

"Buckling of Inelastic Columns"

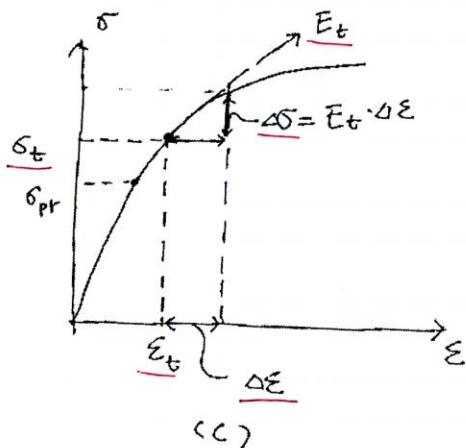
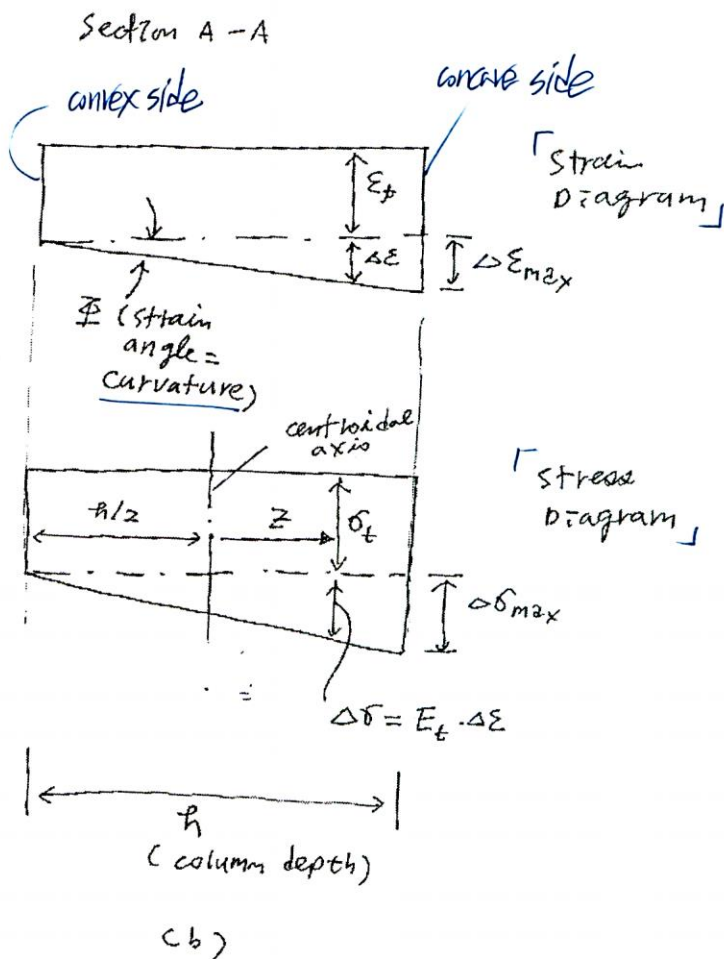
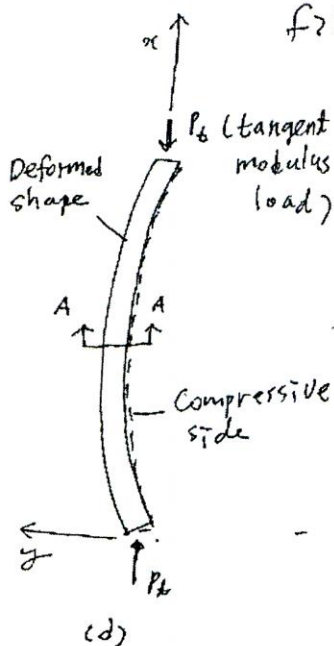
2.7.1 Tangent Modulus Theory (by Engesser in 1889)

①

* 기동가정 5가지 참조

4. 평면유지 가정 ← straight strain profile 가정

✓ 5. During bending, no strain reversal (i.e., unloading of fibers) occurs across the cross section of the column.



Note: i) σ_t and ϵ_t are, respectively, the stress and strain at the tangent modulus load before buckling.

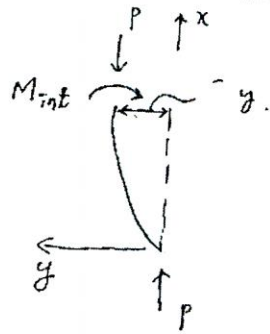
✓ ii) When the column buckles at the tangent modulus load, it is assumed that there is an increase in the axial load ΔP together with the bending moment ΔM .

→ tangent modulus theory에서 핵심은 이 부분이다. 기동가정 5가지 참조

↳ Overall increase in axial strain across the section, so that no strain reversal take place anywhere in the cross section

↳ As a result, the tangent modulus E_t will govern the stress-strain behavior of all fibers of the cross section.

Governing D. E (평형조건식) (정형변형조건식)



정형변형수준 벗어나면
 $M_{int} = EI y''$ 이
 근사해도 안 됨

$$\sum M = -M_{int} + Py = 0 \quad \dots (2.7.1)$$

(or $M_{int} = Py$)

$$M_{int} = \int_A \sigma z \cdot dA \quad \dots (2.7.2)$$

← 한 단면의 여러 부분이 서로 다른 σ 를 가짐

$$\sigma = \sigma(z) = \sigma_t + \Delta\sigma = \sigma_t + \frac{\Delta\sigma_{max}}{h} \times \left(\frac{h}{2} + z\right) \quad \dots (2.7.3)$$

← 알맞게 (b) z 를 $[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]$ variable

(2.7.3) → (2.7.2) 대입

$$M_{int} = \int_A \left[\sigma_t + \frac{\Delta\sigma_{max}}{h} \left(z + \frac{h}{2}\right) \right] z \, dA$$

$$= \sigma_t \int_A z \, dA + \frac{\Delta\sigma_{max}}{h} \int_A z^2 \, dA + \frac{\Delta\sigma_{max}}{2} \int_A z \, dA$$

$\int_A z \, dA = 0$ $\int_A z^2 \, dA = I$ $\int_A z \, dA = 0$

$$= \left(\frac{\Delta\sigma_{max}}{h}\right) \times I = \Delta M \quad \dots (2.7.8)$$

← 관성모멘트 이후에 분모인 h 에 상응

$\Delta\sigma_{max} = E_t \times \Delta\epsilon_{max}$ 이므로 (2.7.8) 식은,

$$M_{int} = -E_t \times \left(\frac{\Delta\epsilon_{max}}{h}\right) \times I$$

strain angle = curvature = Φ

따라서 $M_{int} = E_t I \Phi \quad \dots (2.7.9)$

$$= E_t I (-y'') \quad \dots (2.7.10)$$

(2.7.10) → (2.7.1) 대입 대입

$$E_t I y'' + Py = 0 \quad \dots (2.7.11)$$

the govern D.E. for an Inelastic column Note:

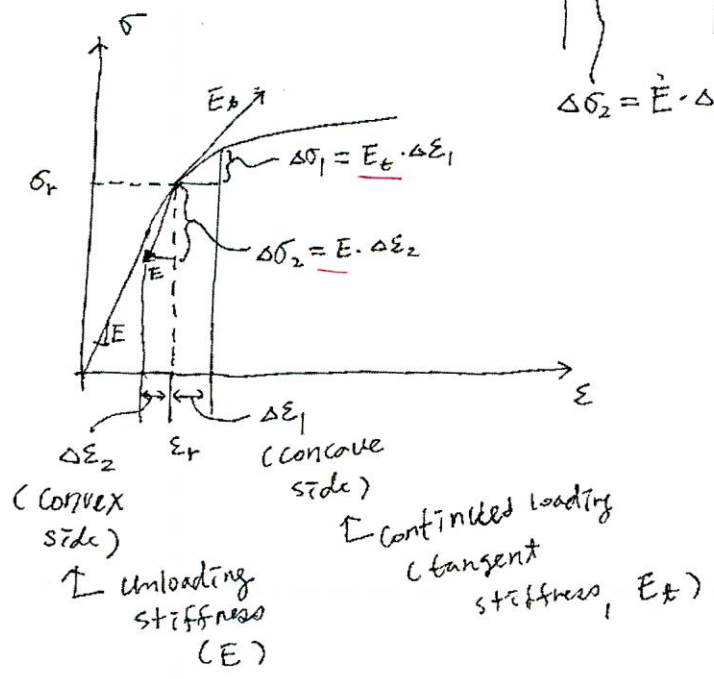
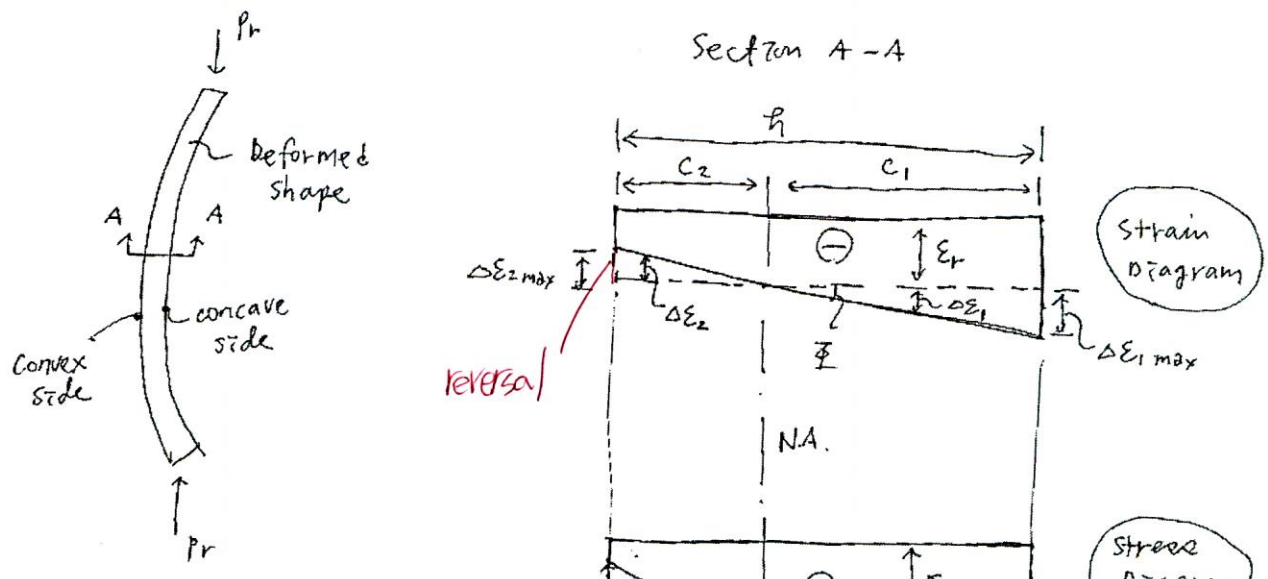
$$\therefore P_t = \frac{\pi^2 E_t I}{L^2} \iff P_e = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \quad \left. \right\} P_t = \frac{E_t}{E} \times P_e$$

← effective modulus = tangent modulus ← cross section shape은 E_t 에

2.7.2 Double Modulus Theory (= Reduced Modulus Theory)

↳ by Engesser in 1895 based on the concept given by Considere.

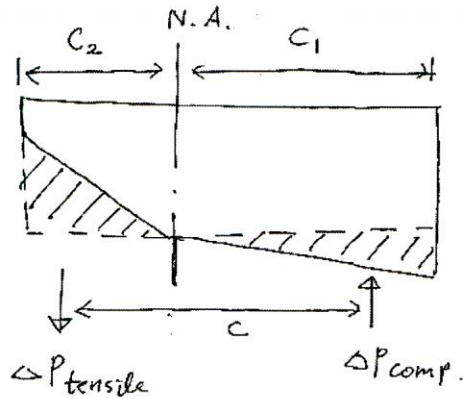
- ★ tangent modulus theory의 5개 가정 가운데 처음 4개는 동일하되, 5번째 가정은 다음과 같이 수정됨.
- 5. The axial force is assumed to remain constant during buckling; consequently the bending deformation at buckling will cause strain reversal on the convex side of the column. The strain on the concave side of the column, on the other hand, continues to increase.



평형 방정식 ;
(governing D.E.)

$$-M_{int} + Py = 0 \quad \dots (2.7.13)$$

"유사한 과정을 통하여
M_{int} vs. P 관계식을
유도하면 될 것임"



51번과
가장미의
이동

$$\Delta P = \Delta P_{comp.} - \Delta P_{tensile} = 0 ; \Delta P_{comp.} = \Delta P_{tensile} \quad \text{--- (2.7.14)}$$

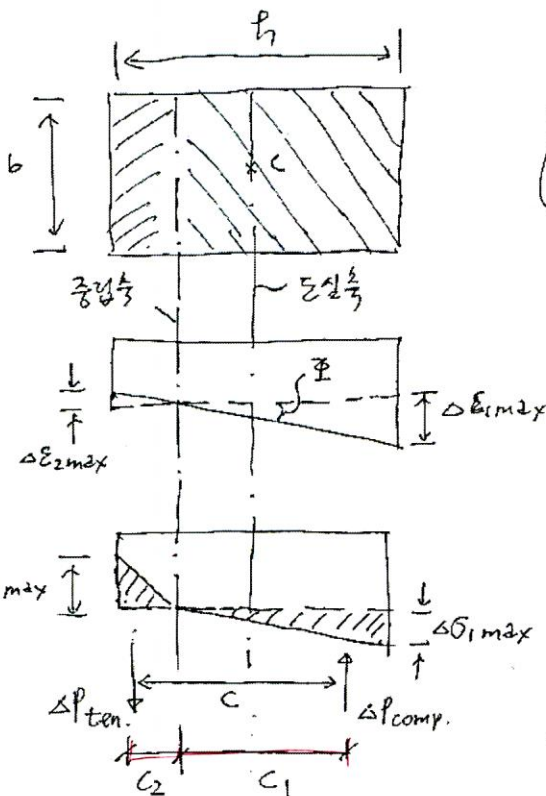
Internal couple 병합

$$M_{int} = \Delta P_{comp} \times c (= \Delta P_{tensile} \times c) \quad \text{--- (2.7.15)}$$

moment arm 의 크기

ΔP_{comp.} 및 ΔP_{tensile} 의 평면 상의 위치와
관련되므로 cross section 의 모양이
차이가 없어야 M_{int} 를 산정할 수 있음

c:) Rectangular cross section



$$\Delta P_{comp.} = \frac{\Delta \sigma_{1max}}{2} \times (bc_1) \quad \text{--- (16a)}$$

$$\Delta P_{tensile} = \frac{\Delta \sigma_{2max}}{2} \times (bc_2) \quad \text{(16b)}$$

Equating these two,

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\Delta \sigma_{2max}}{\Delta \sigma_{1max}} \quad \text{--- (18)}$$

$$\Delta \sigma_{1max} = E_t \times \Delta \epsilon_{1max} = E_t \times c_1 \times \Phi \quad \text{--- (19)}$$

$$\Delta \sigma_{2max} = E \times \Delta \epsilon_{2max} = E \times c_2 \times \Phi \quad \text{--- (20)}$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\Delta \sigma_{2max}}{\Delta \sigma_{1max}} = \frac{E \times c_2 \times \Phi}{E_t \times c_1 \times \Phi}$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^2 = \left(\frac{E}{E_t} \right) \quad \text{--- (21)}$$

$$c_1 + c_2 = h \quad \text{--- (22)}$$

중립축

242

양자
변형하중
c₁, c₂를
구하면

$$C_1 = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_t}} \times h \quad \text{--- (23)}$$

$$C_2 = \frac{\sqrt{E_t}}{\sqrt{E} + \sqrt{E_t}} \times h \quad \text{--- (24)}$$

(23), (19) $\times \frac{2}{3}$ (16a) $\times \frac{2}{3}$ 이 더하면

$$\begin{aligned} \Delta P_{\text{comp.}} &= \frac{1}{2} (E_t \Phi + E C_1^2) \\ &= \left(\frac{1}{2} b h^2 \right) \times \frac{E E_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2} \Phi (= \Delta P_{\text{tensile}}) \quad \text{--- (25)} \end{aligned}$$

$$C = \frac{2}{3} C_2 + \frac{2}{3} C_1 = \frac{2}{3} (C_1 + C_2) = \frac{2}{3} h \quad \text{--- (26)}$$

$$\begin{aligned} M_{\text{int}} &= \Delta M \\ &= \Delta P_{\text{comp}} \times C = \left(\frac{b h^3}{3} \right) \times \frac{E E_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2} \Phi \\ &= \left(\frac{b h^3}{12} \right) \times \left(\frac{4 E E_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2} \right) \times \Phi \quad \text{--- (28)} \\ &\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_I \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{\bar{E}_r \text{ (reduced modulus for "rectangular" section)}} \end{aligned}$$

For a small deflection,

$$M_{\text{int}} = \bar{E}_r I \Phi = -\bar{E}_r I y'' \quad \text{--- (32)}$$

(2.7.13) $\times \frac{2}{3}$,

$$\bar{E}_r I y'' + P y = 0 \quad \text{--- (33)}$$

$$\therefore P_t = \frac{\pi^2 \bar{E}_r I}{L^2} = \frac{\bar{E}_r}{E} \times P_{\text{Euler}} \quad \text{--- (34)}$$

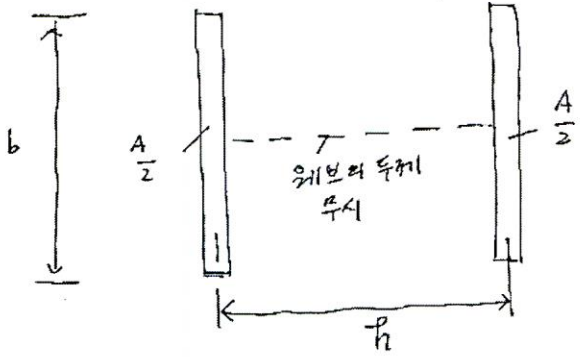
reduced
modulus

load \uparrow

재질의 성질 (E_t) 뿐만 아니라
column의 단면의 형상에도
영향을 받는다.

(ii) Idealized I section

HW # (교과서 연습문제 2.12)



$$\bar{E}_r = \frac{2\bar{E}E_t}{E + \bar{E}_t} \text{ 가 될 수 있음}$$

모양 것.

↳ (1)번이름 대위

Note:
$$\bar{E}_r - \bar{E}_t = \frac{2\bar{E}E_t - \bar{E}_t(E + \bar{E}_t)}{E + \bar{E}_t} = \frac{E\bar{E}_t - \bar{E}_t^2}{E + \bar{E}_t}$$

(Idealized I section 에 대해)

$$= \frac{\bar{E}_t(E - \bar{E}_t)}{E + \bar{E}_t} > 0 ; \underline{\bar{E}_r > \bar{E}_t}$$

$$E - \bar{E}_r = \frac{E(E + \bar{E}_t) - 2\bar{E}E_t}{E + \bar{E}_t} = \frac{E^2 - 2\bar{E}E_t}{E + \bar{E}_t}$$

$$= \frac{E(E - \bar{E}_t)}{E + \bar{E}_t} > 0 ; \underline{E > \bar{E}_r}$$

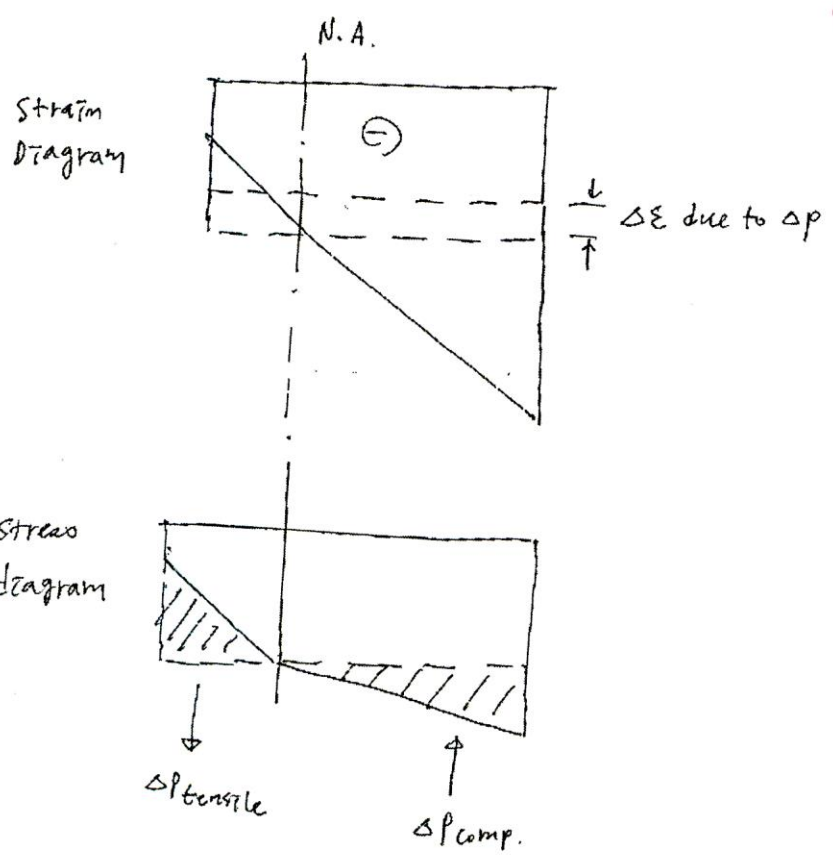
따라서
$$\bar{E}_t < \bar{E}_r < E \rightarrow P_t < P_r < P_e$$

2. 7. 3 Shanley's Inelastic Column Theory

↳ one page paper (1947년)

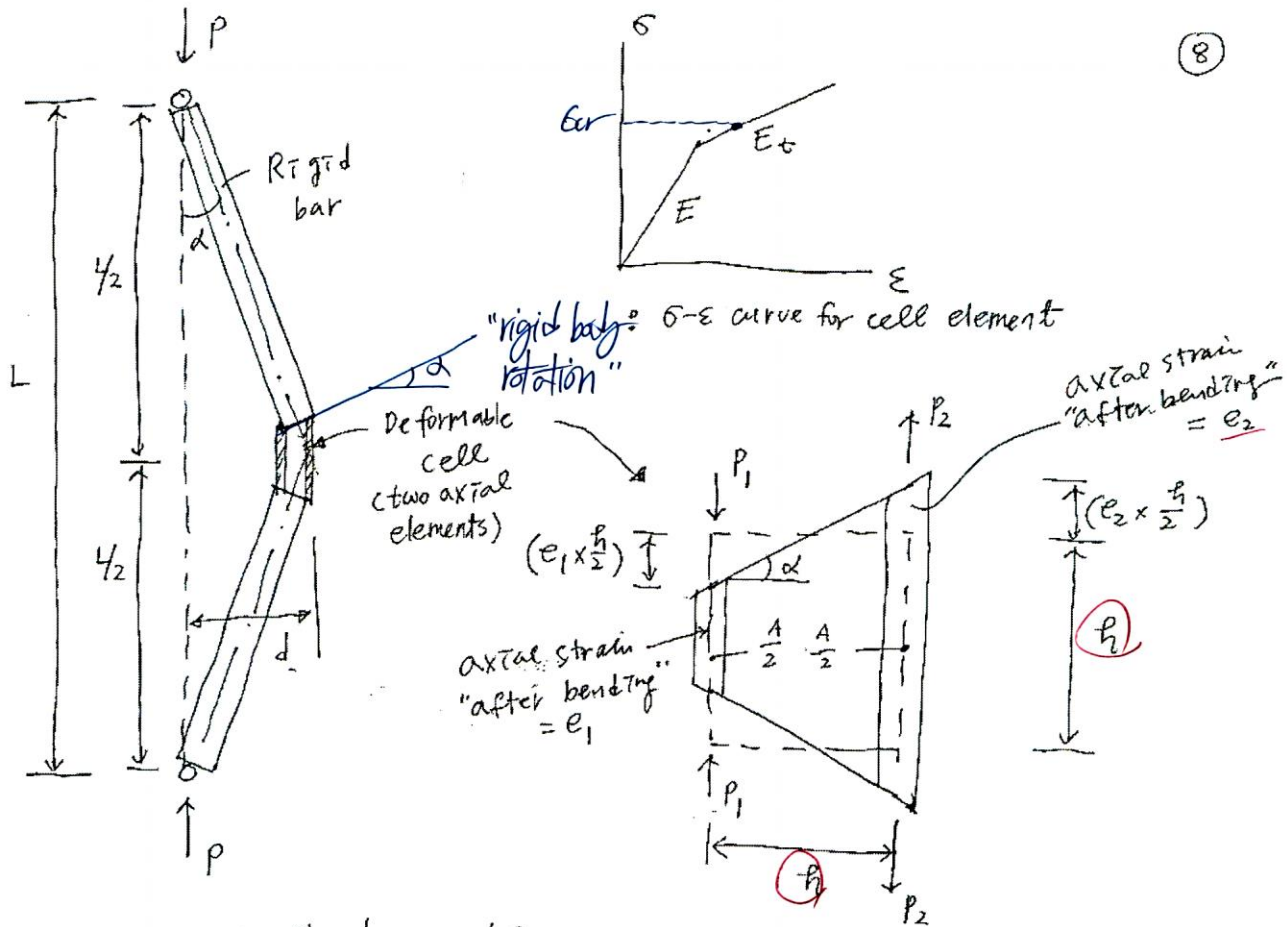
⑦
 항재가성의
 inelasticity를
 "lumping"

- ① A simplified column model is used to explain the postbuckling behavior of an inelastic column. ← two rigid bars + a deformable cell (Fig. 2.33)
- ② It is assumed in Shanley's inelastic column theory that buckling is accompanied simultaneously by an increase in the axial force. Thus, at any instant as the column buckles, the net increase in the axial force is not zero as postulated in the reduced modulus theory.
- ③ The magnitude of this increase in axial force is such that strain reversal may occur at the convex side of the column.



「tangent/reduced modulus 이론과 같은점/다른점」
 ↓
 「비탄성 영역이 양방향으로 축력의 증가/감소를 유발할 수 있다!」

* $\Delta P = \Delta P_{comp.} - \Delta P_{tensile} \neq 0$
 : Shanley 비탄성성기동 이론의 기본정리



: Shanley model

↳ 모든 변형 가능한 부분을 2개의 축방향 요소에 응축시켜서, 실제 기둥에서 나타나는 재축 및 변형 각각 방향의 복귀하는 재축 특성의 변형을 고려치 않고 (우회적으로) 근사적 해석해는 일관적 하한 모델임을 알 수 있음. (postbuckling 영역의 거동이 같은) **이것이 일반적 좌측!**

$$d \approx \left(\frac{L}{2}\right) \times \alpha \quad \text{--- (1)}$$

$$\tan \alpha \approx \alpha = \frac{(e_1 \times \frac{L}{2}) + (e_2 \times \frac{L}{2})}{h} = \frac{1}{2} (e_1 + e_2) \quad \text{--- (2)}$$

(2) → (1) 이니

$$d = \frac{L}{4} (e_1 + e_2) \quad \text{--- (3)}$$

변형 상태이시 평형 조건을 만족해야 하므로

$$M_e = P \times d = \frac{PL}{4} (e_1 + e_2) \quad \text{--- (4)}$$

deformable cell의 크기는 h x h 인 작은 정사각형
 ← Kinematics
 ← Equilibrium Eq.
 단, 좌측에 관계없이 상단

cell 요소의 축력 P_1, P_2 는 e_1, e_2 에 대응되는 것이라서
 기둥이 bent form 으로 변형할 때 따라 발생하는 변형률을 표시한 것이다.
 두 축력 요소의 유효영계수는 E_1, E_2 라고 하면,

$$P_1 = (E_1 e_1) \left(\frac{A}{2}\right), P_2 = (E_2 e_1) \left(\frac{A}{2}\right) \quad \text{--- (5)}$$

cell 내에서의 모멘트는

$$M_c = (P_1 \times \frac{h}{2} + P_2 \times \frac{h}{2}) = \frac{h}{2} (P_1 + P_2)$$

$$\text{internal} = \frac{hA}{4} (E_1 e_1 + E_2 e_2) \quad \text{--- (6)}$$

(4) 식과 (6) 식을 이용하여 모멘트 평형관계식을 구성하면 Bent Form 상태의 평형관계식

$$\frac{PL}{4} (e_1 + e_2) = \frac{hA}{4} (E_1 e_1 + E_2 e_2)$$

$M_e \qquad \qquad \qquad M_c$



$$\therefore P = \left(\frac{hA}{L}\right) \left(\frac{E_1 e_1 + E_2 e_2}{e_1 + e_2}\right) \quad \text{--- (7)}$$

만일 tangent modulus 이론이 적용을 취한다면 (no strain reversal)
 → 흠이 시작될 때 전면에서 어느 곳도 변형도 역전을 안 한다.
 → $E_1 = E_2 = E_t$
 따라서 (7) 식은 $P_t = \frac{E_t A h}{L} \quad \text{--- (8)}$

우선 inelastic buckling이 관해됨.

(가) Postbuckling 영역에서 거동 (즉 P-d 관계) 관찰

→ 일정한 하중이 도달한 이후 기둥이 후변형에 따라 축력 P가 증가되는 것인 가함

$$\rightarrow \begin{cases} E_1 = E_t & \text{--- (9)} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} E_2 = E \text{ 또는 } E_t & \text{--- (10)} \end{cases}$$

→ convex side에서 변형은 원래의 방향을 유지하기 때문

$$\tau \equiv \frac{E_2}{E_t} \quad \text{--- (11) } \checkmark$$

(9) → (11)에 대입

$$\begin{aligned}
 P &= \left(\frac{qA}{L}\right) \left(\frac{E_t e_1 + E_2 e_2}{e_1 + e_2} \right) \\
 &= \left(\frac{qAE_t}{L}\right) \left(\frac{e_1 + \left(\frac{E_2}{E_t}\right)e_2}{e_1 + e_2} \right) \\
 P_t &= \left(\frac{AE_t}{L}\right) \left(\frac{e_1 + \tau e_2}{e_1 + e_2} \right) \quad \text{--- (12)}
 \end{aligned}$$

(3) 식이 $e_1 = \left(\frac{4d}{L} - e_2\right)$ 이므로 이것을 (12)식에 대입하여,

$$P = P_t \times \left[1 + \frac{L}{4d} (\tau - 1) e_2 \right] \quad \text{--- (13)}$$

← $\left[\begin{array}{l} \text{보편로 평형하} \\ \text{관속 } M_c = M_t \text{ 이기} \\ \text{어떤 것일.} \end{array} \right]$

(13) 식이 e_2 를 d 로 사용하여 풀이하게 되면
 적당한 P - d 관계식이 얻어질 것임.

↳ "A second expression for P " 이용 ← $\Sigma Y_c = 0$ 이용
 ($\Delta P_c = \Delta P_t$)

이제 가정된 바와 같이 기둥의 윗부분의 하중 P 는 증가한다.
 만약 기둥의 윗부분이 tangent modulus load에 도달시에 시작되는 것임
 (증가하중) 가정하면,

$$P = P_t + \Delta P \quad \text{--- (14)}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta P &= P_1 - P_2 = \frac{e_1 E_1 A}{2} - \frac{e_2 E_2 A}{2} = \frac{e_1 E_t A}{2} - \frac{e_2 E_2 A}{2} \\
 &= \frac{AE_t}{2} (e_1 - \tau e_2) \quad \text{--- (15)}
 \end{aligned}$$

(15) 식이 e_1 를 제거해버리므로 (3) 식이 $e_1 = \frac{4d}{L} - e_2$ 을 대입

$$\Delta P = \frac{AE_t}{2} \left\{ \frac{4d}{L} - (\tau + 1) e_2 \right\} \quad \text{--- (15)}$$

$\Sigma Y_c = 0$ 이기 때문

그러나 (14) 식은

$$P = P_t + \Delta P = P_t + \frac{AE_t}{2} \left\{ \frac{4d}{L} - (\tau + 1) e_2 \right\}$$

$$= P_t \left[1 + \left(\frac{AE_t}{2P_t} \right) \left\{ \frac{4d}{L} - (\tau + 1) e_2 \right\} \right] \quad \text{--- (16)}$$

$$\frac{AE_t}{2} \times \left(\frac{L}{E_t A} \right) = \frac{L}{2d}$$

the second expression for P

(11)

$$P = P_t \left[1 + \frac{L}{2d} \left\{ \frac{4d}{L} - (\tau+1)e_2 \right\} \right] \quad \dots (16)$$

(13) 식과 (16) 식을 등치시켜서 '거북한 변위' e_2 를 '단단한 변위' 들로 풀이하면,

$$e_2 = \left\{ \frac{4d}{L(\tau-1)} \frac{1}{\left(\frac{\tau}{2d}\right) + \frac{\tau+1}{\tau-1}} \right\} \quad \dots (17)$$

(17) 식을 (16) 식에 대입하여 정리하면 유도한 P-d 관계식이 다음과 같이 얻어짐.
"post-buckling behavior"

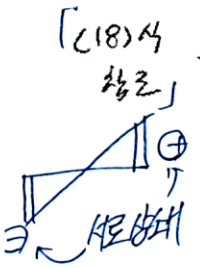
$$P = P_t \left[1 + \frac{1}{\left(\frac{\tau}{2d}\right) + \left(\frac{\tau+1}{\tau-1}\right)} \right] \quad \dots (18)$$

note : $\tau = \frac{E_2}{E_t}$ E or E_t (Shanley 현상에서는 의미가 없음) \rightarrow P 이후를 취함

(18) 식 근삿값 :

(1) 앞에서 가정할 바와 같이 Shanley 기동은 tangent modulus load에서 후기 시작한다. 즉 $P = P_t$ when $d = 0$.

(2) d가 증가함에 따른 P 값의 변동을 τ 값이 영향을 받는다. 만일 $\tau > 1$ 이면



(18) 식 참조
변형도 역점이 없다면 $E_2 = E_t \rightarrow \tau = 1$ 이 되어, 기동이 후기라도 P 값은 일정 값 P_t 이 머물러야 한다. 그러나 $\tau > 1$ 이면 일정 후속하중의 후변형은 반드시 변형도 역점이 수반되어야 한다. (또한) 그러나 변형도 역점이 없다면 가정을 논리적으로 타당치 않다. (또한) 변형도 역점을 가정하면 $\tau = E/E_t > 1$ 이 되고, d가 증가함에 따라 P도 P_t 이상으로 증가하게 된다.

(3) P의 상계 (upper bound) 는 P_r (the reduced modulus load) 이라 \hookrightarrow 즉 $d \gg h$ 일때.

reduced modulus theory의 기본 가정을 일정한 중하이하이하
 1/2이 비등속 하중을 갖는 것이므로, ...

$$P_1 = P_2 ; \left(\frac{A}{L}\right) E_1 e_1 = \left(\frac{A}{L}\right) E_2 e_2$$

$$\text{따라서 } e_2 = e_1 \times \frac{E_1}{E_2} = e_1 \times \frac{E_t}{E} = \frac{e_1}{\tau} \quad \text{--- (*)}$$

concave
convex
↓ kinetics

(3) 하이하, $e_2 = \frac{4d}{L} - e_1 \quad \text{--- (**)}$

(*), (**) 하이하 e_1 을 소거하하면,

$$e_2 = \frac{4d}{L} \left(\frac{1}{1+\tau}\right) \quad \text{--- (***)}$$

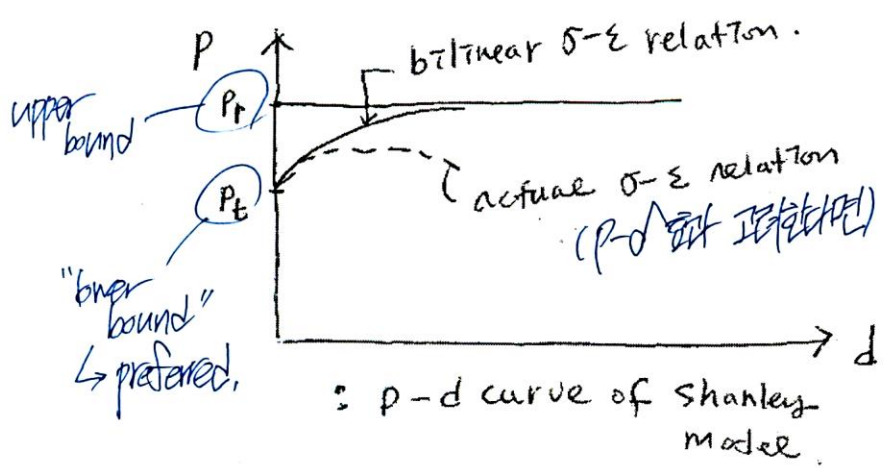
(***) → (3) 하이하 하이하 하이하 하이하

$$P_r = P_t \left[1 + \frac{L}{4d} (\tau - 1) \times \frac{4d}{L} \left(\frac{1}{1+\tau}\right) \right]$$

$$= P_t \left[1 + \frac{\tau - 1}{\tau + 1} \right] \quad \text{--- (*)}$$

Note: $P = P_t \left[1 + \frac{1}{\left(\frac{d}{4d}\right) + \left(\frac{\tau + 1}{\tau - 1}\right)} \right]$

$$\doteq P_t \left[1 + \frac{\tau - 1}{\tau + 1} \right] = P_r \quad \text{when } d \gg h.$$



교과서 P. 106 ~ 108 참조
 (권완득)
 "HW 볼 것"

"2-8 ~ 2-11 쪽 보충과제"

2.8 Design curves for aluminum columns

tangent modulus concept 을 적용하기
중요하기

이제부터 σ - ϵ curve 는 "이차곡선" 이

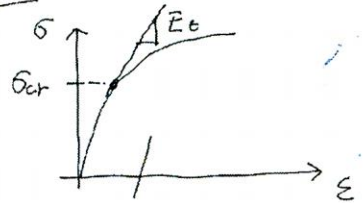
필수하기 용이
(탄성-비탄성 영역을 single equation 으로 풀기 가능) \rightarrow Ramberg-Osgood equation

A column curve : a curve that gives the critical buckling load or critical buckling stress (σ_{cr}) of a column as a function of its slenderness ratio.

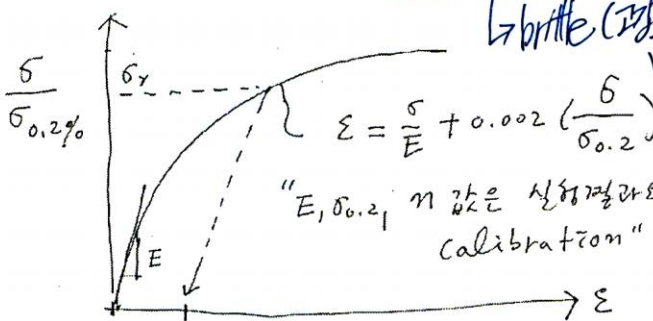
$$P_t = \frac{\pi^2 E_t I}{(KL)^2} \quad ; \quad \frac{P_t}{A} = \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{\left(\frac{KL}{r}\right)^2} \quad (2.8.3)$$

a function of σ_{cr}

From tangent modulus theory
Aluminum alloys



(항복점의 불명확, no decided yield plateau)



\rightarrow brittle (취성소재)

\rightarrow ASCE Paper (2002) stress σ 를 $\sigma_{0.2}$ 로 대체하여 풀기 가능

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + 0.002 \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0.2}} \right)^m \quad (2.8.4)$$

"E, $\sigma_{0.2}$ " 이 값은 실험결과와 calibration

\rightarrow 74206 6061-T6

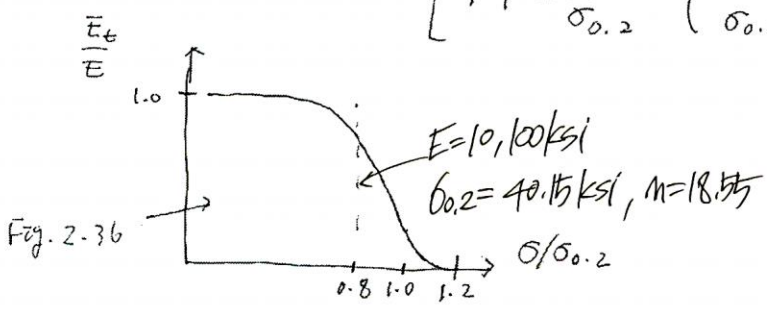
$$\begin{cases} m = 18.55 \text{ (경험적 파라미터)} \\ E = 10,100 \text{ KSI} \approx \frac{1}{3} E_s \\ \sigma_{0.2} = 40.15 \text{ KSI} \end{cases}$$

0.2% offset
: Fig. 2.35 (P.110)
Recall: 0.2% offset method.
(2.8.4) 식의 항복점을 ϵ 로 미분,

$$1 = \frac{1}{E} \cdot \frac{d\sigma}{d\epsilon} + (0.002 m) \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0.2}} \right)^{m-1} \left(\frac{1}{\sigma_{0.2}} \cdot \frac{d\sigma}{d\epsilon} \right)$$

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} \equiv E_t = \frac{E}{\left[1 + \frac{0.002 m E}{\sigma_{0.2}} \left(\frac{\sigma}{\sigma_{0.2}} \right)^{m-1} \right]} \quad (2.8.5)$$

\rightarrow 'E'가 좌변에
있다?



To plot the column curve (for this aluminum alloy),

- (i) Pick a value of $\sigma = \sigma_{cr}$.
- (ii) Obtain E_t from Eq. (2.8.5)
- (iii) Calculate the corresponding slenderness ratio using Eq. (2.8.3).

"Lucky, explicit form"

$$\sigma_{cr} \rightarrow \left(\frac{KL}{r}\right) = \pi \sqrt{\frac{E_t}{\sigma_{cr}}} \quad (\text{in this particular case})$$

$$= \pi \times \left[\frac{E/\sigma_{cr}}{1 + \frac{0.002mE}{\sigma_{0.2}} \left(\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_{0.2}}\right)^{n-1}} \right]^{1/2} \quad \dots (*)$$

elastic buckling stress level \rightarrow Fig 2.37 이 근거

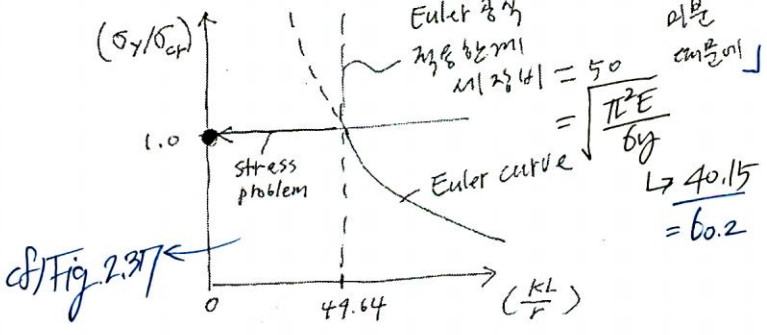
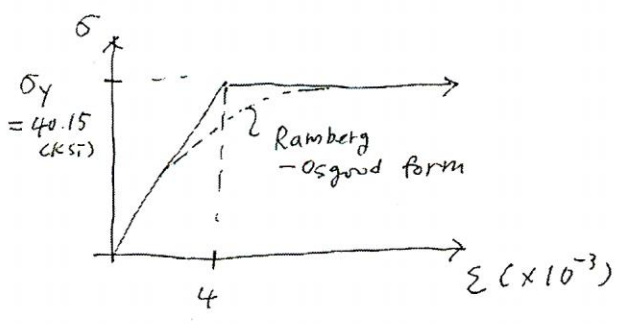
(*)에서 분모

균분안타레 2항은 nonlinear effect를 반영하는 항임을 알 수 있음!

elastic buckling stress level $\sigma_{cr} = 0.50 \sigma_{0.2}$ 인 경우, $\left(\frac{KL}{r}\right)_{0.50 \sigma_{0.2}} = \pi \times \left[\frac{503}{1 + 4.86 \times 10^{-5}} \right]^{1/2} = 70.4$
 \rightarrow 0.50 항 무시할 수 있음

inelastic buckling stress level $\sigma_{cr} = \sigma_{0.2}$ 인 경우, $\left(\frac{KL}{r}\right)_{\sigma_{0.2}} = \pi \times \left[\frac{252}{1 + 9.33} \right]^{1/2} = 15.5$
 \rightarrow 0.50 항 무시 불가

Note: σ - ϵ 곡선을 "bilinear"로 근사시 : extremely sensitive to the shape of σ - ϵ curve.



Elastic range: $E_t = E = 40.15 \div (4 \times 10^{-3}) = 10038 \text{ (kpsi)}$

yielding stress level: $E_t = 0$ ($\sigma_{cr} = \sigma_y$ level)

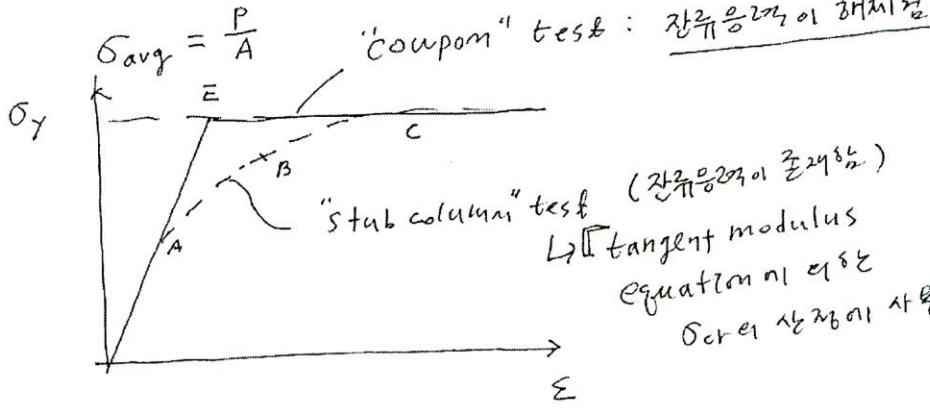
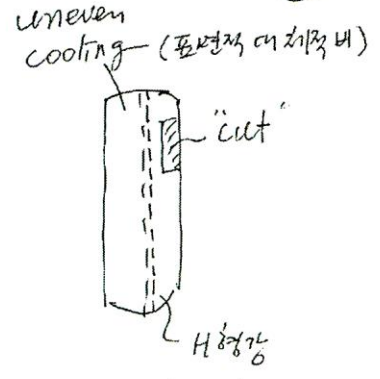
$$\left(\frac{KL}{r}\right) = \pi \sqrt{\frac{E_t = E}{\sigma_{cr}}} \rightarrow \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{KL}{r}\right)^2}$$

$$\left(\frac{KL}{r}\right) = \pi \times \sqrt{\frac{E_t = 0}{\sigma_{cr} = \sigma_y}} = 0$$

$\rightarrow \sigma_{cr} = \sigma_y$ 이기 위해서는 $\pi^2 E$ 가 0이 되어야 함 (불가능) \rightarrow Euler buckling stress level

2.9 "Stub column" σ - ϵ curve

(3)



정확히는 "Stub column with a compact section"

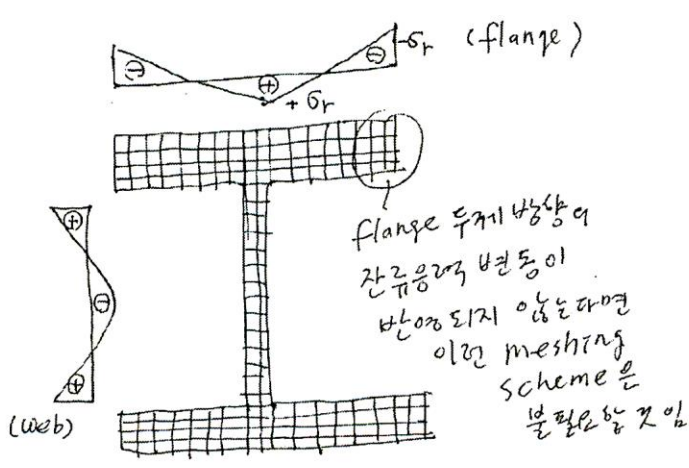
"coupon" test : 장극응력의 해시됨
 "Stub column" test (장극응력이 존재함)
 ↳ tangent modulus equation이 아닌 σcr의 산정이 사용됨

Note: 앞면 H형강의 제각각의 residual stress
 ↳ 생생 기제. 및 영향
 ↳ 고려서 Fig. 2-39, 40 참조

yielding over the cross section with residual stress is a gradual process. The σ - ϵ curve of a stub column follows the rather smooth curve ABC due to this gradual yielding process.

Note : numerical stub column σ - ϵ curve (고려서 2.9.2쪽)
 ↳ 장극응력 발현을 "initial stress"로 부라하고 strain을 증분시켜가면서 σ - ϵ curve를 구할 수 있음

↳ E_t 를 구해서 tangent modulus load의 미분이 사용되기 쉬움.

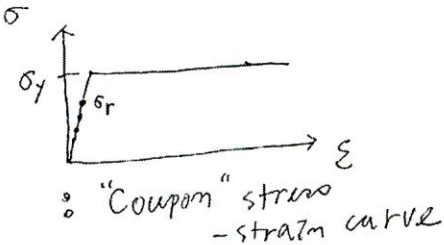


procedure to generate the stub σ - ϵ curve numerically

A_j^e = area of the j th element
 A_{el} = area of "still elastic" element

Discretization of cross section

Step 1: Specify $\Delta \epsilon^i$ (-ve quantity) at the i th node. a compressive strain increment



Step 2: Compute $\Delta \sigma^i = E \Delta \epsilon^i$ for every "still elastic" element
 stress increment

Step 3: Calculate the current state of stress σ^i for every "still elastic" element.

$$\sigma^i = \sigma_r + \frac{\sum \Delta \sigma^i}{\text{이전 cycle의 응력증분치를 총 누적한 것을 타비 특정 한도에 부러진 값증분력}}$$

Step 4: Check whether or not a particular element has yielded.

a. If $|\sigma^i| = \sigma_y$, the element has yielded. Subtract the area of this j th element (A_j^e) from the area of the cross section that is still elastic,

실제론
tolerance 를 인정해야 할 것임

$$\frac{|\sigma^i - \sigma_y|}{\sigma_y} \leq 0.01 \text{ 등}$$

$$A_{el}^i = A_{el}^{i-1} - A_j^e$$

current cycle previous cycle

Proceed to the next element.

b. If $|\sigma^i| < \sigma_y$, this element is still elastic. Proceed to the next element.

c. If $|\sigma^i| > \sigma_y$, the state of stress of this element is larger than σ_y .

이것은 yield surface 를 벗어난 over-shoot 이 생김

Scale down the strain increment $\Delta \epsilon^i$ by a factor r ,

$$r = \frac{\sigma_y - \sigma^{i-1}}{\Delta \sigma^i}$$

$$\Delta \epsilon_{target}^i = \frac{\sigma_y - \sigma_{max}^{i-1}}{E} \approx \text{자라야만 이점 정도가 옳은 것임, 앞감라를 인정}$$

Go to step 2 with $\Delta \epsilon^i$ replaced by $r \Delta \epsilon^i$.

Step 5: Calculate the load increment Δp^i corresponding to $\Delta \epsilon^i$.

$$\Delta p^i = \Delta \sigma^i \times A_{el}^i = E \Delta \epsilon^i A_{el}^i \quad \dots (*)$$

Step 6: Calculate the "average" stress increment $\Delta \bar{\sigma}_{av}^i$ at the end of the i th cycle.

$$\Delta \bar{\sigma}_{av}^i = \frac{\Delta p^i}{A} \quad \dots (**)$$

"whole" area of the cross section

Step 7 : Evaluate the current state of average stress of the cross section.

$$\sigma_{av}^i = \sigma_{av}^{i-1} + \Delta \sigma_{av}^i$$

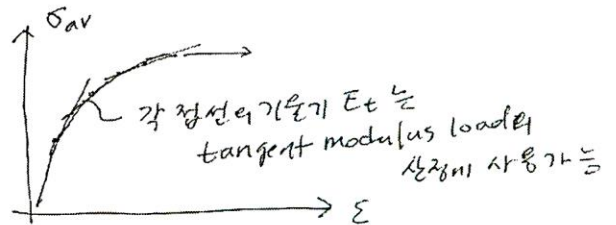
Step 8 : Evaluate the current state of strain of the cross section.

$$\epsilon^i = \epsilon^{i-1} + \Delta \epsilon^i$$

이상의 과정을 반복하며 전단면의 항복이 이르기까지

($\epsilon^i, \sigma_{av}^i$) 쌍을 얻을 수 있음

Steps 7, 8



Note : (\bar{E}_t) = ($\frac{A_{el}^i}{A}$) x E 이 관계를 이용하여 부속강으로 얻을 수 있음.

$$\Delta P^i = A \times \Delta \sigma_{av}^i \leftarrow \text{④} \text{ 쪽의 } (*) \cdot \text{ 밑 } (***) \text{ 가 항등}$$

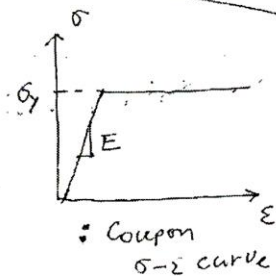
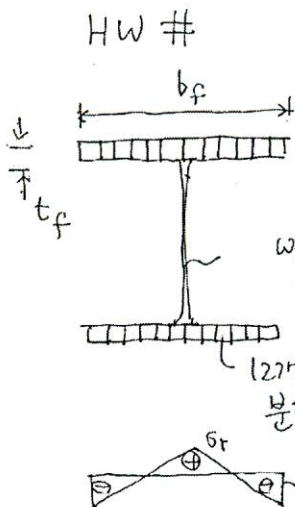
$$= A_{el}^i \times (E \Delta \epsilon^i)$$

$$\frac{\Delta \sigma_{av}^i}{\Delta \epsilon^i} = \left(\frac{A_{el}^i}{A} \right) E$$

↑ average stress - strain curve의 기울기 이 항등, 곧 E_t 가 됨.

원래의 axial stiffness = EA
 부분적으로만 응력 전달을 위한 effective axial stiffness = A_{el}E
 $= \left(\frac{A_{el}}{A} \right) AE$
 $= \left(\frac{A_{el}}{A} E \right) \times A$

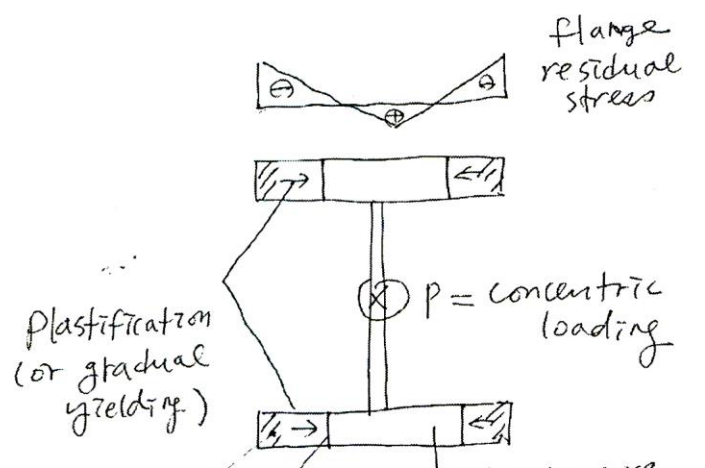
Effective modulus of elasticity = tangent modulus



- (1) $\sigma_{avg} - \epsilon$ curve (or stub column $\sigma - \epsilon$ curve) 를 numerically 작성할 것
- (2) tangent modulus method의 경우 curve 를 작성할 것
column
- (3) "이장벽"에 대한 $\sigma_{avg} - \epsilon$ curve 를 작성할 것

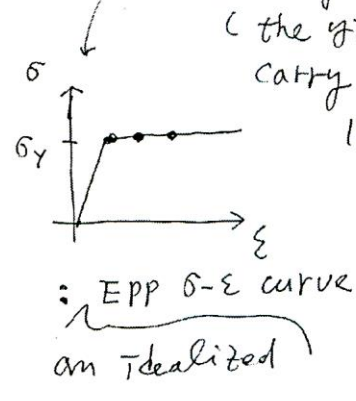
2.10 Column curves of idealized I-section $\frac{h}{b}$

↳ 「유연한 강재는 아니므로」
 ↳ 「강성강재」
 Beam LTB
 is not C.H. LTB



Plastification (or gradual yielding)

「Only the elastic part of the cross section will provide the flexural rigidity to the column as it buckles」



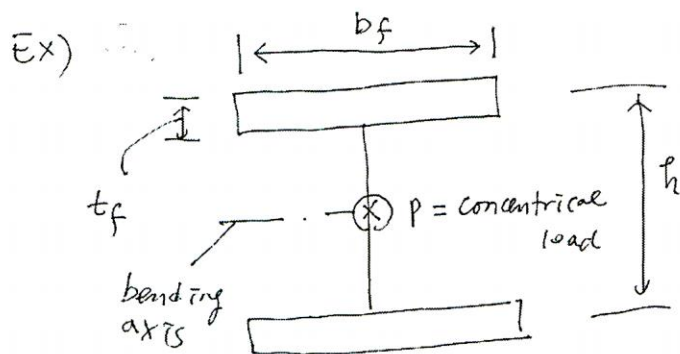
(the yielded portion cannot carry any additional load)

Based on this argument, the critical load of the "inelastic" column can be written as

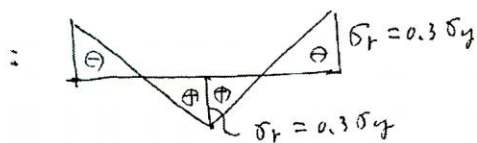
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I_e}{(KL)^2}$$

$$= \left(\frac{\pi^2 E I}{KL} \right) \left(\frac{I_e}{I} \right) = \underline{\underline{\left(\frac{I_e}{I} \right) \times P_{Euler}}}$$

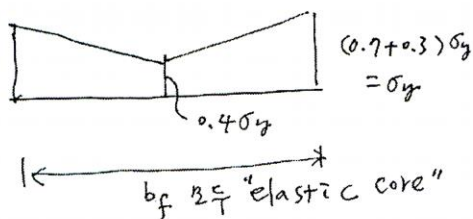
2.10 Column Curves of Idealized I-Section $\frac{h}{2}$ (web $\frac{b_f}{2}$)



Residual stress (linear 분포 가정)



(i) $P \leq (2t_f b_f) \times \frac{(\sigma_y - \sigma_r)}{0.7 \sigma_y}$
 $\sigma \leq 0.7 \sigma_y$ 인 경우

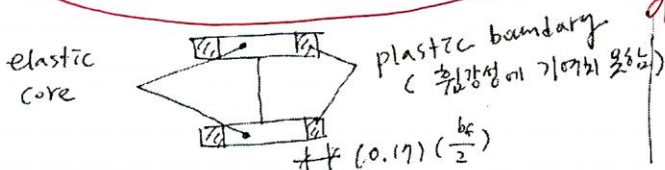
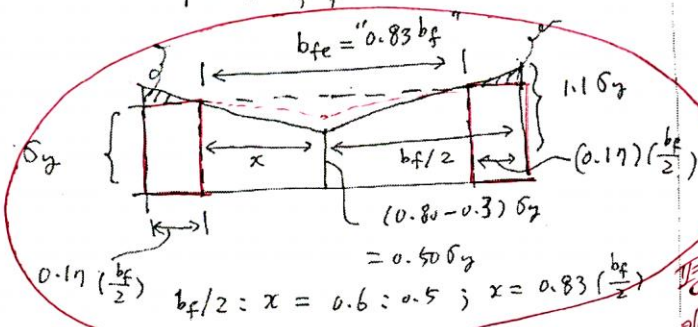


그러나 $P_{cr} = P_e = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$ 인

상한가능 (모든 단면의 $\frac{1}{2}$ 강성이 $\frac{1}{2}$ 이하)

error (정확성)

(ii) $\sigma = 0.80 \sigma_y$ 인 경우, $\frac{P}{A}$
 $P = (2t_f b_f) \times (0.80 \sigma_y)$



$$I_e = 2 \left[(0.83 b_f) (t_f) \left(\frac{t_f}{2} \right)^2 \right]$$

$$= 0.83 \times \left[2 b_f t_f \left(\frac{t_f}{2} \right)^2 \right]$$

$$= 0.83 I$$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E I_e}{(KL)^2}$$

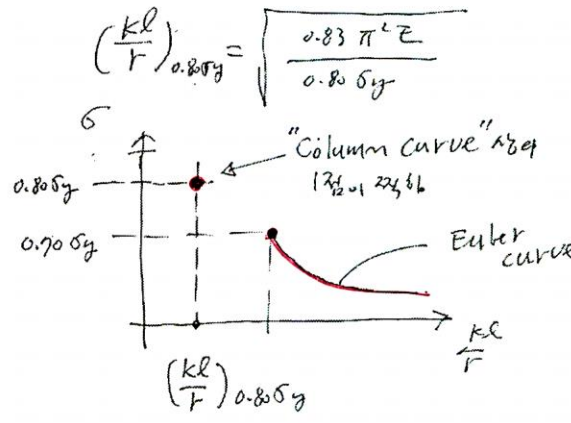
Effective flexural stiffness to resist buckling

$$= \frac{\pi^2 E (0.83 I)}{C (KL)^2}$$

$$= \frac{(0.80 \sigma_y) (2 t_f b_f)}{\sigma_{cr} A}$$

$$(0.80 \sigma_y) = \frac{\pi^2 E (0.83 \frac{I}{A})}{(KL)^2}$$

$$= \frac{0.83 \pi^2 E}{\left(\frac{KL}{r} \right)^2}$$

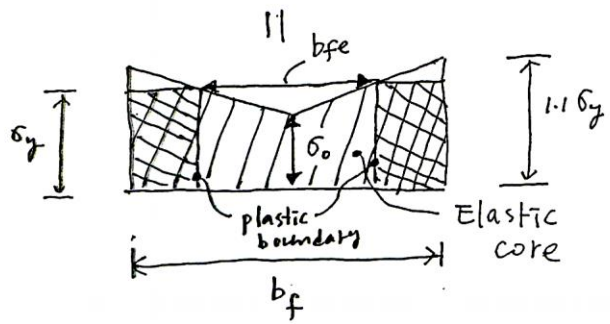
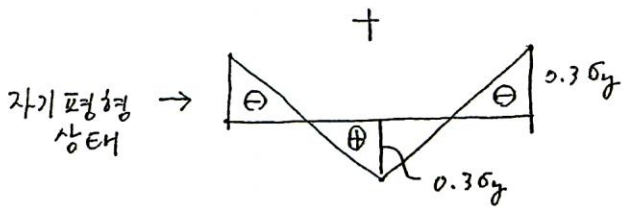
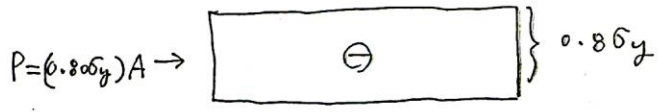


(iii) $\sigma = 0.90 \sigma_y$ 인 경우
 $\frac{P}{A} = (2 t_f b_f) \times (0.90 \sigma_y)$
 ...
 따라서 각각에 대해
 $\sigma_{cr} = 0.90 \sigma_y$ 이 대응하는
 $\left(\frac{KL}{r} \right)$ 을 찾을 수가 있을

정확성
이론적!

2.10 장의 변형률은 "2배"
 이걸 각각
 등잉은 아니

(ii) $\sigma = \frac{P}{A} = \frac{P}{2(t_f b_f)} = 0.80 \sigma_y$ 인 경우



미지수: $\sigma_0 = ?$, $b_{fe} = ?$
 → 조건식 2개 필요

$\frac{b_f}{2} = (1.1 \sigma_y - \sigma_0) = \frac{b_{fe}}{2} = (\sigma_y - \sigma_0) \dots (1)$

$P = (0.80 \sigma_y) (2 t_f b_f) = (2 t_f b_f) \sigma_y - \frac{1}{2} (\sigma_y - \sigma_0) (b_{fe} t_f) \times 2 \dots (2)$

(1) 식에서,

$b_{fe} (1.1 \sigma_y - \sigma_0) = b_f (\sigma_y - \sigma_0)$

$\frac{b_{fe}}{b_f} (1.1 \sigma_y - \sigma_0) = \sigma_y - \sigma_0$

$\sigma_0 (1 - \frac{b_{fe}}{b_f}) = \sigma_y - 1.1 \sigma_y \cdot \frac{b_{fe}}{b_f}$
 $= \sigma_y (1 - \frac{1.1 b_{fe}}{b_f})$

$\therefore \sigma_0 = \frac{(1 - \frac{1.1 b_{fe}}{b_f})}{(1 - \frac{b_{fe}}{b_f})} \times \sigma_y \dots (1)'$

(2) 식에서,

$(0.80 \sigma_y) (2 t_f b_f)$

$= (2 t_f b_f) \sigma_y - (\sigma_y - \sigma_0) (b_{fe} t_f) \times 2$

$(\sigma_y - \sigma_0) (b_{fe}) = 2 \sigma_y \cdot b_f - 1.6 \sigma_y b_f$
 $= 0.40 \sigma_y b_f$

$\sigma_y - \sigma_0 = (0.40 \sigma_y) \cdot \frac{b_f}{b_{fe}}$

$\sigma_0 = (1 - 0.40 \frac{b_f}{b_{fe}}) \times \sigma_y \dots (2)'$

(1)' = (2)' 에서, ($\eta = \frac{b_{fe}}{b_f}$)

$(\frac{1 - 1.1 \eta}{1 - \eta}) \times \sigma_y = (1 - \frac{0.40}{\eta}) \times \sigma_y$
 $= \frac{\eta - 0.40}{\eta}$

$\eta - 1.1 \eta^2 = (1 - \eta) (\eta - 0.40)$
 $= \eta - 0.40 - \eta^2 + 0.40 \eta$

$0.1 \eta^2 + 0.40 \eta - 0.40 = 0$

$\eta^2 + 4 \eta - 4 = 0$

$\eta = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 4}}{2} = \sqrt{8} - 2$

$\therefore \eta = 0.83 = \frac{b_{fe}}{b_f}$

$\sigma_0 = (1 - 0.40 \times \frac{1}{0.83}) \times \sigma_y = 0.52 \sigma_y$

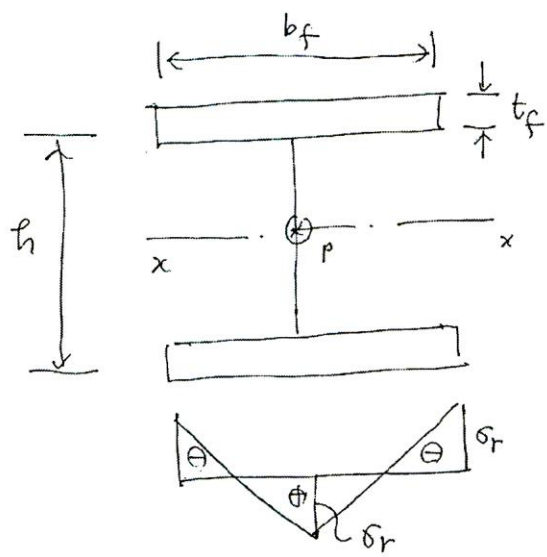
0.50 sigma_y 에서
 약 2% 줄

나머지 미지수는
 등잉

→ 다다
 0 각 2등 각

이상화된 I section의 "강축에 대한" 비탄성 column curve

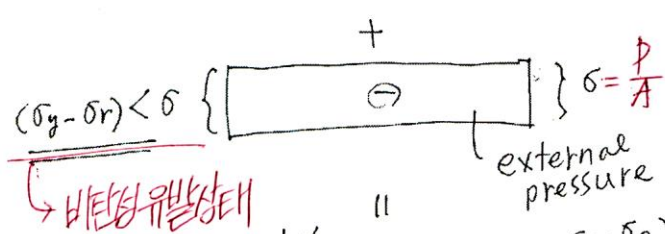
↑ ① 각 부분의 일차원화



note: $\sigma \leq (\sigma_y - \sigma_r)$ 인 경우는 Euler 공식이 $\frac{3}{2}$ 일 때,

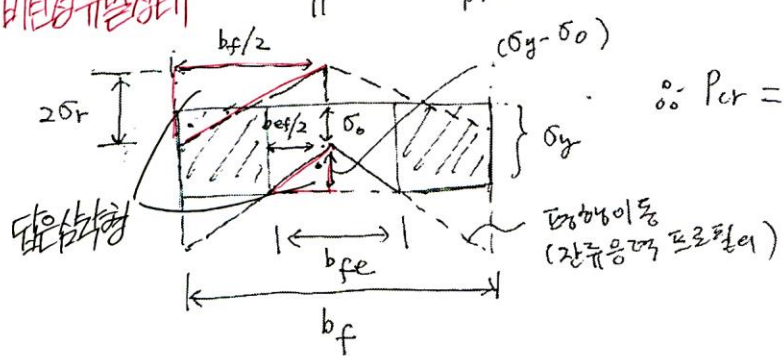
$$P_{cr} = P_e = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$$

그러나 이하의 axial stress level이 $(\sigma_y - \sigma_r)$ 이상인 경우의 비탄성 경우의 column curve를 얻고자 하는 것임.



$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_e}{(KL)^2} = \left(\frac{I_e}{I}\right) \times P_{euler}$$

$$= \frac{2 \left(\frac{b_{fe} t_f h^3}{4}\right)}{2 \left(\frac{b_f t_f h^3}{4}\right)} \times P_e$$



$$\therefore P_{cr} = \left(\frac{b_{fe}}{b_f}\right) \times P_e \quad \text{--- (5)}$$

↑ "stress level이 over는 plastic boundary를 구하는 플레임 위치"임"

$$P = 2 \left[\sigma_y b_f t_f - \frac{1}{2} (\sigma_y - \sigma_o) b_{fe} t_f \right] \quad \text{--- (7)}$$

flange 중앙부의 stress도 고려되어야 함. 플랜지 이동된 타나이어 이므로 나중에

"플랜지 이동" (플랜지 이동)

$$\left(\frac{b_f}{2}\right) - 2\delta_r = \left(\frac{b_{fe}}{2}\right) - (\sigma_y - \sigma_o)$$

$$\text{그러므로 } (\sigma_y - \sigma_o) = 2\delta_r \times \left(\frac{b_{fe}}{b_f}\right) \quad \text{--- (9)}$$

(9)식 \rightarrow (7)식에 대입하면 $2\delta_r$ 하의 $(\sigma_o$ 고려)

$$P = 2 \left[\sigma_y b_f t_f - \sigma_r \frac{b_{fe}^2 t_f}{b_f} \right]$$

$$= \frac{2 b_f t_f}{A} \left[\sigma_y - \sigma_r \frac{b_{fe}^2 t_f}{b_f^2 t_f} \right]$$

$$P = A \left[\sigma_y - \sigma_r \left(\frac{b_{fe}}{b_f} \right)^2 \right] \quad \dots (11)$$

(5) σ_r 가 2336107 $\left(\frac{b_{fe}}{b_f} \right)$ 이 unit의 $\frac{1}{2}$ 일면,

$$\frac{P}{A} = \sigma_{avg} = \sigma_y - \sigma_r \left(\frac{b_{fe}}{b_f} \right)^2$$

$\frac{1}{2}$ 일면 σ_r 값을 $\frac{1}{2}$ 일면 σ_r 값을

$$\left(\frac{b_{fe}}{b_f} \right) = \sqrt{\frac{\sigma_y - \sigma_{avg}}{\sigma_r}} \quad \dots (12)$$

misleading
가운데에 있는
↑ σ_r

Euler 이론에서

$$\sigma_{cr} = \frac{\sigma_y}{\lambda_c^2}$$

($\sigma_{cr} < \sigma_y - \sigma_r$ 일때)

그러나 (5) 식에서

$$P_{cr} = \sqrt{\frac{\sigma_y - \sigma_{avg}}{\sigma_r}} \times P_e$$

$$\frac{P_{cr}}{A \sigma_y} = \sqrt{\frac{\sigma_y - \sigma_{avg}}{\sigma_r}} \times \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} / A \sigma_y$$

$$\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_y} = \sqrt{\frac{\sigma_y - \sigma_{avg}}{\sigma_r}} \times \frac{1}{\left(\frac{KL}{r} \right)^2 \frac{\sigma_y}{E} \times \frac{1}{\pi^2}} \Rightarrow \left(\frac{1}{\pi r} \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}} \right)^2 = \lambda_c^2$$

$$\therefore \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_y} = \frac{\sqrt{\frac{\sigma_y - \sigma_{avg}}{\sigma_r}}}{\lambda_c^2} \quad \dots (14)$$

Slenderness
parameter
($\frac{L}{r}$ 값일)

$$\text{or } \lambda_c = \left(\frac{\sqrt{\frac{\sigma_y - \sigma_{avg}}{\sigma_r}}}{\sigma_{cr} / \sigma_y} \right)^{1/2} \quad \dots (14)'$$

$\sigma_{cr} (= \sigma_{avg}) > (\sigma_y - \sigma_r)$ 일때

이 식이 대응하면
4/Euler 이론은 강재의 column curve 258쪽
91쪽 (σ_{cr}, λ_c) 식이
일치

이와
관련

← Fig. 2.44
강재

(Strong - I member: case 2)

HW #

- 1) ③ $\frac{22}{7}$ 이 (14)자리 이항 column curve 와 2) 2.8 자리 이
HW (유인물 ⑤ $\frac{22}{7}$ 하라) 이 tangent modulus method 이
이항 column curve 는 22자리 이항 비교할 것.

2-11 Design curves for steel columns

CRC curve

Based on the idealized I-shaped columns with linear and parabolic residual stress distributions as well as test results,

$$\sigma_{cr} = \sigma_y - B \left(\frac{KL}{r}\right)^2 \text{ in the inelastic range}$$

Johnson parabola

$$\sigma_{cr} = \sigma_y - B \frac{C_c^2}{r^2} = 0.50 \sigma_y$$

한계치

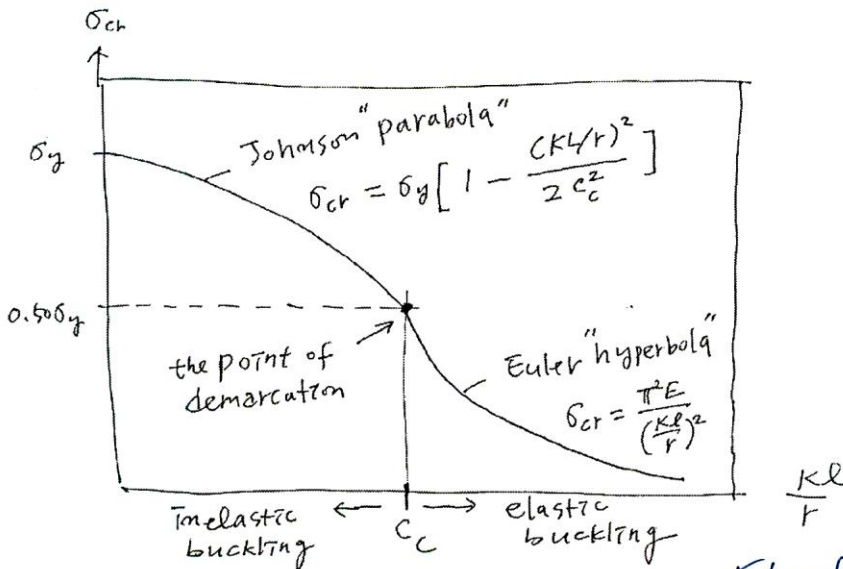
the point of demarcation between inelastic and elastic behavior (σ_r and imperfection)

$$\therefore B = \frac{1}{2C_c^2} \times \sigma_y$$

$$0.50 \sigma_y = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{KL}{r}\right)^2} = \frac{\pi^2 E}{C_c^2}$$

$$\therefore C_c = \sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_y}}$$

→ 이항이 될수록 C_c 는 작아짐



"ASD에서 yield limit state에 기본 안전율"

AISC ASD

→ 부등식인 CRC curve는 안전율을 나타내는 것

$$FS_{\text{inelastic}} = \frac{5}{3} + \frac{3}{8} \left(\frac{KL/r}{C_c}\right) - \frac{1}{8} \left(\frac{KL/r}{C_c}\right)^3$$

$$FS_{\text{elastic}} = \frac{23}{12} = 1.92$$

← buckling limit state은 종래 위험 (높은 안전율 정당화 될 것 아)

Factor of Safety

$$\frac{KL}{r} = 0 \rightarrow FS = \frac{5}{3} = 1.67$$

$$\frac{KL}{r} = C_c \rightarrow FS = \frac{5}{3} + \frac{3}{8} - \frac{1}{8} = \frac{20+3}{12}$$

$$= \frac{23}{12}$$

AISC Plastic Design Curve

(2)

$$1.7 \times \left(\frac{R_n}{F.S.} \right) \geq \sum_{i=1}^m Q_i$$

Plastic design capacity \geq factored axial load.
 ASD resistance

SSRC curves

CRC curve는 안전율을 도입하여
무한

① Initially crooked imperfect column의 강도 및 안정성이

Real column

→ 대는 실험 및 수치해석 결과를 근거로 제시됨

↳ "제강, 제작, 사이즈, 강재등급, 용접의 작용 방향 등이 따라
강재기둥의 강도가 변동하므로 multiple-design
curve가 바람직하겠다"

↳ 좀더 fine-tuning 한 것으로 볼 수
있으나, oversophistication한
경향이 있음 (기둥 강도 곡선을 위해
능력이 구급으로 시달리며 풀시)

The SSRC curves with "belly-down"
in the intermediate slenderness range
will be too conservative for most columns
in building frames.

↓
실제 기둥의 실험결과와 비교할 때

"결론적으로 별리 해라 되고 있지는 않음"
design code에

↳ 교과서 (2.11.8) 서 참조

회귀분석에 의한 식

Fig. 2.45의 SSRC 1~3
참조

Table 2.3 참조

Fabrication details,
steel grade, bending axis
등이 다른 권장 기둥곡선
번호 참조

(curve 2가 대용을
이름)

↓
AISC-LRFD

AISC LRFD curve

Only one curve is recommended for the "whole range" of possible column strength.

Note: $\lambda_c = \frac{1}{\pi} \frac{KL}{r} \sqrt{\frac{F_y}{E}}$ high strength penalty

$$\frac{P}{P_y} = \begin{cases} \exp(-0.419 \lambda_c^2) & \lambda_c \leq 1.5 \text{ (비연성 좌굴)} \\ 0.817 \lambda_c^{-2} & \lambda_c > 1.5 \text{ (연성 좌굴)} \end{cases}$$

Euler

실제 기둥의 imperfection을 fine-tuning 하는 계수로 볼 수 있음

* 상기 공식 계산시의 기본값 3가지 : 교리서 참조 (p.128)

* Table 2.4 참조 : Summary of Column Curves.

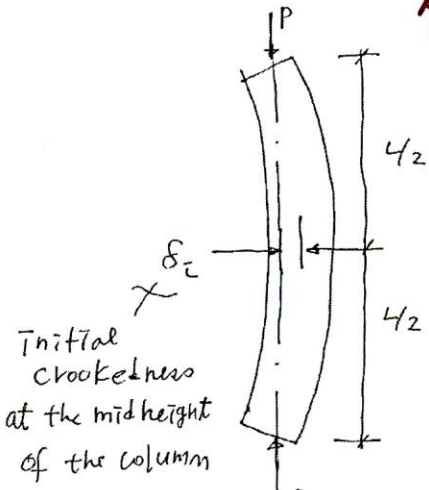
* 비연성 좌굴과 관련하여 target modulus theory가 현 code formula에 직접 사용되지는 않음

2.11.2 Single Equation for Multiple-Column Curves

SSRC 곡선: 9~10개의 계수가 있어 풀기 어려운 너무 사소한 번거로움

- * Romdal-Magnoir Eq. (1979년 ASCE 논문) ← simple but accurate (Eurocode!)
- * Lui-Chen Eq. (1984년 Engineering Journal 논문) ← 너무 복잡해 보임 (권장됨)

실제 기둥의 강도 → 최기항항력 복합강도 이론
 불연속점이 있는 보-기둥의 항복강도
 반가속



$$\frac{P}{P_u} + \frac{M}{M_u} = 1 \quad \dots (11)$$

capacity (기호 혼동시 말함)

P = applied axial force
 M = p-s bending moment

$$M = \left(\frac{1}{1 - P/P_e} \right) \times P \delta_c \quad \dots (12)$$

A_F

δ_c 값이 작을수록
 불연속점 (26% 정도)이
 반영된 강도
 상수가 높음

강철 비리수
 (P/P_y)로
 이걸이 가는 과정에서
 구분할 것

$$\left(\frac{P}{P_y}\right) + \frac{M}{M_y} = 1 \quad \dots (13)$$

$$\frac{P}{P_y} + \frac{P \cdot \delta_z}{\left(1 - \frac{P}{P_y} \cdot \frac{P_y}{P_e}\right) M_y} = 1 \quad \dots (14)$$



M_y = Sσ_y 및 $\frac{P_y}{P_e} = \lambda_c^2$ ($\leftarrow P_e = \frac{1}{\lambda_c^2} \times P_y$) $\frac{2}{E}$ (14) 식에 대입,

$$\lambda_c = \frac{KL}{r} \sqrt{\frac{\sigma_y}{\pi^2 E}}$$

$$\frac{P}{P_y} + \frac{P \delta_z}{\left(1 - \frac{P}{P_y} \lambda_c^2\right) \cdot S \sigma_y}$$

$$= \frac{P}{P_y} + \frac{P_y \cdot \left(\frac{P}{P_y} \times \delta_z\right)}{\left(1 - \frac{P}{P_y} \lambda_c^2\right) \cdot \left(\frac{S \sigma_y}{A \sigma_y}\right)}$$

$\eta = \frac{\delta_z A}{S} = \left[\frac{\delta_z A}{S} \right]$
 Imperfection parameter.

$$= \left(\frac{P}{P_y}\right) + \frac{\left(\frac{P}{P_y}\right)}{1 - \left(\frac{P}{P_y}\right) \lambda_c^2} \times \eta = 1.0 \quad \dots (16)$$

(16) 식의 $\left(\frac{P}{P_y}\right)$ 에 대한 2차 방정식 $\frac{0}{E}$ $\frac{2}{E}$ 이,

$$\left(\frac{P}{P_y}\right) = \frac{1 + \eta + \lambda_c^2 - \sqrt{(1 + \eta + \lambda_c^2)^2 - 4 \lambda_c^2}}{2 \lambda_c^2} \quad \dots (17)$$

Romdal - Maguoi Eq.

$$\eta = \delta_z \times \frac{A}{S} = \alpha (\lambda_c - 0.15) \quad \dots (18)$$

기둥 중앙부
 Imperfection에 의한 분기처짐값은
 세장비에 비례할 것임, reasonable.
 실험결과와 calibration 하여
 α 값을 산정하였을 것임

- α = 0.103 (SSRC 1)
 - = 0.293 (SSRC 2)
 - = 0.622 (SSRC 3)
- (2.11.9)

→ Fig. 2.47 참조
 The three SSRC curves can all be closely approximated by this "single" equation.

HWA#
 不忘