

2차 계획 문제 예제
- Simplex 방법을 이용한 풀이(8)

Simplex방법을 적용하기 위해 인위 변수 추가

$$
\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} x_1(=X_1) \\ x_2(=X_2) \\ u_1(=X_3) \\ u_2(=X_4) \\ \zeta_1(=X_5) \\ \zeta_2(=X_6) \\ s_1'(=X_7) \\ s_2'(=X_8) \end{bmatrix}
+ \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}
$$

$$-5x_1 - 5x_2 + 3u_1 + 3u_2 + \zeta_1 + \zeta_2 + s_1' + s_2' = w - 12$$ **: 인위 목적 함수**

1

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	Y1	Y2	Y3	Y4	bi	bi/ai
Y1	2	0	-2	-1	-1	0	0	0	1	0	0	0	2	1
Y2	0	2	-1	-2	0	-1	0	0	0	1	0	0	2	-
Y3	2	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	4	2
Y4	1	2	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	4	4
A. Obj.	-5	-5	3	3	1	1	1	1	0	0	0	0	w-12	-

2차 계획 문제 예제
- Simplex 방법을 이용한 풀이(9)

2

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	Y1	Y2	Y3	Y4	bi	bi/ai
X1	1	0	-1	-1/2	-1/2	0	0	0	1/2	0	0	0	1	-
Y2	0	**2**	-1	-2	0	-1	0	0	0	1	0	0	2	**1**
Y3	0	1	2	1	1	0	-1	0	-1	0	1	0	2	2
Y4	0	2	1	1/2	1/2	0	0	-1	-1/2	0	0	1	3	3/2
A. Obj.	0	**-5**	-2	1/2	-3/2	1	1	1	5/2	0	0	0	w-7	-

3

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	Y1	Y2	Y3	Y4	bi	bi/ai
X1	1	0	-1	-1/2	-1/2	0	0	0	1/2	0	0	0	1	-
X2	0	1	-1/2	-1	0	-1/2	0	0	0	1/2	0	0	1	-
Y3	0	0	**5/2**	2	1	1/2	-1	0	-1	-1/2	1	0	1	**2/5**
Y4	0	0	2	5/2	1/2	1	0	-1	-1/2	-1	0	1	1	1/2
A. Obj.	0	0	**-9/2**	-9/2	-3/2	-3/2	1	1	5/2	5/2	0	0	w-2	-

4

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	Y1	Y2	Y3	Y4	bi	bi/ai
X1	1	0	0	3/10	-1/10	1/5	-2/5	0	1/10	-1/5	2/5	0	7/5	14/3
X2	0	1	0	-3/5	1/5	-2/5	-1/5	0	-1/5	2/5	1/5	0	6/5	-
X3	0	0	1	4/5	2/5	1/5	-2/5	0	-2/5	-1/5	2/5	0	2/5	1/2
Y4	0	0	0	**9/10**	-3/10	3/5	4/5	-1	3/10	-3/5	-4/5	1	1/5	**2/9**
A. Obj.	0	0	0	**-9/10**	3/10	-3/5	-4/5	1	7/10	8/5	9/5	0	w-1/5	-

2차 계획 문제 예제
- Simplex 방법을 이용한 풀이(10)

5

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	Y1	Y2	Y3	Y4	bi	bi/ai
X1	1	0	0	0	0	0	-2/3	1/3	0	0	2/3	-1/3	4/3	-
X2	0	1	0	0	0	0	7/15	-2/3	2/5	0	-7/15	2/15	4/3	-
X3	0	0	1	0	2/3	-1/3	-10/9	8/9	-2/3	7/15	10/9	-8/45	2/9	-
X4	0	0	0	1	-1/3	2/3	8/9	-10/9	1/3	-2/3	-8/9	2/9	2/9	-
A. Obj.	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	w-0	-

인위 목적 함수가 0이므로 초기 기저 가능해가 구해졌음

$$\mathbf{X}^T_{(1\times8)} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & u_1 & u_2 & \zeta_1 & \zeta_2 & s_1' & s_2' \end{bmatrix}$$

이로부터 초기 기저 가능해 중의 하나는 $X_1=X_2=4/3, X_3=X_4=2/9, X_5=X_6=X_7=X_8=0$

$$x_1 = x_2 = \tfrac{4}{3}, u_1 = u_2 = \tfrac{2}{9}, \zeta_1 = \zeta_2 = s_1' = s_2' = 0$$

한편, 이들은 제약 조건 $u_1 s_1' = 0, u_2 s_2' = 0, \ \zeta_1 x_1 = 0, \ \zeta_2 x_2 = 0$ **을 모두 만족한다.**

따라서 주어진 문제의 최적해는 $x_1 = x_2 = \tfrac{4}{3}, u_1 = u_2 = \tfrac{2}{9}, \zeta_1 = \zeta_2 = s_1' = s_2' = 0$ **이며,**

이것은 비선형 부정 방정식을 먼저 푼 경우와 동일함을 알 수 있다.

2차 계획 문제 예제
- Simplex 방법을 이용한 풀이(11)

만약 첫 번째 Table에서 첫 번째 열이 아니라 목적 함수의 계수가 -5으로서 그 값이 동일한 두 번째 열을 Pivot 열로 선택한다면?

1

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	Y1	Y2	Y3	Y4	bi	bi/ai
Y1	2	0	-2	-1	-1	0	0	0	1	0	0	0	2	-
Y2	0	2	-1	-2	0	-1	0	0	0	1	0	0	2	1
Y3	2	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	4	4
Y4	1	2	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	4	2
A. Obj.	-5	-5	3	3	1	1	1	1	0	0	0	0	w-12	-

2

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	Y1	Y2	Y3	Y4	bi	bi/ai
Y1	2	0	-2	-1	-1	0	0	0	1	0	0	0	2	1
X2	0	1	-1/2	-1	0	-1/2	0	0	0	1/2	0	0	1	-
Y3	2	0	1/2	1	0	1/2	-1	0	0	-1/2	1	0	3	3/2
Y4	1	0	1	2	0	1	0	-1	0	-1	0	1	2	2
A. Obj.	-5	0	1/2	-2	1	-3/2	1	1	0	5/2	0	0	w-7	-

3

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	Y1	Y2	Y3	Y4	bi	bi/ai
X1	1	0	-1	-1/2	-1/2	0	0	0	1/2	0	0	0	1	-
X2	0	1	-1/2	-1	0	-1/2	0	0	0	1/2	0	0	1	-
Y3	0	0	5/2	2	1	1/2	-1	0	-1	-1/2	1	0	1	2/5
Y4	0	0	2	5/2	1/2	1	0	-1	-1/2	-1	0	1	1	1/2
A. Obj.	0	0	-9/2	-9/2	-3/2	-3/2	1	1	5/2	5/2	0	0	w-2	-

2차 계획 문제 예제
- Simplex 방법을 이용한 풀이(12)

*원래 -9/10을 택해야 하지만, -9/5로 선택해 보았음

4

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	Y1	Y2	Y3	Y4	bi	bi/ai
X1	1	0	0	3/10	-1/10	1/5	-2/5	0	1/10	-1/5	2/5	0	7/5	-
X2	0	1	0	-6/10	1/5	-2/5	-1/5	0	-1/5	2/5	1/5	0	6/5	-
X3	0	0	1	4/5	2/5	1/5	-2/5	0	-2/5	-1/5	2/5	0	2/5	-
Y4	0	0	0	9/10	-3/10	3/5	4/5	-1	3/10	-3/5	-4/5	1	1/5	1/4
A. Obj.	0	0	0	-9/10	3/10	-3/5	-4/5	1	7/10	8/5	9/5	0	w-1/5	-

5

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	Y1	Y2	Y3	Y4	bi	bi/ai
X1	1	0	0	3/4	-1/4	1/2	0	-1/2	-1/4	-1/2	0	1/2	3/2	-
X2	0	1	0	-3/8	1/8	-1/4	0	-1/4	-1/8	1/4	0	1/4	5/4	-
X3	0	0	1	5/4	1/4	1/2	0	-1/2	-1/4	-1/2	0	1/2	1/2	-
X7	0	0	0	9/8	-3/8	3/4	1	-5/4	3/8	-3/4	-1	5/4	1/4	-
A. Obj.	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	w-0	-

인위 목적 함수가 0이므로 초기 기저 가능해가 구해졌음

$$\mathbf{X}^T_{(1\times 8)} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & u_1 & u_2 & \zeta_1 & \zeta_2 & s_1' & s_2' \end{bmatrix}$$

이로부터 또 다른 초기 기저 가능해는 $X_1=3/2$, $X_2=5/4$, $X_3=1/2$, $X_4=X_5=X_6=0$, $X_7=1/4$, $X_8=0$

$$x_1 = \tfrac{4}{3}, x_2 = \tfrac{5}{4}, u_1 = \tfrac{1}{2}, u_2 = \zeta_1 = \zeta_2 = 0, s_1' = \tfrac{1}{4}, s_2' = 0$$

한편, 이들은 제약 조건 $u_1 s_1' = 0$ **을 만족하지 않는다.**

따라서 이들은 주어진 문제의 최적해가 될 수 없다.

➡ Pivot 과정 중 선택 가능한 열 또는 행 또는 "b_i/a_i"의 계수가 같은 경우, 어떤 것을 선택하느냐에 따라 초기 기저 가능해가 달라진다.

➡ 위의 모든 경우에 대해서 비선형 방정식($u_i{*}s_i'=0$)을 만족하는 해가 있는지 확인해 봐야 함

2차 계획 문제 예제
- Simplex 방법을 이용한 풀이(13)

만약 세 번째 Table에서 세 번째 열이 아니라 목적 함수의 계수가 –9/2로서 그 값이 동일한 네 번째 열을 Pivot 열로 선택한다면?

3

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	Y1	Y2	Y3	Y4	bi	bi/ai
X1	1	0	-1	-1/2	-1/2	0	0	0	1/2	0	0	0	1	-
X2	0	1	-1/2	-1	0	-1/2	0	0	0	1/2	0	0	1	-
Y3	0	0	5/2	2	1	1/2	-1	0	-1	-1/2	1	0	1	1/2
Y4	0	0	2	5/2	1/2	1	0	-1	-1/2	-1	0	1	1	5/2
A. Obj.	0	0	-9/2	-9/2	-3/2	-3/2	1	1	5/2	5/2	0	0	w-2	-

4

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	Y1	Y2	Y3	Y4	bi	bi/ai
X1	1	0	-6/10	0	-2/5	1/5	0	-1/5	2/5	-1/5	0	1/5	6/5	-
X2	0	1	3/10	0	1/5	-1/10	0	-2/5	-1/5	1/10	0	2/5	7/5	-
Y3	0	0	9/10	0	3/5	-3/10	-1	4/5	-3/5	3/10	1	-4/5	1/5	1/4
X4	0	0	4/5	1	1/5	2/5	0	-2/5	-1/5	-2/5	0	2/5	2/5	-
A. Obj.	0	0	-9/10	0	-3/5	3/10	1	-4/5	8/5	7/10	0	9/5	w-1/5	-

5

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	Y1	Y2	Y3	Y4	bi	bi/ai
X1	1	0	-3/8	0	-1/4	1/8	-1/4	0	1/4	-1/8	1/4	0	5/4	-
X2	0	1	3/4	0	1/2	-1/4	-1/2	0	-1/2	-1/4	1/2	0	3/2	-
X8	0	0	9/8	0	3/4	-3/8	-5/4	1	3/4	3/8	5/4	-1	1/4	-
X4	0	0	5/4	1	1/2	1/4	-1/2	0	-1/2	-1/4	1/2	0	1/2	-
A. Obj.	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	w-0	-

2차 계획 문제 예제
- Simplex 방법을 이용한 풀이(14)

5

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	Y1	Y2	Y3	Y4	bi	bi/ai
X1	1	0	-3/8	0	-1/4	1/8	-1/4	0	1/4	-1/8	1/4	0	5/4	-
X2	0	1	3/4	0	1/2	-1/4	-1/2	0	-1/2	-1/4	1/2	0	3/2	-
X8	0	0	9/8	0	3/4	-3/8	-5/4	1	3/4	3/8	5/4	-1	1/4	-
X4	0	0	5/4	1	1/2	1/4	-1/2	0	-1/2	-1/4	1/2	0	1/2	-
A. Obj.	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	w-0	-

인위 목적 함수가 0이므로 초기 기저 가능해가 구해졌음

$$\mathbf{X}^T{}_{(1\times 8)} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & u_1 & u_2 & \zeta_1 & \zeta_2 & s_1 & s_2 \end{bmatrix}$$

이로부터 또 다른 초기 기저 가능해는 $X_1=5/4$, $X_2=3/2$, $X_3=0$, $X_4=1/2$, $X_5=X_6=0=X_7=0$, $X_8=1/4$

$$x_1 = \tfrac{4}{3}, x_2 = \tfrac{5}{4}, u_1 = 0, u_2 = \tfrac{1}{2}, \zeta_1 = \zeta_2 = s_1' = 0, s_2' = \tfrac{1}{4}$$

한편, 이들은 제약 조건 $u_2 s_2' = 0$ **을 만족하지 않는다.**

따라서 이들은 주어진 문제의 최적해가 될 수 없다.

➡ Pivot 과정 중 선택 가능한 열 또는 행 또는 "b_i/a_i"의 계수가 같은 경우,
어떤 것을 선택하느냐에 따라 초기 기저 가능해가 달라진다.

➡ 위의 모든 경우에 대해서 비선형 방정식(u_i*s_i'=0)을 만족하는 해가 있는지 확인해 봐야 함

[참고] Simplex 방법의 적용을 위해 하나의 변수를 두 개의 음이 아닌 변수로 분리하는 경우(1/3)

Simplex 방법을 적용할 때는 모든 변수들이 0보다 크거나 같다고 가정한다.

즉, 주어진 문제의 최적점에서 모든 변수 값이 음이 아닌 경우에만 Simplex로 풀 수 있다.

Simplex를 적용하기 위한 "선형 수학 모델이 포함한 변수"들 중
최적점에서 부호 제한이 없는 변수는 두 개의 음이 아닌 변수로 분리해야 한다.

$$\begin{aligned}
&\textit{Minimize} \quad z = -y_1 - 2y_2 \\
&\textit{Subject to} \quad 3y_1 + 2y_2 \le 12 \\
&\qquad 2y_1 + 3y_2 \ge 6 \\
&\qquad y_1 \ge 0
\end{aligned}$$

y_2 는 부호 제한 없음

Simplex 방법이 적용 가능한 선형 최적화 문제

$$y_2 = y_2^+ - y_2^-$$

$$y_2^+, y_2^- \ge 0$$

부호 제한이 없는 변수
→ 음이 아닌 변수로 수정

$$\begin{aligned}
&\textit{Minimize} \quad f = -y_1 - 2y_2^+ + 2y_2^- \\
&\textit{Subject to} \quad 3y_1 + 2y_2^+ - 2y_2^- \le 12 \\
&\qquad 2y_1 + 3y_2^+ - 3y_2^- \ge 6 \\
&\qquad y_1, y_2^+, y_2^- \ge 0
\end{aligned}$$

y_2는 부호 제한이 없기 때문에
두 개의 음이 아닌 변수로 분리한다.

"≤" 형태의 부등호 제약 조건:
완화 변수(slack variable)의 도입

"≥" 형태의 부등호 제약 조건:
잉여 변수(surplus variable) 및
인위 변수(artificial variable)의 도입

$$\begin{aligned}
&\textit{Minimize} \quad f = -y_1 - 2y_2^+ + 2y_2^- \\
&\textit{Subject to} \quad 3y_1 + 2y_2^+ - 2y_2^- + x_1 = 12 \\
&\qquad 2y_1 + 3y_2^+ - 3y_2^- - x_2 + x_3 = 6 \\
&\qquad y_1, y_2^+, y_2^- \ge 0,\ x_i \ge 0; i = 1 \text{ to } 3
\end{aligned}$$

→ Simplex 방법으로 문제를 푼다

[참고] Simplex 방법의 적용을 위해 하나의 변수를 두 개의 음이 아닌 변수로 분리하는 경우(2/3)

Simplex 방법을 적용할 때는 모든 변수들이 0보다 크거나 같다고 가정한다.

즉, 주어진 문제의 최적점에서 모든 변수 값이 음이 아닌 경우에만 Simplex로 풀 수 있다.

Simplex를 적용하기 위한 "선형 수학 모델이 포함한 변수"들 중
최적점에서 부호 제한이 없는 변수는 두 개의 음이 아닌 변수로 분리해야 한다.

최적화 수학 모델

$$\text{Minimize} \quad f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 2$$

$$\text{Subject to} \quad g_1(\mathbf{x}) = -2x_1 - x_2 + 4 \le 0$$

$$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 - 2x_2 + 4 \le 0$$

단, $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

선형 최적화 문제가 아니기 때문에
Simplex 방법을 바로 적용할 수 없음

Kuhn-Tucker 필요 조건을 이용하여
선형 수학 모델을 작성할 때

x_1, x_2가 음이 아니라는 제약조건도
함께 이용하였기 때문에

x_1, x_2가 음이 아니라고 확신할 수 있다.

Kuhn-Tucker 필요 조건에 의해 →

Kuhn-Tucker 필요 조건: $\nabla L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\delta}) = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial s_1} = 2u_1 s_1' = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial s_2} = 2u_2 s_2' = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \delta_1} = 2\zeta_1 x_1 = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \delta_2} = 2\zeta_2 x_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2 + 2x_1 - 2u_1 - u_2 - \zeta_1 = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = -2 + 2x_2 - u_1 - 2u_2 - \zeta_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = -2x_1 - x_2 + 4 + s_1' = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial u_2} = -x_1 - 2x_2 + 4 + s_2' = 0$$

단, $u_i, \zeta_i, s_i', x_i \ge 0$

Simplex 방법을 적용할 수 있는 선형 부정 방정식

모든 변수가 음이 아니기 때문에
인위 변수만 추가하여 Simplex방법으로 문제를 푼다.

[참고] Simplex 방법의 적용을 위해 하나의 변수를 두 개의 음이 아닌 변수로 분리하는 경우(3/3)

Simplex 방법을 적용할 때는 모든 변수들이 0보다 크거나 같다고 가정한다.

즉, 주어진 문제의 최적점에서 모든 변수 값이 음이 아닌 경우에만 Simplex로 풀 수 있다.

Simplex를 적용하기 위한 "선형 수학 모델이 포함한 변수"들 중
최적점에서 부호 제한이 없는 변수는 두 개의 음이 아닌 변수로 분리해야 한다.

최적화 수학 모델

$$\textit{Minimize} \quad f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 2$$
$$\textit{Subject to} \quad g_1(\mathbf{x}) = -2x_1 - x_2 + 4 \le 0$$
$$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 - 2x_2 + 4 \le 0$$

선형 최적화 문제가 아니기 때문에
Simplex 방법을 바로 적용할 수 없음

Kuhn-Tucker 필요 조건에 의해

Kuhn-Tucker 필요 조건: $\nabla L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\delta}) = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial s_1} = 2u_1 s_1' = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial s_2} = 2u_2 s_2' = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2 + 2x_1 - 2u_1 - u_2 = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2} = -2 + 2x_2 - u_1 - 2u_2 = 0$$

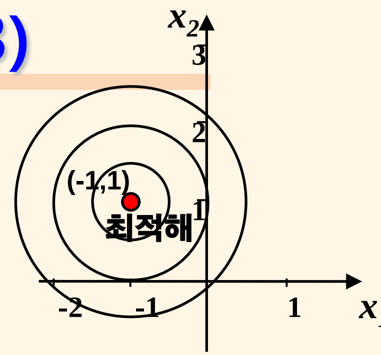
$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = -2x_1 - x_2 + 4 + s_1' = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial u_2} = -x_1 - 2x_2 + 4 + s_2' = 0$$

단, $u_i, s_i' \ge 0$

Simplex 방법을 적용할 수 있는 선형 부정 방정식

x_1, x_2의 부호 제한이 없기 때문에
x_1, x_2를 각각 두 개의 음이 아닌 변수로 분리한 후
인위 변수를 추가하여 Simplex방법으로 문제를 푼다.

[참고] Simplex 방법의 적용을 위해 하나의 변수를 두 개의 음이 아닌 변수로 분리하는 이유(1/3)



Minimize $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2$: 2차 형식의 목적 함수

Minimize $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2$

Lagrange 함수 구성

$$L(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + 2 = 0 \quad \text{---} ①'$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 2 = 0 \quad \text{---} ②'$$

Simplex 방법으로 풀면?

등호 제약 조건이므로 인위변수 추가

$$-2x_1 = 2 \qquad -2x_1 + y_1 = 2 \;\text{---}\; ③$$

$$2x_2 = 2 \qquad 2x_2 + y_2 = 2 \;\text{---}\; ④$$

인위 변수는 최종적으로 0이 되어야 함

인위 변수의 합을 최소(0)로 하도록 인위 목적 함수를 구성

식 ③+④ $\longrightarrow -2x_1 + 2x_2 + y_1 + y_2 = 4$

$$2x_1 - 2x_2 = \underbrace{y_1 + y_2}_{w} - 4$$

$x_1 = X_1, x_2 = X_2, y_1 = Y_1, y_2 = Y_2$ **로 변경 후 Matrix 구성**

기저변수	X1	X2	Y1	Y2	bi	bi/ai
Y1	**-2**	0	1	0	2	-
Y2	0	2	0	1	2	1
A. Obj.	**2**	-2	0	0	w-4	-

기저변수	X1	X2	Y1	Y2	bi	bi/ai
Y1	**-2**	0	1	0	2	**2**
X2	0	1	0	1/2	1	-
A. Obj.	**2**	0	0	1	w-2	-

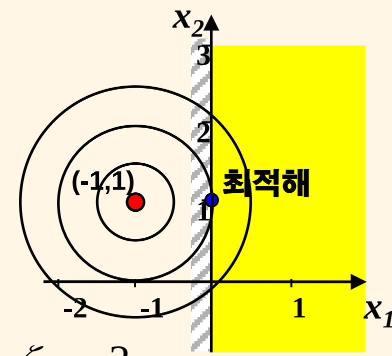
- 인위 목적 함수 계수가 전부 양으로 변경 되었음 ⇨ **Simplex가 중단됨**

- 그러나 인위 변수의 합(w)이 0이 되지 않았음

$$x_1 = 0, x_2 = 1, y_1 = 2, y_2 = 0$$

- x_1의 부호 제한이 없음에도 불구하고 변수를 분리하지 않았으므로 Simplex 방법으로 문제를 풀 수 없다.

[참고] Simplex 방법의 적용을 위해 하나의 변수를 두 개의 음이 아닌 변수로 분리하는 이유(2/3)



Minimize $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2$: 2차 형식의 목적 함수

Subject to $x_1 \geq 0$: 선형화 된 부등호 제약 조건

Minimize $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2$

Subject to $x_1 \geq 0 \rightarrow -x_1 \leq 0 \rightarrow -x_1 + \delta^2 = 0$

Lagrange 함수 구성

$$L(x_1, x_2, \zeta, \delta) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 + \zeta(-x_1 + \delta^2)$$

Kuhn-Tucker 필요조건으로부터: $\nabla L(x_1, x_2, \zeta, \delta) = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + 2 - \zeta = 0 \quad --- ①$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 2 = 0 \quad --- ②$$

$$\frac{\partial L}{\partial \zeta} = -x_1 + \delta^2 = 0 \quad --- ③$$

$$\frac{\partial L}{\partial \delta} = 2\zeta\delta = 0 \quad --- ④$$

Simplex 방법으로 풀면?

$\zeta = 0$ 이라 가정하면 $x_1 = -1$ → 식③이 성립 안함

$\delta = 0$ 이라 가정하면 $x_1 = 0, x_2 = 1, \zeta = 2$

Simplex 방법으로 풀면?

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + 2 - \zeta = 0 \quad --- ① \longrightarrow 2x_1 - \zeta = -2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 2 = 0 \quad --- ② \longrightarrow 2x_2 = 2$$

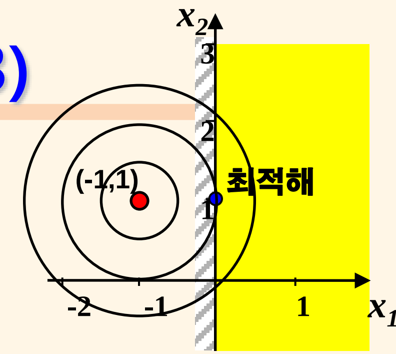
$$\frac{\partial L}{\partial \zeta} = -x_1 + \delta^2 = 0 \quad --- ③ \longrightarrow \boxed{x_1 = \delta^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \delta} = 2\zeta\delta = 0 \quad --- ④ \longrightarrow \boxed{2\zeta\delta^2 = 0}$$

식④에의 양변에 δ 를 곱한 후 식③을 대입 $\zeta x_1 = 0 \quad --- ⑤$

1. 식①, ②, ⑤를 만족하는 해를 찾아야 한다.
2. 식①, ②는 **선형**이므로 Simplex 방법으로 푼다. 이때 **모든 변수가 음이 아니라고 확신할 수 있으므로** 인위 변수만 추가하여 Simplex 방법으로 푼다.
3. 2번에서 구해진 해가 비선형 방정식 ⑤를 만족하는지 확인 한다.

[참고] Simplex 방법의 적용을 위해 하나의 변수를 두 개의 음이 아닌 변수로 분리하는 이유(3/3)



Minimize $f(x)=x_1^2+x_2^2+2x_1-2x_2$: **2차 형식의 목적 함수**

Subject to $x_1 \ge 0$: **선형화 된 부등호 제약 조건**

$$2x_1-\zeta=-2$$
$$2x_2=2$$
$$\zeta x_1=0$$

$$2x_1-\zeta=-2,\quad 2x_2=2 \xrightarrow{\text{우변은 음이 아니어야 함}} -2x_1+\zeta=2,\quad 2x_2=2$$

$$-2x_1+\zeta=2,\quad 2x_2=2 \xrightarrow{\text{등호 제약 조건이므로 인위변수 추가}} -2x_1+\zeta+y_1=2,\quad 2x_2+y_2=2$$

인위 변수는 최종적으로 0이 되어야 함

인위 변수의 합을 최소(0)로 하도록 인위 목적 함수를 구성

$$-2x_1+2x_2+\zeta+y_1+y_2=4$$
$$2x_1-2x_2-\zeta=\underbrace{y_1+y_2}_{w}-4$$

$x_1=X_1, x_2=X_2, \zeta=X_3, y_1=Y_1, y_2=Y_2$ **로 변경 후 Matrix 구성**

기저변수	X1	X2	X3	Y1	Y2	bi	bi/ai
Y1	-2	0	1	1	0	2	-
Y2	0	2	0	0	1	2	1
A. Obj.	2	-2	-1	0	0	w-4	-

기저변수	X1	X2	X3	Y1	Y2	bi	bi/ai
Y1	-2	0	1	1	0	2	-
Y2	0	2	0	0	1	2	1
A. Obj.	2	-2	-1	0	0	w-4	-

기저변수	X1	X2	X3	Y1	Y2	bi	bi/ai
Y1	-2	0	1	1	0	2	2
X2	0	1	0	0	1/2	1	-
A. Obj.	2	0	-1	0	1	w-2	-

기저변수	X1	X2	X3	Y1	Y2	bi	bi/ai
X3	-2	0	1	1	0	2	-
X2	0	1	0	0	1/2	1	1
A. Obj.	0	0	0	1	1	w-0	-

$$X_1=0, X_2=1, X_3=2, Y_1=0, Y_2=0$$
$$x_1=0, x_2=1, \zeta=2, y_1=0, y_2=0$$

$\zeta x_1=0$ - - - **식⑤를 만족하므로 해가 된다.**

[참고] 부호 제약이 없는 변수로 인하여 변수의 개수가 증가 하였을 경우 구해지는 해 (1/2)

행렬식 표현

미지수의 개수 $2n+2m+2p$

식의 개수 $n+2m+p$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{(n\times n)} & -\mathbf{H}_{(n\times n)} & \mathbf{A}_{(n\times m)} & \mathbf{0}_{(n\times m)} & \mathbf{N}_{(n\times p)} & -\mathbf{N}_{(n\times p)} \\ \mathbf{A}^T_{(m\times n)} & -\mathbf{A}^T_{(m\times n)} & \mathbf{0}_{(m\times m)} & \mathbf{I}_{(m\times m)} & \mathbf{0}_{(m\times p)} & \mathbf{0}_{(m\times p)} \\ \mathbf{N}^T_{(p\times n)} & -\mathbf{N}^T_{(p\times n)} & \mathbf{0}_{(p\times m)} & \mathbf{0}_{(p\times m)} & \mathbf{0}_{(p\times p)} & \mathbf{0}_{(p\times p)} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{B}_{((n+m+p)\times(2n+2m+2p))}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{d}^+_{(n\times 1)} \\ \mathbf{d}^-_{(n\times 1)} \\ \mathbf{u}_{(m\times 1)} \\ \mathbf{s}'_{(m\times 1)} \\ \mathbf{y}_{(p\times 1)} \\ \mathbf{z}_{(p\times 1)} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{X}_{((2n+2m+2p)\times 1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{c}_{(n\times 1)} \\ \mathbf{b}_{(m\times 1)} \\ \mathbf{e}_{(p\times 1)} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{D}_{((n+m+p)\times 1)}}$$

$$u_i s'_i = 0; i = 1\ to\ m$$

$$\mathbf{B}_{((n+m+p)\times(2n+2m+2p))}\mathbf{X}_{((2n+2m+2p)\times 1)} = \mathbf{D}_{((n+m+p)\times 1)}$$

본래 위의 식은 미지수의 개수와 식의 개수가 모두 $n+2m+p$인 방정식이다.

식 $\mathbf{v}_{(p\times 1)} = \mathbf{y}_{(p\times 1)} - \mathbf{z}_{(p\times 1)}$, $\mathbf{d}_{(n\times 1)} = \mathbf{d}^+_{(n\times 1)} - \mathbf{d}^-_{(n\times 1)}$에 의해 미지수의 개수가 $n+p$개만큼 증가 하였다.

관심있는 변수v_i, d_i는 $\mathbf{v}_{(p\times 1)} = \mathbf{y}_{(p\times 1)} - \mathbf{z}_{(p\times 1)}$, $\mathbf{d}_{(n\times 1)} = \mathbf{d}^+_{(n\times 1)} - \mathbf{d}^-_{(n\times 1)}$ 에 의해 결정 된다.

예시

방정식

$$x + y + z = 2$$
$$2x + 2y + z = 6$$
$$2x + y = 5$$

$$\xrightarrow[(z_1, z_2 \geq 0)]{z = z_1 - z_2 \text{ 로 치환}}$$

$$x + y + z_1 - z_2 = 2$$
$$2x + 2y + z_1 - z_2 = 6$$
$$2x + y = 5$$

해 $x = 1, y = 3, z = -2$ $\quad$ $x = 1, y = 3, z_1 = 0, z_2 = 2$

치환 후의 방정식은 부정 방정식이다. 항상 z_1-z_2=-2가 된다.

[참고] 부호 제약이 없는 변수로 인하여 변수의 개수가 증가 하였을 경우 구해지는 해 (2/2)

예시 방정식

$$x+y+z=5$$
$$2x+3y+z=11$$
$$xz=0$$

$$\xrightarrow[(z_1, z_2 \geq 0)]{z = z_1 - z_2 \text{ 로 치환}}$$

$$x+y+z_1-z_2=5$$
$$2x+3y+z_1-z_2=11$$
$$xz=0$$

Case #1

Simplex로 풀기 위해 인위변수 도입

$$x+y+z+Y_1=5$$
$$2x+3y+z+Y_2=11$$

← **변수 5개 선형 독립인 식 2개**

3개의 변수를 0으로 가정하여 해를 구함

인위 변수의 합 Y1+Y2가 0이 되면 Simplex가 종료 됨

	(x,	y,	z,	Y1,	Y2)
①	(4,	1,	0,	0,	0)
②	(6,	0,	-1,	0,	0)
③	(0,	3,	2,	0,	0)

Simplex 방법으로 구할 수 있는 ①,③번 해 중 $xz=0$를 만족하는 것이 방정식의 최종 해이다.

z (z1-z2)가 음수인 것을 제외하면 Case #1 경우의 해와 Case #2 경우의 해가 같다.

Case #2

Simplex로 풀기 위해 인위변수 도입

$$x+y+z_1-z_2+Y_1=5$$
$$2x+3y+z_1-z_2+Y_2=11$$

← **변수 6개 선형 독립인 식 2개**

4개의 변수를 0으로 가정하여 해를 구함

인위 변수의 합 Y1+Y2가 0이 되면 Simplex가 종료 됨

			z=z1-z2			
	(x,	y,	z1,	z2,	Y1,	Y2)
①	(4,	1,	0,	0,	0,	0)
②	(6,	0,	0,	1,	0,	0)
③	(6,	0,	-1,	0,	0,	0)
④	(0,	0,	-,	-,	0,	0)
⑤	(0,	3,	0,	-2,	0,	0)
⑥	(0,	3,	2,	0,	0,	0)

Simplex 방법으로 구할 수 있는 ①,②,⑥번 해 중 $xz=0$를 만족하는 것이 방정식의 최종 해이다.

Naval Architecture & Ocean Engineering

Ch.6 Constrained Nonlinear Optimization method

6.2 Sequential Linear Programming

SLP(Sequential Linear Programming)

- 현재의 설계점에서 주어진 목적 함수와 제약 조건을 선형화하여 선형 계획 문제(LP problem)로 만든 후,
- 이를 풀어 설계 변수의 변화 정도를 얻어냄으로써 개선된 설계점을 구하는 방법

$$\underbrace{\mathbf{x}^{(k+1)}}_{\text{개선된 설계점}} = \underbrace{\mathbf{x}^{(k)}}_{\text{현재의 설계점}} + \underbrace{\mathbf{d}^{(k)}}_{\text{LP problem으로부터 구하는 설계 변수의 변화 정도}}$$

- 즉, 선형 계획 문제(Linear Programming) 문제를 연속적(Sequential)으로 풀어 최적해를 구하는 방법

순차적 선형 계획법(SLP; Sequential Linear Programming) 예제
- 부등호 제약 조건이 있는 경우 풀이 예(1)

$$\textit{Minimize} \quad f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$$

$$\textit{Subject to} \quad g_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{6}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^2 - 1.0 \le 0$$

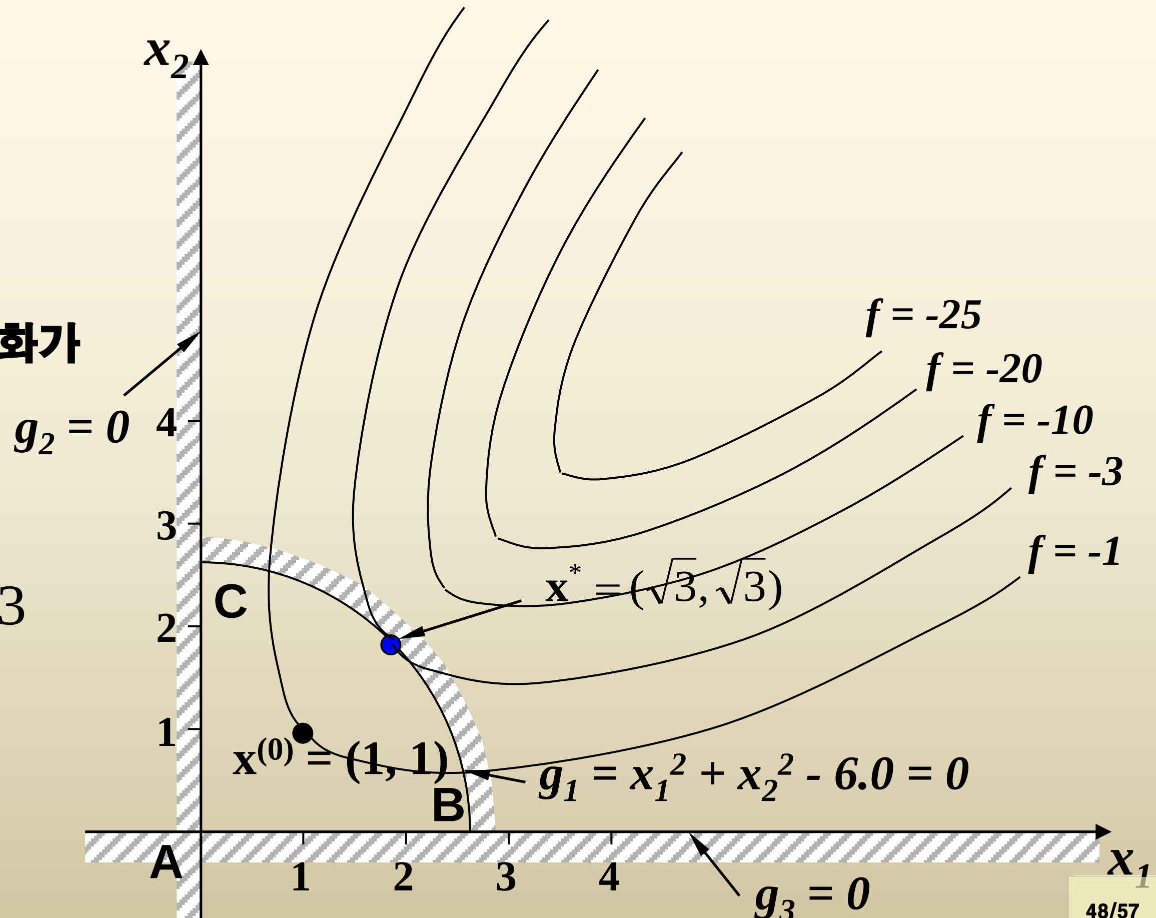
$$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$$

$$g_3(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$$

초기 시작점은 $\mathbf{x}^{(0)} = (1,1)$,

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.001$ **이고, 15%의 설계 변화가 허용된다고 가정**

최적해는 $\mathbf{x}^* = (\sqrt{3}, \sqrt{3}),\ f(\mathbf{x}^*) = -3$



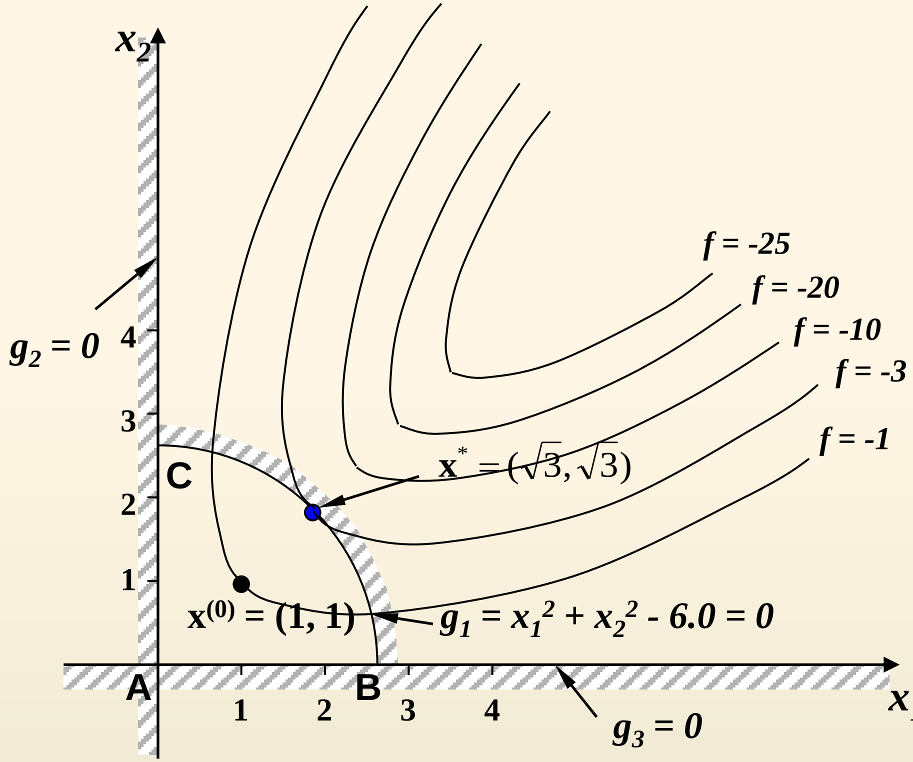
순차적 선형 계획법 예제
- 부등호 제약 조건이 있는 경우 풀이 예(2)

Minimize $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$

Subject to $g_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{6}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^2 - 1.0 \le 0$

$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$

$g_3(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$



(1) 반복 과정 1(k = 0)

(i) 단계 1

문제에서 주어진 초기 조건으로부터

$\mathbf{x}^{(0)} = (1,1), \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.001$

(ii) 단계 2: 목적 함수와 제약 조건 함수의 값 계산

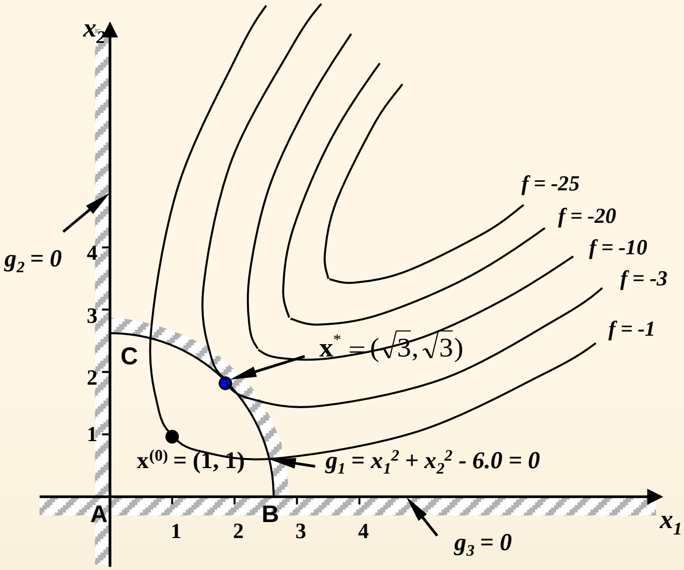
$f(1,1) = -1$

$g_1(1,1) = -\frac{2}{3} < 0$ ➡ **제약 조건 만족**

$g_2(1,1) = -1 < 0$ ➡ **제약 조건 만족**

$g_3(1,1) = -1 < 0$ ➡ **제약 조건 만족**

순차적 선형 계획법 예제
- 부등호 제약 조건이 있는 경우 풀이 예(2)



$$\text{Minimize} \quad f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$$

$$\text{Subject to} \quad g_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{6}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^2 - 1.0 \le 0$$

$$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$$

$$g_3(\mathbf{x}) = -x_2 \le 0$$

(1) 반복 과정 1(k = 0) $\mathbf{x}^{(0)} = (1,1), \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.001$

(iii) 단계 3: LP 문제의 정의(목적함수를 선형화 한다.)

Taylor 급수의 1차항(선형항)만 고려한 목적 함수

$$\text{Minimize:} \quad f(\mathbf{x}^{(0)} + \Delta\mathbf{x}^{(0)}) \cong f(\mathbf{x}^{(0)}) + \nabla f^T(\mathbf{x}^{(0)})\Delta\mathbf{x}^{(0)}$$

$$\text{Minimize:} \quad f(\mathbf{x}^{(0)} + \Delta\mathbf{x}^{(0)}) - f(\mathbf{x}^{(0)}) \cong \nabla f^T(\mathbf{x}^{(0)})\Delta\mathbf{x}^{(0)}$$

$$\Delta\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{d}^{(0)}, \nabla f^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}^{(k)}$$

$$\mathbf{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} & x_2^{(k)} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{d}^{(k)} = \begin{bmatrix} d_1^{(k)} & d_2^{(k)} \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} \Delta x_1^{(k)} & \Delta x_2^{(k)} \end{bmatrix}^T$$

$$\text{Minimize:} \quad f(\mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{d}^{(0)}) - f(\mathbf{x}^{(0)}) \cong \begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2 & 2x_2 - 3x_1 \end{bmatrix}_{\mathbf{x}^{(0)}} \begin{bmatrix} d_1^{(0)} \\ d_2^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$\overline{f}(\mathbf{d}^{(0)}) \cong (2x_1^{(0)} - 3x_2^{(0)})d_1^{(0)} + (2x_2^{(0)} - 3x_1^{(0)})d_2^{(0)} \longleftarrow \mathbf{x}^{(0)} = (1,1) \text{ 대입}$$

$$\boxed{\overline{f}(\mathbf{d}^{(0)}) \cong -d_1^{(0)} - d_2^{(0)}}$$ ← 선형화 된 목적 함수

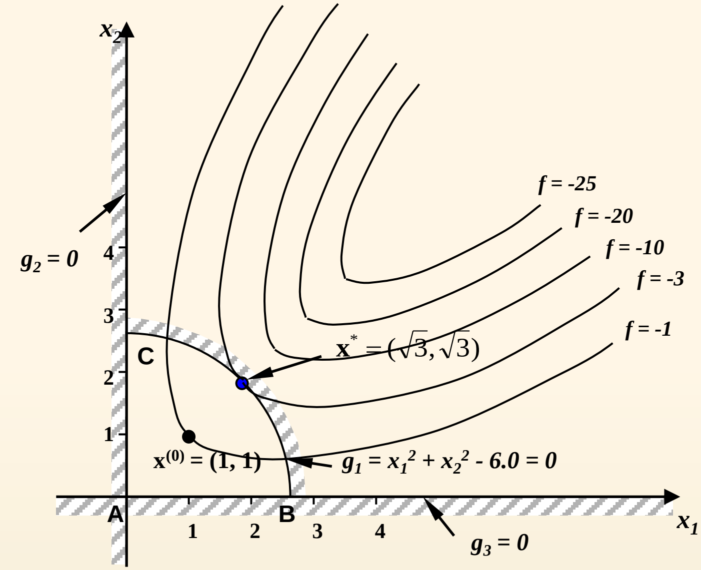
순차적 선형 계획법 예제
- 부등호 제약 조건이 있는 경우 풀이 예(2)

$$\textit{Minimize}\quad f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2$$

$$\textit{Subject to}\quad g_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{6}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^2 - 1.0 \le 0$$

$$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0$$

$$g_3(\mathbf{x}) = -x_2 \le 0$$



(1) 반복 과정 1(k = 0) $\mathbf{x}^{(0)} = (1,1), \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0.001$

(iii) 단계 3: LP 문제의 정의(제약조건을 선형화 한다.)

$$\textit{Subject to:}\ g_j(\mathbf{x}^{(0)} + \Delta\mathbf{x}^{(0)}) \Rightarrow \underline{g_j(\mathbf{x}^{(0)}) + \nabla g_j^T(\mathbf{x}^{(0)})\Delta\mathbf{x}^{(0)} \le 0}; \ j = 1 \ to \ m$$

Taylor 급수의 1차항(선형항)만 고려한 제약조건

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{d}^{(k)}$$

$g_j(\mathbf{x}^{(0)})$**를 이항하면**

$$\nabla g_j^T(\mathbf{x}^{(0)})\Delta\mathbf{x}^{(0)} \le -g_j(\mathbf{x}^{(0)}); \ j = 1 \ to \ m$$

$$\Delta\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{d}^{(0)}, \nabla g_j^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_j}{\partial x_1} & \frac{\partial g_j}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \ \nabla g_j^T(\mathbf{x}^{(0)})\Delta\mathbf{x}^{(0)} = \bar{g}_j(\Delta\mathbf{x}^{(0)}) = \bar{g}_j(\mathbf{d}^{(0)})$$

Subject to:

$$\bar{g}_1(\mathbf{d}^{(0)}) \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{3}x_1^{(0)} & \frac{1}{3}x_2^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1^{(0)} \\ d_2^{(0)} \end{bmatrix} \le -\left(\frac{1}{6}\left(x_1^{(0)}\right)^2 + \frac{1}{6}\left(x_2^{(0)}\right)^2 - 1.0 \right)$$

$$\bar{g}_2(\mathbf{d}^{(0)}) \Rightarrow \begin{bmatrix} -x_1^{(0)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1^{(0)} \\ d_2^{(0)} \end{bmatrix} \le -\left(-x_1^{(0)}\right)$$

$$\bar{g}_3(\mathbf{d}^{(0)}) \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -x_2^{(0)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1^{(0)} \\ d_2^{(0)} \end{bmatrix} \le -\left(-x_2^{(0)}\right)$$

$\mathbf{x}^{(0)} = (1,1)$ **대입**

$$\bar{g}_1(\mathbf{d}^{(0)}) = \tfrac{1}{3}d_1^{(0)} + \tfrac{1}{3}d_2^{(0)} \le \frac{2}{3}$$

$$\bar{g}_2(\mathbf{d}^{(0)}) = -d_1^{(0)} \le 1$$

$$\bar{g}_3(\mathbf{d}^{(0)}) = -d_2^{(0)} \le 1$$

선형화 된 제약 조건

$$g_1(1,1) = -\tfrac{2}{3}$$

$$g_2(1,1) = -1$$

$$g_3(1,1) = -1$$

순차적 선형 계획법 예제
- 부등호 제약 조건이 있는 경우 풀이 예(3)

(iv) 단계 4: LP 문제의 풀이를 통한 탐색 방향($d^{(0)}$)의 결정

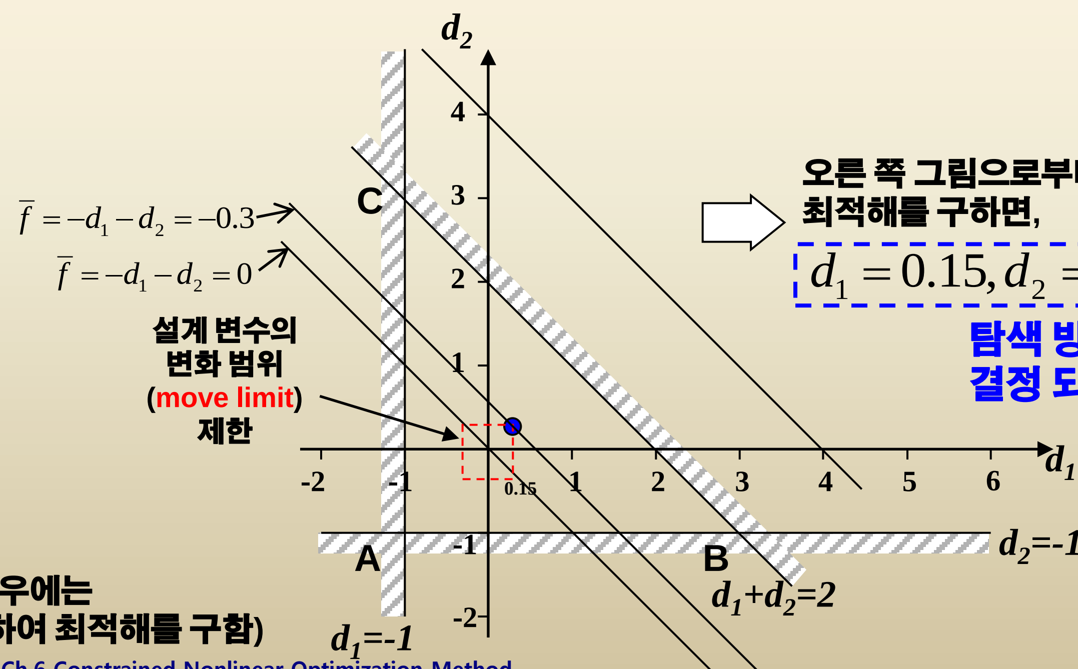
$$
\begin{aligned}
&\textit{Minimize} \quad \bar{f} = -d_1 - d_2 \\
&\textit{Subject to} \quad \tfrac{1}{3}d_1 + \tfrac{1}{3}d_2 \le \tfrac{2}{3} \\
&\qquad -d_1 \le 1 \\
&\qquad -d_2 \le 1 \\
&\qquad \boxed{\begin{aligned}-0.15 \le d_1 \le 0.15 \\ -0.15 \le d_2 \le 0.15\end{aligned}}
\end{aligned}
$$

설계 변수의 변화 범위에 대한 제약 조건 (move limit)

목적 함수 및 제약조건을 선형화

$$
\begin{aligned}
&\textit{Minimize} \quad f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1x_2 \\
&\textit{Subject to} \quad g_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{6}x_1^2 + \frac{1}{6}x_2^2 - 1.0 \le 0 \\
&\qquad g_2(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0 \\
&\qquad g_3(\mathbf{x}) = -x_1 \le 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&f(1,1) = -1,\ g_1(1,1) = -\tfrac{2}{3}, \\
&g_2(1,1) = -1,\ g_3(1,1) = -1 \\
&\nabla f = (-1,-1),\ \nabla g_1 = (\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}), \\
&\nabla g_2 = (-1,0),\ \nabla g_3 = (0,-1)
\end{aligned}
$$



오른 쪽 그림으로부터 최적해를 구하면,

$$\boxed{d_1 = 0.15,\ d_2 = 0.15}$$

탐색 방향이 결정 되었음

(프로그램을 이용할 경우에는
Simplex 방법을 이용하여 최적해를 구함)

순차적 선형 계획법 예제
- 부등호 제약 조건이 있는 경우 풀이 예(5)

(v) 단계 5: 수렴 기준의 검토(결정된 탐색 방향($\mathbf{d}^{(0)}$)을 이용한다.)

$$\mathbf{d}^{(0)} = (d_1, d_2) = (0.15, 0.15)$$

$$\left\|\mathbf{d}^{(0)}\right\| = \sqrt{0.15^2 + 0.15^2} = 0.212 > \varepsilon_2 (= 0.001)$$ **이므로 수렴 기준을 만족하지 않음**

(vi) 단계 6: 새로운 설계점의 결정 및 반복 횟수의 갱신

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(1,1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{d}^{(0)} = (1,1) + (0.15, 0.15) = (1.15, 1.15)$$

$$k = k + 1 = 1$$

0. 개선된 설계점을 찾았으므로,

1. 다시 개선된 설계점에서 주어진 문제를 선형 계획 문제로 근사화하고,

2. 선형 계획 문제를 풀어서 탐색 방향(d)을 정한 뒤,

3. 개선된 설계점을 찾는다.

(중지 조건: 단, 탐색 방향 d의 크기가 ε보다 작으면 탐색을 중지 한다.)

SLP(Sequential Linear Programming) 알고리즘의 요약

- **단계 1: k=0으로 둔다. $x^{(0)}$으로 설계 변수의 초기값을 추정한다. 또한 제약 조건의 위배 정도와 수렴 기준으로 작은 수 ε_1, ε_2의 적절한 초기값을 선정한다.**

- **단계 2: $x^{(k)}$에서 목적 함수, 제약 조건과 이들의 경사도 (gradient)를 계산한다.**

- **단계 3: $x^{(k)}$의 변화 범위(move limit) $\Delta x_{il}^{(k)}$, $\Delta x_{iu}^{(k)}$를 적절히 선정하고, 선형 계획 문제를 수학적으로 정의한다. 즉,**

$$\Delta x_{il}^{(k)} \le \Delta x_i^{(k)} \le \Delta x_{iu}^{(k)}$$

SLP(Sequential Linear Programming) 알고리즘의 요약

- 단계 4: 앞서 정의된 선형 계획 문제를 Simplex 방법으로 풀어 $d^{(k)}$를 구한다.

- 단계 5: 수렴 여부를 확인한다. 즉, $g_i \le \varepsilon_1 (i = 1 \text{ to } m)$, $|h_i| \le \varepsilon_1 (i = 1 \text{ to } p)$, 그리고 $\|d^{(k)}\| \le \varepsilon_2$인지 확인하여 그렇다면 현재의 $x^{(k)}$가 최적해라고 가정하고 종료한다. 그렇지 않다면 다음 단계로 간다.

- 단계 6: 새로운 설계 변수 $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$로, 반복 횟수 $k = k+1$로 수정하고 단계 2로 간다.

제약 최적화 문제의 선형화 (Linear Programming Problem)

$$\textit{Minimize} \quad f(\mathbf{x}^{(k)}+\Delta\mathbf{x}^{(k)}) \cong f(\mathbf{x}^{(k)})+\nabla f^{T}(\mathbf{x}^{(k)})\Delta\mathbf{x}^{(k)}$$

Taylor 급수의 1차항(선형항)만 고려한 목적 함수

$$\textit{Subject to} \quad h_j(\mathbf{x}^{(k)}+\Delta\mathbf{x}^{(k)}) \cong h_j(\mathbf{x}^{(k)})+\nabla h_j^{T}(\mathbf{x}^{(k)})\Delta\mathbf{x}^{(k)} = 0;\ j=1\ to\ p$$

Taylor 급수의 1차항(선형항)만 고려한 등호 제약 조건

$$g_j(\mathbf{x}^{(k)}+\Delta\mathbf{x}^{(k)}) \cong g_j(\mathbf{x}^{(k)})+\nabla g_j^{T}(\mathbf{x}^{(k)})\Delta\mathbf{x}^{(k)} \le 0;\ j=1\ to\ m$$

Taylor 급수의 1차항(선형항)만 고려한 부등호 제약 조건

여기서, $\bar{f} = f(\mathbf{x}^{(k)}+\Delta\mathbf{x}^{(k)}) - f(\mathbf{x}^{(k)}),\ e_j = -h_j(\mathbf{x}^{(k)}),\ b_j = -g_j(\mathbf{x}^{(k)}),$

$$c_i = \partial f(\mathbf{x}^{(k)})/\partial x_i,\ n_{ij} = \partial h_j(\mathbf{x}^{(k)})/\partial x_i,\ a_{ij} = \partial g_j(\mathbf{x}^{(k)})/\partial x_i,$$

$d_i = \Delta x_i^{(k)}$ 라고 가정하면

$$\textit{Minimize} \quad \bar{f} = \sum_{i=1}^{n} c_i d_i$$

$$\textit{Subject to} \quad \sum_{i=1}^{n} n_{ij} d_i = e_j;\ j=1\ to\ p$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} d_i \le b_j;\ j=1\ to\ m$$

여기서, $d_{il} \le d_i \le d_{iu}\ (\Delta x_{il}^{(k)} \le \Delta x_i^{(k)} \le \Delta x_{iu}^{(k)})$

Matrix form

$$\textit{Minimize} \quad \bar{f} = \mathbf{c}^{T}{}_{(1\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)}$$

: 선형화 된 목적 함수

$$\textit{Subject to} \quad \mathbf{N}^{T}{}_{(p\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)} = \mathbf{e}_{(p\times 1)}$$

: 선형화 된 등호 제약 조건

$$\mathbf{A}^{T}{}_{(m\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)} \le \mathbf{b}_{(m\times 1)}$$

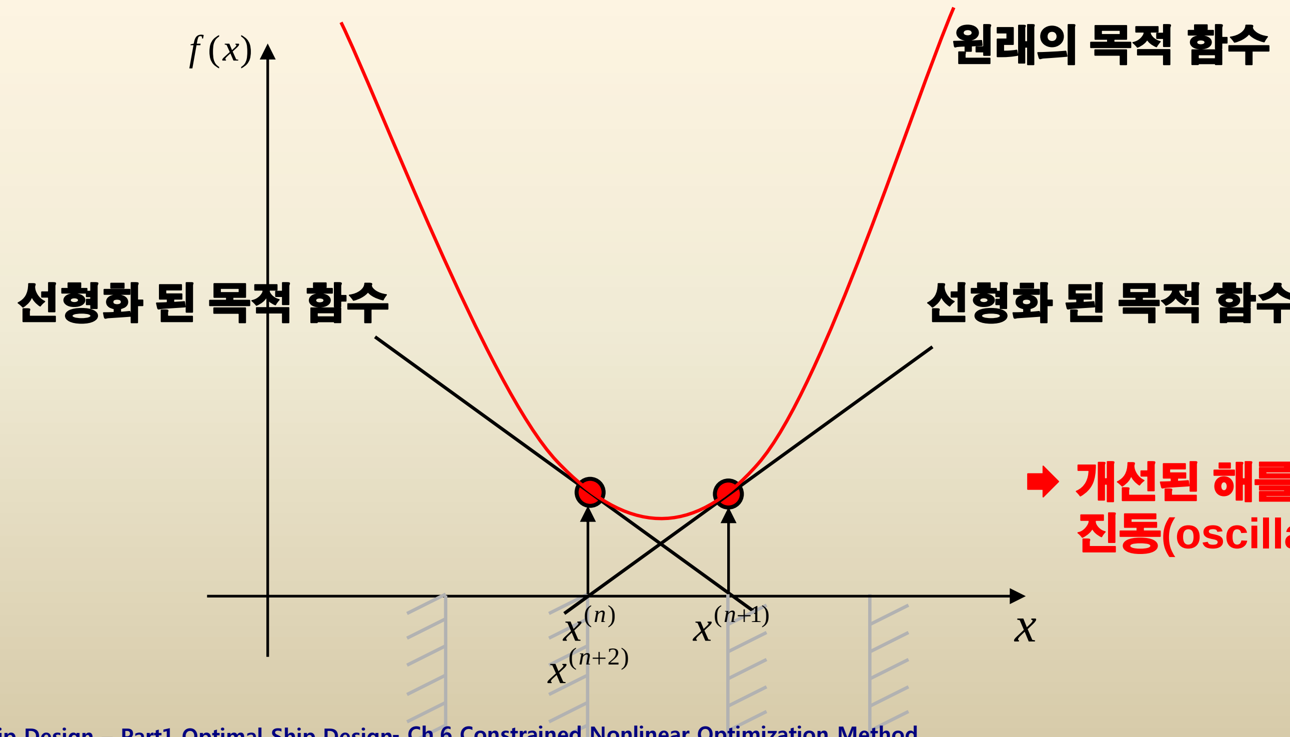
: 선형화 된 부등호 제약 조건

➡ 선형 계획 문제(Linear Problem)

➡ Simplex 방법을 이용해 해결 가능

SLP 방법의 한계점

- 설계 변수의 **변화 범위(move limit)**을 사용자가 주어야 함
- 설계 변수의 변화 범위가 작을 경우 최적해를 찾는 데에 많은 시간이 소요됨
- 반면, 설계 변수의 변화 범위가 클 경우 최적해를 못 찾을 수도 있음



➡ 개선된 해를 찾지 못하고 진동(oscillation)함