Engineering Mathematics I
- Chapter 7. Linear Algebra. Matrices, Vectors, Determinants, Linear systems
- 7장. 선형대수학. 행렬, 벡터, 행렬식, 선형연립방정식

민기복

Ki-Bok Min, PhD

서울대학교 에너지자원공학과 조교수

Assistant Professor, Energy Resources Engineering

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

Ch.7 Linear Algebra: Matrices, Vectors, Determinants: Linear Systems
선형대수학: 행렬, 벡터, 행렬식, 선형연립방정식

- 7.1 Matrices, Vectors: Addition and Scalar Multiplication
- 7.2 Matrix Multiplication
- 7.3 Linear Systems of Equations. Gauss Elimination
- 7.4 Linear Independence. Rank of a Matrix. Vector Space
- 7.5 Solutions of Linear Systems: Existence, Uniqueness
- 7.6 For reference: Second- and Third-Order Determinants
- 7.7 Determinants. Cramer's Rule
- 7.8 Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan Eliminations
- 7.9 Vector Spaces, Inner Product Spaces. Linear Transformations.

Linear Algebra

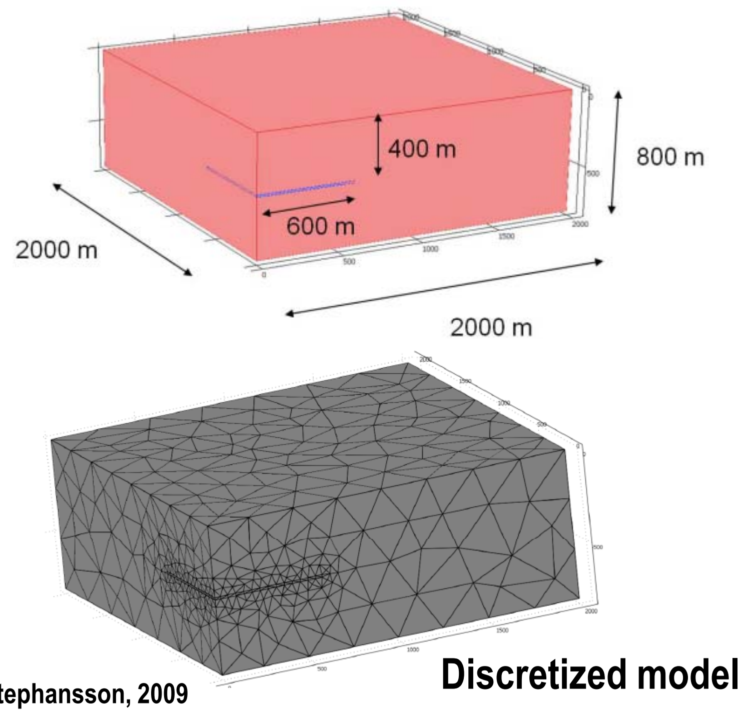
SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- 선형연립방정식은 전기회로, 기계 구조물, 경계모델, 최적화 문제, 미분방정식의 수치해 등을 다룰 때 나타남.
- 선형연립방정식의 문제를 해결하는데, 행렬과 벡터 이용
- 내용:
  - 행렬 및 벡터 간의 연산에 대한 정의,
  - 선형 연립방정식에 관한 것 (Gauss 소거법, 행렬의 계수의 역할),
  - 역행렬, 행렬식의 정의와 응용

Linear Algebra
행렬 계산의 예 (미분방정식의 수치해)

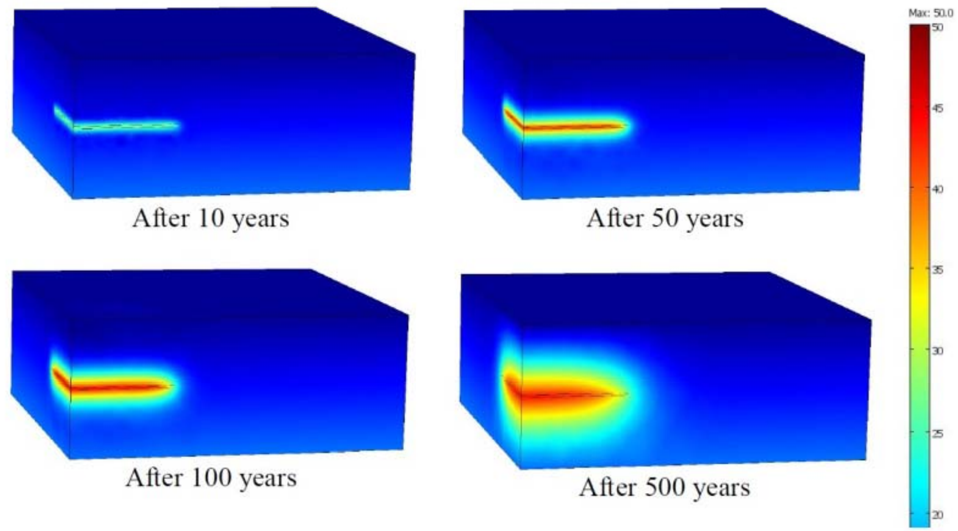
SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- 미분방정식의 수치해 (numerical solution of differential equation)
  - Distribution of temperature after placement of high level nuclear waste



Discretized model

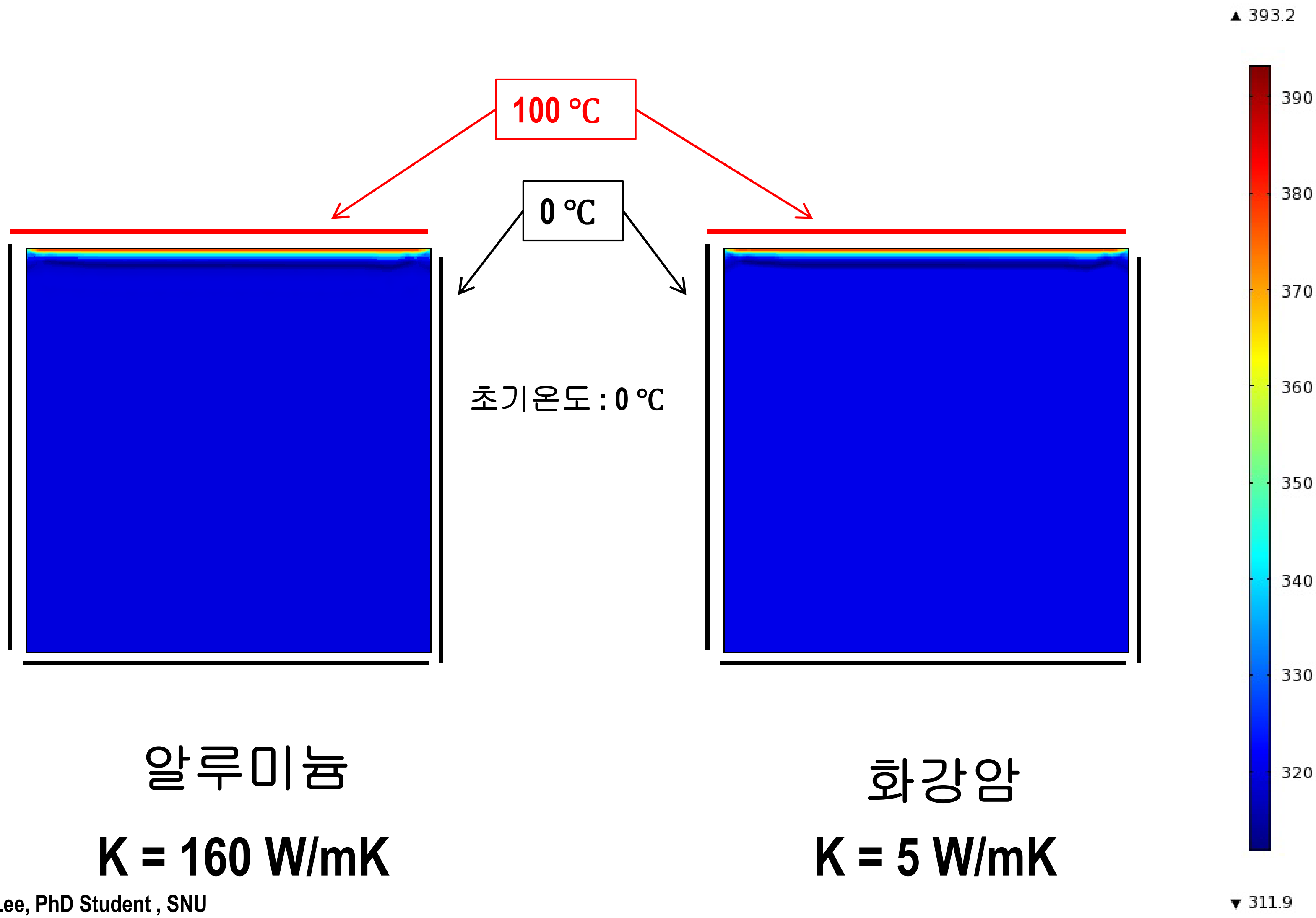
Min and Stephansson, 2009



이와 같은 수치해에서 각 절점이 미지수로 취급되어 대규모(**e.g.,** 수만**x**수만)의 행렬계산을 수행하게 됨.

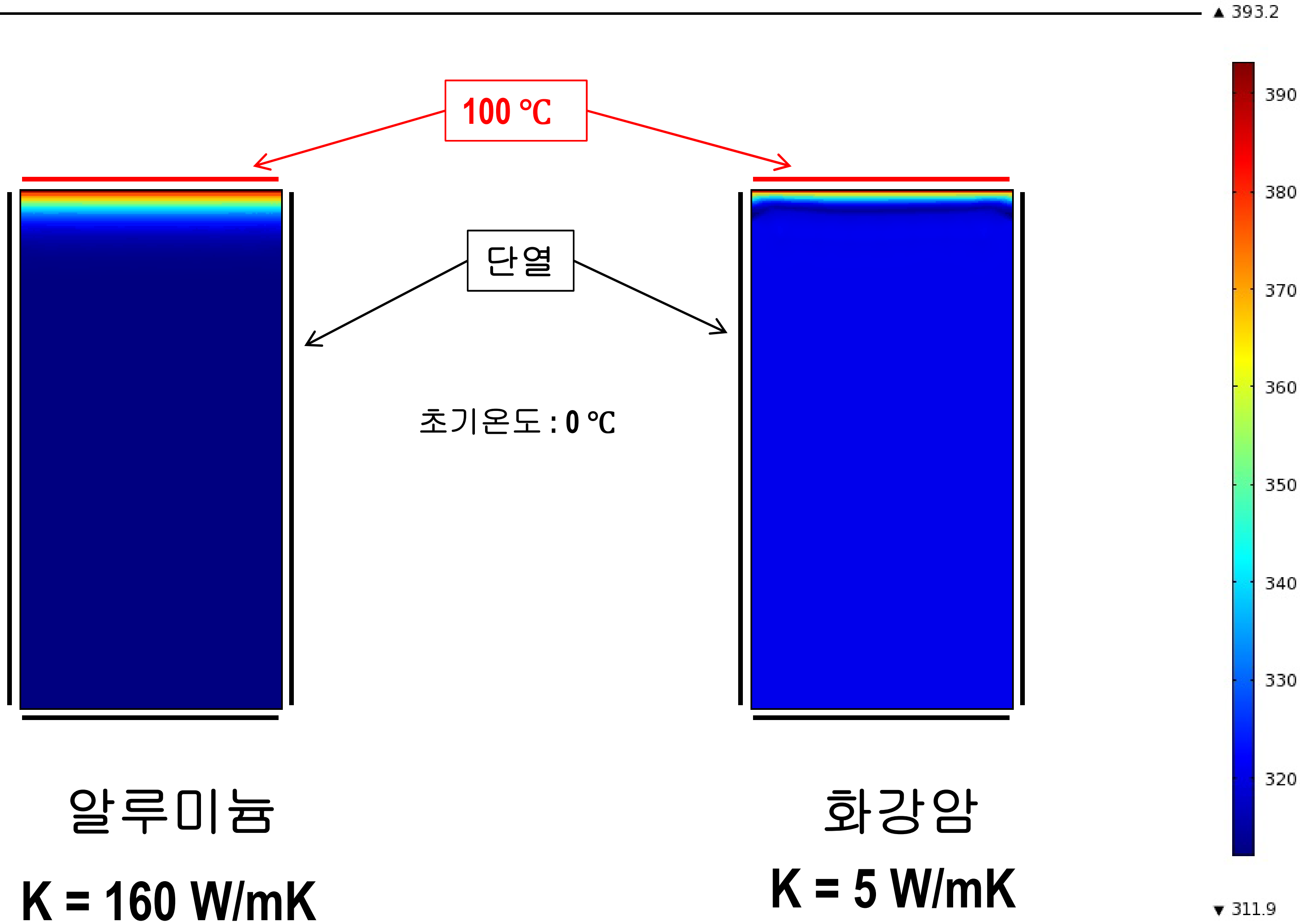
Linear Algebra
행렬 계산의 예 (미분방정식의 수치해)

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY



Modeled by Jae-Won Lee, PhD Student , SNU

Linear Algebra
행렬 계산의 예 (미분방정식의 수치해)



Modeled by Jae-Won Lee, PhD Student , SNU

Matrices, Vectors: Addition and Scalar Multiplication

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- **Matrix (행렬):** 수(혹은 함수)를 직사각형 모양으로 괄호 안에 배열한 것
  - **Entry (원소) or Element (요소):** 행렬에 배열되는 수 (혹은 함수)
  - **Row (행):** 수평선
  - **Column (열):** 수직선
- **Vector (벡터):** 한 개의 행이나 열로 구성된 행렬
  - **Row Vector (행벡터):** 하나의 행으로 구성
  - **Column Vector (열벡터):** 하나의 열로 구성

Matrices, Vectors: Addition and Scalar Multiplication

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- **General Concepts and Notations**

$$\mathbf{A} = [a_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} : m \times n \text{ 행렬}$$

  - 행렬은 굵은 대문자로 나타낸다
  - 첫 번째 아래 첨자 j 는 Row (행)
  - 두 번째 아래 첨자 k 는 Column (열)
  - a_{jk} : j 행, k 열의 Element (원소)
- **Square Matrix (정방행렬)**
  - $m = n$ 인 정사각형 모양의 **A**
  - 정방행렬에서 원소 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 을 포함하는 대각선을 행렬 **A**의 Principal Diagonal (주대각선) 이라고 함.

Matrices, Vectors: Addition and Scalar Multiplication

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- **Vectors (벡터):** 하나의 행(열)으로 이루어진 행렬
  - *n* 차원 Row Vector (행벡터): $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1, & a_2, & \cdots & a_n \end{bmatrix}$
  - *m* 차원 Column Vector (열벡터): $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

Matrices, Vectors: Addition and Scalar Multiplication

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- **Equality of Matrices (행렬의 상등):** 행렬의 크기가 같으며 대응되는 원소들이 모두 같은 경우
- **Matrix Addition (행렬의 덧셈):** 같은 크기의 행렬에 대해서만 정의되고, 그 합은 대응하는 원소를 각각 더함으로 얻어짐.
- **Scalar Multiplication (스칼라곱):** 행렬의 각 원소에 상수를 곱하여 얻어짐.
- **행렬의 가법과 스칼라곱에 대한 연산법칙**

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A} \qquad c(\mathbf{A}+\mathbf{B})=c\mathbf{A}+c\mathbf{B}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) \qquad (c+k)\mathbf{A}=c\mathbf{A}+k\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A} \qquad c(k\mathbf{A})=(ck)\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{0} \qquad 1\mathbf{A}=\mathbf{A}$$

Matrix Multiplication

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- **Matrix Multiplication (행렬과 행렬의 곱):**
  - $m \times n$ 행렬 $\mathbf{A} = \lfloor a_{jk} \rfloor$ 의 n 과 $r \times p$ 행렬 $\mathbf{B} = \lfloor b_{jk} \rfloor$ 의 r 이 서로 같아야 정의되며 $c_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{jl} b_{lk} = a_{j1} b_{1k} + a_{j2} b_{2k} + \cdots + a_{jn} b_{nk}$ 를 원소로 하는 $m \times p$ 행렬로 정의됨.
- **행렬의 곱은 Not Commutative (비가환적):** $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$
- **행렬의 곱에 대한 연산법칙**

$$(k\mathbf{A})\mathbf{B} = k(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}(k\mathbf{B})$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$$

Associative Law

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$$

$$\mathbf{C}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{CA} + \mathbf{CB}$$

Distributive Law

Matrix Multiplication

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- **Transposition of Matrices (행렬과 벡터의 전치):**
  열과 행이 서로 바뀌어 얻어진 행렬

$$\mathbf{A} = \left[a_{jk}\right] \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^T = \left[a_{kj}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- **전치 연산에 대한 법칙**

$$\left(\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}$$

$$\left(\mathbf{A} + \mathbf{B}\right)^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$$

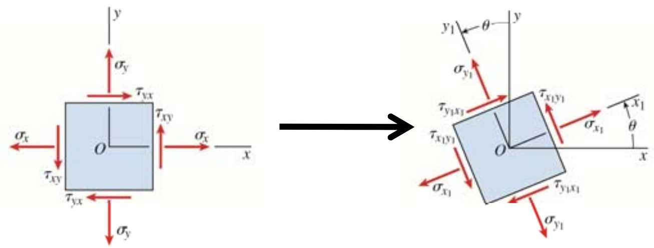
$$\left(c\mathbf{A}\right)^T = c\mathbf{A}^T$$

$$\left(\mathbf{AB}\right)^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$$

Matrix Multiplication
Matrix Transpose

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- 전치행렬의 적용 예
  - Stress Transformation Equation



$$\sigma_{x_1} = \sigma_x \cos^2\theta + \sigma_y \sin^2\theta + 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta \quad \text{or} \quad \sigma_{x_1} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy}\sin 2\theta$$

$$\tau_{x_1y_1} = -(\sigma_x-\sigma_y)\sin\theta\cos\theta + \tau_{xy}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) \quad \text{or} \quad \tau_{x_1y_1} = -\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\sin 2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

  - Stress Transformation Equation using direction cosine (and its Transpose matrix)

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x1} & \tau_{x1y1} \\ \tau_{x1y1} & \sigma_{y1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}^T \qquad \boldsymbol{\tau}' = \mathbf{R}\boldsymbol{\tau}\mathbf{R}^{\mathbf{T}}$$

Matrix Multiplication

- **Special Matrices (특수한 행렬)**
  - **Symmetric Matrix (대칭행렬):** 전치가 본래의 행렬과 같은 정방행렬 $\left(\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\right)$
  - **Skew-symmetric Matrix (반대칭행렬):** 전치가 본래의 행렬의 음이 되는 정방행렬 $\left(\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}\right)$
  - **Triangular Matrix (삼각행렬)**
  - **Upper Triangular Matrix (위삼각행렬):** 주대각선을 포함하여 그 위쪽으로만 0이 아닌 원소를 갖는 정방행렬
  - **Lower Triangular Matrix (아래삼각행렬):** 주대각선을 포함하여 그 아래쪽으로만 0이 아닌 원소를 갖는 정방행렬
  - **Diagonal Matrix (대각행렬):** 주대각선 상에서만 0이 아닌 원소를 가질 수 있는 정방행렬
  - **Scalar Matrix (스칼라 행렬):** 주대각선 원소들이 모두 같은 대각행렬
  - **Unit or Identity Matrix (단위행렬):** 주대각선 원소들이 모두 1인 대각행렬

Linear Systems of Equations. Gauss Elimination

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- **Linear System (선형연립방정식):**

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

  - **Homogeneous Simultaneous System (제차연립방정식):**
    - b_j 가 모두 0인 경우
  - **Nonhomogeneous Simultaneous System (비제차연립방정식):**
    - b_j 중 적어도 하나는 0이 아닌 경우

Linear Systems of Equations. Gauss Elimination

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- 선형연립방정식의 행렬표현:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

  - **Coefficient Matrix (계수행렬): A**
  - **Solution Vector (해벡터): x**
  - **Augmented matrix (첨가행렬):** 계수행렬 **A**에 열벡터 **b**를 첨가한 행렬

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{bmatrix}$$

Linear Systems of Equations. Gauss Elimination

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- **Gauss Elimination and Back Substitution (가우스 소거법과 후치환)**

Linear system **Augmented matrix**

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &= 2 \\ -4x_1 + 3x_2 &= -30 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ -4 & 3 & -30 \end{bmatrix}$$

  - **Step 1** x_1 을 소거: 첫 번째 식에 두 배 한 후, 이를 두 번째 식에 더함.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &= 2 \\ 13x_2 &= -26 \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 0 & 13 & -26 \end{bmatrix}$$

  - **Step 2** 후치환(Back Substitution)을 통해 x_2, x_1 순으로 해를 구함. 마지막 방정식에서 $x_2 = -26/13 = -2$ 를 구한 후, 그 결과를 역순으로 첫째 방정식에 대입하여 에 대하여 정리하면,
$x_1 = \frac{1}{2}(2 - 5x_2) = \frac{1}{2}(2 - 5(-2)) = 6$ 을 얻게됨.

Linear Systems of Equations. Gauss Elimination

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- **Elementary Row Operations. Row-Equivalent Systems (기본행연산. 행 동치 연립방정식)**

<방정식에 대한 기본연산>	$\longleftrightarrow$	**<행렬에 대한 기본행연산>**
• **두 방정식을 교환하는 것**		• **두 행을 교환하는 것**
• **한 방정식의 상수배를 다른 방정식에 더하는 것**		• **한 행의 상수배를 다른 행에 더하는 것**
• **한 방정식에 0이 아닌 상수를 곱하는 것**		• **한 행에 0이 아닌 상수를 곱하는 것**

- **Row-Equivalent (행 동치):**
  – 선형시스템 S_1 이 선형시스템 S_2 에 유한번의 기본 행연산을 가하여 얻어질 수 있다면 S_1 을 S_2 의 **행 동치**라 함.

- **Row-Equivalent Systems (행 동치 연립방정식):** 행 동치 연립방정식들은 같은 해집합을 가짐.

Linear Systems of Equations. Gauss Elimination

- Gauss Elimination (가우스 소거법) – 연립방정식의 세가지 경우
  - 무한히 많은 해가 존재하는 경우 (미지수의 수가 방정식의 수보다 많은 경우)
  - 유일한 해가 존재하는 경우
  - 해가 존재하지 않는 경우 (연립방정식의 해가 존재하지 않는 경우)

Linear Systems of Equations. Gauss Elimination

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- Ex.2

$$
\begin{aligned}
x_1 \quad - x_2 + x_3 \quad &= 0 \\
-x_1 \quad + x_2 - x_3 \quad &= 0 \\
10x_2 + 25x_3 &= 90 \\
20x_1 + 10x_2 \qquad &= 80
\end{aligned}
$$

Linear Systems of Equations. Gauss Elimination

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- Ex.3

$$\begin{bmatrix} 3.0 & 2.0 & 2.0 & -5.0 & \vdots & 8.0 \\ 0.6 & 1.5 & 1.5 & -5.4 & \vdots & 2.7 \\ 1.2 & -0.3 & -0.3 & 2.4 & \vdots & 2.1 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} 3.0x_1 + 2.0x_2 + 2.0x_3 - 5.0x_4 &= 8.0 \\ 0.6x_1 + 1.5x_2 + 1.5x_3 - 5.4x_4 &= 2.7 \\ 1.2x_1 - 0.3x_2 - 0.3x_3 + 2.4x_4 &= 2.1 \end{aligned}$$

  - **Step 1.** x_1 을 소거

첫째 방정식에 $-0.6/3.0 = -0.2$ **배 하여 두 번째 방정식에 더함.**

첫째 방정식에 $-1.2/3.0 = -0.4$ **배 하여 세 번째 방정식에 더함.**

$$\begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 3.0 & 2.0 & 2.0 & -5.0 & \vdots & 8.0 \\ 0 & 1.1 & 1.1 & -4.4 & \vdots & 1.1 \\ 0 & -1.1 & -1.1 & 4.4 & \vdots & -1.1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \textbf{2행+(-0.2)x1행} \\ \textbf{3행+(-0.4)x1행} \end{array} \end{array} \qquad \begin{aligned} 3.0x_1 + 2.0x_2 + 2.0x_3 - 5.0x_4 &= 8.0 \\ 1.1x_2 + 1.1x_3 - 4.4x_4 &= 1.1 \\ -1.1x_2 - 1.1x_3 + 4.4x_4 &= -1.1 \end{aligned}$$

Linear Systems of Equations. Gauss Elimination

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

– **Step 2.** x_2 를 소거: 두 번째 방정식에 1.1/1.1=1배 하여 세 번째 방정식에 더함.

$$\begin{bmatrix} 3.0 & 2.0 & 2.0 & -5.0 & \vdots & 8.0 \\ 0 & 1.1 & 1.1 & -4.4 & \vdots & 1.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \quad \textbf{3행+2행}$$

$$\begin{aligned} 3.0x_1 + 2.0x_2 + 2.0x_3 - 5.0x_4 &= 8.0 \\ 1.1x_2 + 1.1x_3 - 4.4x_4 &= 1.1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

– **Step 3.** 후치환 $x_2 = 1 - x_3 + 4x_4, \quad x_1 = 2 - x_4$

x_3와 x_4는 임의로 결정할 수 있는 수이므로, 무한히 많은 해가 얻어짐.

Linear Systems of Equations. Gauss Elimination

- **Ex. 4 Gauss Elimination if no Solution Exists**

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 6 & 2 & 4 & \vdots & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 6 \end{aligned}$$

– **Step 1** x_1 을 소거

첫째 방정식에 $-2/3$ 배 하여 두 번째 방정식에 더함.

첫째 방정식에 $-6/3 = -2$ 배 하여 두 번째 방정식에 더함.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \vdots & -2 \\ 0 & -2 & 2 & \vdots & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \textbf{2행+(-2/3)x1행} \\ \textbf{3행+(-2)x1행} \end{array}$$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ -\frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 &= -2 \\ -2x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Linear Systems of Equations. Gauss Elimination

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- **Step 2** x_2를 소거: 세 번째 식에서 x_2를 소거

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 12 \end{bmatrix}$$

3행+(-6)x2행

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ -\frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 &= -2 \\ 0 &= 12 \end{aligned}$$

모순이 되어 연립방정식은 해를 갖지 않음.

Linear Systems of Equations. Gauss Elimination

- **Gauss Elimination (가우스 소거법) – 연립방정식의 세가지 경우**
  - **무한히 많은 해가 존재하는 경우 (미지수의 수가 방정식의 수보다 많은 경우)** $r < n, \ \ \tilde{b}_{r+1} = \cdots = \tilde{b}_m = 0$
  - **유일한 해가 존재하는 경우** $r = n, \ \ \tilde{b}_{r+1} = \cdots = \tilde{b}_m = 0$
  - **해가 존재하지 않는 경우 (연립방정식의 해가 존재하지 않는 경우)**
    $r < m, \ \ \tilde{b}_{r+1}, \cdots, \tilde{b}_m$ 중 어느 하나라도 0이 아닌 경우

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} & b_1 \\ & c_{22} & \cdots\cdots & c_{2n} & \tilde{b}_2 \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & k_{rr} \ \cdots & k_{rn} & \tilde{b}_r \\ & & & & \tilde{b}_{r+1} \\ & & & & \vdots \\ & & & & \tilde{b}_m \end{array}\right]$$

Row echelon form

(행사다리꼴)

Linear Independence. Rank of a Matrix. Vector Space

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- 벡터의 일차 독립과 종속성

$$c_1\mathbf{a}_{(1)} + c_2\mathbf{a}_{(2)} + \cdots + c_m\mathbf{a}_{(m)} = \mathbf{0}$$

c: 스칼라,

a: 벡터 (같은 수의 성분을 가짐)

  - **Linearly Independent (일차 독립):** 모든 $c_j = 0$ 일 때만 위 식이 만족
  - **Linearly Dependent (일차 종속):** 어떤 $c_j \neq 0$ 이어도 위 식이 만족

Linear Independence. Rank of a Matrix. Vector Space

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- **행렬의 Rank (계수):** 행렬에서 1차독립인 행벡터의 최대 수이며 rank **A**라 표시

$$\boxed{\text{행렬의 계수} \approx \text{의미있는 행의 수}}$$

  - **행 동치인 행렬:** 행 동치인 행렬들은 같은 계수를 가짐.

- Ex. 3

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 54 \\ 21 & -21 & 0 & -15 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 42 & 28 & 58 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rank A = 0 ??? **→ If and only if A = 0**

Linear Independence. Rank of a Matrix. Vector Space

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- **일차종속성과 일차독립성**
  - 각각 n 개의 성분을 갖는 p 개의 벡터들은 이 벡터들을 행벡터로 취하여 구성된 행렬의 계수가 p 이면 일차독립이고, 그 계수가 p 보다 작으면 일차종속임.
- **벡터의 일차종속**
  - $n\,(<p)$ 개의 성분을 갖는 p 개의 벡터들은 항상 일차종속임.

Linear Independence. Rank of a Matrix. Vector Space

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- **Theorem 3. Rank in terms of Column vectors (열벡터에 의한 계수)**
  - 행렬의 계수는 행렬의 일차독립인 열벡터의 최대수와 같음.
    → 행렬과 행렬의 전치는 같은 계수를 가짐.
  - With m x n matrix **A**, rank **A** =r

$$rank\ of\ \ \mathbf{A} = rank\ of\ \ \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$

A의 행벡터

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_{(1)} &= c_{11}\mathbf{v}_{(1)} + c_{12}\mathbf{v}_{(2)} + \cdots + c_{1r}\mathbf{v}_{(r)} \\
\mathbf{a}_{(2)} &= c_{21}\mathbf{v}_{(1)} + c_{22}\mathbf{v}_{(2)} + \cdots + c_{2r}\mathbf{v}_{(r)} \\
\vdots \quad & \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\
\mathbf{a}_{(m)} &= c_{m1}\mathbf{v}_{(1)} + c_{m2}\mathbf{v}_{(2)} + \cdots + c_{mr}\mathbf{v}_{(r)}
\end{aligned}$$

$\mathbf{v}_{(1)}, \mathbf{v}_{(2)} \cdots \mathbf{v}_{(r)}$:1차독립인 행벡터집합

Linear Independence. Rank of a Matrix. Vector Space

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

$$(a_{11}\ a_{12}\ \ldots a_{1n}) = c_{11}(v_{11}\ v_{12}\ \ldots v_{1n}) + c_{12}(v_{21}\ v_{22}\ \ldots v_{2n}) + \cdots + c_{1r}(v_{r1}\ v_{r2}\ \ldots v_{rn})$$

$$(a_{21}\ a_{22}\ \ldots a_{2n}) = c_{21}(v_{11}\ v_{12}\ \ldots v_{1n}) + c_{22}(v_{21}\ v_{22}\ \ldots v_{2n}) + \cdots + c_{2r}(v_{r1}\ v_{r2}\ \ldots v_{rn})$$

$$\ldots$$

$$(a_{m1}\ a_{m2}\ \ldots a_{mn}) = c_{m1}(v_{11}\ v_{12}\ \ldots v_{1n}) + c_{m2}(v_{21}\ v_{22}\ \ldots v_{2n}) + \cdots + c_{mr}(v_{r1}\ v_{r2}\ \ldots v_{rn})$$

- 열벡터에 대한 방정식 (k = 1, 2, …, n)

$$\begin{aligned} a_{1k} &= c_{11}v_{1k} + c_{12}v_{2k} + \cdots + c_{1r}v_{rk} \\ a_{2k} &= c_{21}v_{1k} + c_{22}v_{2k} + \cdots + c_{2r}v_{rk} \\ &\vdots \\ a_{mk} &= c_{m1}v_{1k} + c_{m2}v_{2k} + \cdots + c_{mr}v_{rk} \end{aligned} \longrightarrow \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix} = v_{1k}\begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{bmatrix} + v_{2k}\begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + v_{rk}\begin{bmatrix} c_{1r} \\ c_{2r} \\ \vdots \\ c_{mr} \end{bmatrix}$$

A의 1차독립인 열벡터의 최대수는 r
→ 계수를 초과할 수 없다.

- A의 전치행렬 A^T에도 같은 결론 적용. A의 1차 독립인 행벡터의 최대수는 r → 열벡터의 최대수를 초과할 수 없다.

Linear Independence. Rank of a Matrix. Vector Space

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- **Vector Space (벡터공간):**
  - 공집합이 아닌 벡터의 집합에 속해 있는 임의의 두 원소에 대하여, 이들의 일차결합이 다시 집합의 원소가 되며, 다음 법칙을 만족하는 벡터들의 집합

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A} \qquad c(\mathbf{A}+\mathbf{B})=c\mathbf{A}+c\mathbf{B}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) \qquad (c+k)\mathbf{A}=c\mathbf{A}+k\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{0}=\mathbf{A} \qquad c(k\mathbf{A})=(ck)\mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{0} \qquad 1\mathbf{A}=\mathbf{A}$$

- **Dimension (차원):** 벡터공간내의 일차독립인 벡터들의 최대수이며 dim V 로 표기

Linear Independence. Rank of a Matrix. Vector Space

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- **Basis (기저):**
  - 벡터공간내의 최대로 가능한 수의 일차독립인 벡터로 구성되는 부분집합이며, 기저가 되는 벡터의 수는 차원과 같다.
- **Span (생성공간) = Vector Space:**
  - 성분의 수가 같은 벡터들에 관한 일차결합으로 표현되는 모든 벡터들의 집합
- **Subspace (부분공간):**
  - 벡터공간에서 정의된 벡터합과 스칼라곱에 관하여 닫혀있는 부분집합

Linear Independence. Rank of a Matrix. Vector Space

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- $\mathbf{R}^n$ **벡터공간**
  - n 개의 성분을 갖는 모든 벡터들로 이루어진 벡터공간 $\mathbf{R}^n$ 의 차원은 n 임.
  - **Row Space (행공간):** 행벡터들의 생성공간
  - **Column Space (열공간):** 열벡터들의 생성공간
- **행공간과 열공간**
  - 행렬의 행공간과 열공간은 차원이 같고, 행렬의 계수도 동일함.
  - **Null Space (영공간):** $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 의 해집합
  - **Nullity (퇴화차수):** 영공간의 차원
    A의 계수 + **A**의 퇴화차수 = **A**의 행 개수

Solutions of Linear Systems: Existence, Uniqueness

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- Theorem 1. Fundamental Theorem for Linear Systems

(a) Existence (존재성):

$$rank\ \mathbf{A} = rank\ \tilde{\mathbf{A}}$$

– 선형연립방정식이 Consistent, 다시 말해서 모순이 없기 위한, 해를 갖기 위한, 필요충분조건은 계수행렬과 첨가행렬이 같은 계수를 갖는 것임.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Solutions of Linear Systems: Existence, Uniqueness

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- Ex4 in sec.7.3)

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 6 & 2 & 4 & \vdots & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 6 \end{aligned}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\mathit{rank}\ \mathbf{A} \neq \mathit{rank}\ \tilde{\mathbf{A}}$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 12 \end{bmatrix}$$

Solutions of Linear Systems: Existence, Uniqueness

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- Theorem 1. Fundamental Theorem for Linear Systems

(b) Uniqueness (유일성):

- 선형연립방정식이 유일한 해를 갖기 위한 필요충분조건은 계수행렬과 첨가행렬이 미지수의 개수와 같은 계수 $(r = n)$ 를 갖는 것임.

(c) Infinitely Many Solutions (무수히 많은 해):

- 계수행렬의 계수가 미지수의 개수보다 작으면 무수히 많은 해가 존재

(d) Gauss Elimination (Gauss 소거법):

- 해가 존재하면 Gauss 소거법에 의해 모두 구할 수 있음.

Solutions of Linear Systems: Existence, Uniqueness

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- Ex.3 of section 7.3)

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 3.0 & 2.0 & 2.0 & -5.0 & 8.0 \\ 0.6 & 1.5 & 1.5 & -5.4 & 2.7 \\ 1.2 & -0.3 & -0.3 & 2.4 & 2.1 \end{array}\right]$$

$$\downarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc:c} 3.0 & 2.0 & 2.0 & -5.0 & 8.0 \\ 0 & 1.1 & 1.1 & -4.4 & 1.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Solutions of Linear Systems: Existence, Uniqueness

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- Theorem 2. Homogeneous Linear System (제차연립방정식)

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0
\end{aligned}
$$

  – 제차연립방정식은 항상 Trivial Solution(자명한 해)을 가짐.

  – 행렬의 계수 = *r*, 미지수의 개수 = *n* 일 때, 자명하지 않은 해가 존재할 필요충분조건: $r < n$

  – $r < n$ 이면 해공간은 n-r 차원 벡터공간임.

  – 제차연립방정식의 두 해벡터의 일차결합도 제차연립방정식의 해임.

Solutions of Linear Systems: Existence, Uniqueness

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- Theorem 3. Homogeneous Linear System with Fewer Equations Than Unknowns (**미지수보다 방정식의 수가 적은 제차 선형연립방정식)**
  - 방정식의 수가 미지수의 수보다 적은 제차연립방정식은 항상 자명하지 않은 해(Nontrivial Solution)를 가짐.

Solutions of Linear Systems: Existence, Uniqueness

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- Theorem 4. Nonhomogeneous Linear System (비제차연립방정식)
  - 만약 비제차 연립방정식이 해를 갖는다면 모든 해는 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_o + \mathbf{x}_h$ 와 같은 형태가 됨.
  - $\mathbf{x}_o$은 고정된 임의의 해이고, $\mathbf{x}_h$ 는 대응하는 제차연립방정식의 모든 해를 대표함.

For Reference: 2nd and 3rd order Determinants

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

Determinant of Second Order (2차 행렬식)

$$D = \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Linear System of Two Equations

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned} \xrightarrow[D \neq 0]{\text{Cramer의 법칙}} \begin{aligned} x_1 &= \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{D} = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{D} \\ x_2 &= \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{D} \end{aligned}$$

Ex. 1 Cramer's Rule for Two Equations

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &= 12 \\ 2x_1 + 5x_2 &= -8 \end{aligned} \qquad x_1 = 6, \quad x_2 = -4$$

For Reference: 2nd and 3rd order Determinants

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- **Determinant of third order (3차 행렬식)**

$$D = \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{13}a_{32} + a_{21}a_{12}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}$$

For Reference: 2nd and 3rd order Determinants

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- **Linear systems of three equations**

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned} \quad \xrightarrow[D \neq 0]{\text{Cramer의 법칙}} \quad x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ x_3 = \frac{D_3}{D}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Determinants. Cramer's rule

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- **Determinant of Order *n* (*n* 차 행렬식)**

$$D = \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

  - **If n = 1,** $D = a_{11}$

or !

  - **If n > 2,** $D = a_{j1}C_{j1} + a_{j2}C_{j2} + \cdots + a_{jn}C_{jn} \quad (j = 1,\ 2,\ \cdots,\ \text{or}\ n)$

or

$$D = a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \cdots + a_{nk}C_{nk} \quad (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ \text{or}\ n)$$

$$C_{jk} = (-1)^{j+k} M_{jk}$$

  - **Minor (소행렬식):** n-1차의 행렬식 M_{jk}
  - **Cofactor (여인수):** C_{jk}

M_{jk}: Submatrix of A by omitting the row and column of the entry a_{jk}

Determinants. Cramer's rule

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- Ex. 2

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

- Ex. 3

$$D = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

Determinants of triangular matrices???

Determinants. Cramer's rule

- **Behavior of an *n* th-Order Determinant under Elementary Row Operations**
  - 두 행을 바꾸는 것은 행렬식의 값에 -1을 곱하는 것임.
  - 한 행의 상수배를 다른 행에 더하는 것은 행렬식의 값에 변화를 주지 않음.
  - 한 행에 상수를 곱하는 것은 행렬식의 값에 상수를 곱하는 것임.

Determinants. Cramer's rule

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- **Further Properties of *n* th-Order Determinants**
  - 두 열을 바꾸는 것은 행렬식의 값에 -1을 곱하는 것임.
  - 한 열의 상수배를 다른 열에 더하는 것은 행렬식의 값에 변화를 주지 않음.
  - 한 열에 상수를 곱하는 것은 행렬식의 값에 상수를 곱하는 것임.
  - Transposition은 행렬식의 값에 변화를 주지 않음.
  - 0행 또는 0열은 행렬식의 값을 0으로 만듦.
  - 같은 비율의 행 또는 열은 행렬식의 값을 0으로 만듦.

Determinants. Cramer's rule

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

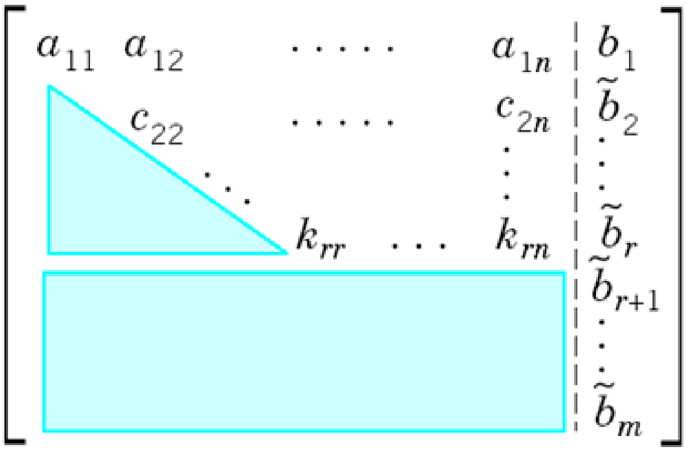
- Ex.4

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -1 \\ -3 & 8 & 9 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & 9 & -12 \\ 0 & 2 & 6 & -1 \\ 0 & 8 & 3 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & 9 & -12 \\ 0 & 0 & 2.4 & 3.8 \\ 0 & 0 & -11.4 & 29.2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & 6 \\ 0 & 5 & 9 & -12 \\ 0 & 0 & 2.4 & 3.8 \\ 0 & 0 & 0 & 47.25 \end{vmatrix} = 1134$$

- **Rank in Terms of Determinants**
  - $m \times n$ 행렬 $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ 가 계수 $r(\geq 1)$ 을 갖기 위한 필요충분조건은 **A**의 $r \times r$ 부분행렬의 행렬식은 0이 되지 않는 반면, **A**의 $(r+1)\times(r+1)$ 또는 그 이상의 행을 갖는 모든 정방 부분행렬의 행렬식은 0이 되는 것임.
  - 특히, **A**가 정방행렬 $n \times n$ 일 때, 계수가 n 일 필요충분조건은 $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ 임.



Row echelon form

(행사다리꼴)

Determinants. Cramer's rule

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- Cramer의 정리(행렬식에 의한 선형연립방정식의 해)

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\cdots\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}
\quad \xrightarrow[D \neq 0]{\text{Cramer의 법칙}} \quad
x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n = \frac{D_n}{D}
$$

D_k는 D의 k번째 열을 $b_1, \cdots, b_n$인 원소로 갖는 열로 대치하여 얻은 행렬식

Determinants. Cramer's rule

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- Example)

$$2x - 5y = 23$$
$$4x + 6y = -2$$

Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan Elimination

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- Inverse Matrix (역행렬)
  - $\mathbf{A}^{-1}$: $\mathbf{A} = \left[a_{jk}\right]$ 의 역행렬 → $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$
  - **Nonsingular Matrix (정칙행렬)**: 역행렬을 갖는 경우
  - **Singular Matrix (특이행렬)**: 역행렬을 갖지 않는 경우
  - 역행렬을 가지면 그 역행렬은 유일함.
- **Existence of the Inverse (역행렬의 존재성)**

$\mathbf{A}$가 $n \times n$행렬일 때, 역행렬 $\mathbf{A}^{-1}$이 존재 $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = n$ $\Leftrightarrow$ $\det(\mathbf{A}) \neq 0$

$\operatorname{rank}(\mathbf{A}) = n$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$는 정칙행렬

$\operatorname{rank}(\mathbf{A}) < n$ $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}$는 특이행렬

Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan Elimination

- **Gauss-Jordan 소거법에 의한 역행렬의 결정**

$n \times n$ 행렬 $\mathbf{A}$의 역행렬 $\mathbf{A}^{-1}$을 결정하기 위한 방법

$$\tilde{\mathbf{A}} = [\mathbf{A} \;\; \vdots \;\; \mathbf{I}] \xrightarrow{\text{Gauss 소거법}} [\mathbf{I} \;\; \vdots \;\; \mathbf{K}] \quad \Rightarrow \quad \therefore \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{K}$$

Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan Elimination

- **Ex. 1**

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 1\\ -1 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{A}\ \vdots\ \mathbf{I}]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 3 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l}\left[\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 2 & -1 & 0 & 1\end{array}\right]\end{array}\begin{array}{l}\\ 2\text{행}+3\times 1\text{행}\\ 3\text{행}-1\text{행}\end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 7 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -5 & -4 & -1 & 1\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \\ 3\text{행}-2\text{행}\end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & -2 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3.5 & 1.5 & 0.5 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2\end{array}\right]\begin{array}{l}-1\text{행}\\ 0.5\times 2\text{행}\\ -0.2\times 3\text{행}\end{array}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & 0.6 & 0.4 & -0.4\\ 0 & 1 & 0 & -1.3 & -0.2 & 0.7\\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2\end{array}\right]\begin{array}{l}1\text{행}+2\times 3\text{행}\\ 2\text{행}-3.5\times 3\text{행}\\ \\ \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -0.7 & 0.2 & 0.3\\ 0 & 1 & 0 & -1.3 & -0.2 & 0.7\\ 0 & 0 & 1 & 0.8 & 0.2 & -0.2\end{array}\right]\begin{array}{l}1\text{행}+2\text{행}\\ \\ \\ \end{array}$$

Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan Elimination

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- Useful Formulas for inverses

$$n \times n \text{ 행렬 } \mathbf{A} = [a_{jk}] \text{ 의 역행렬은 } \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} [\mathbf{C}_{jk}]^T = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{21} & \cdots & \mathbf{C}_{n1} \\ \mathbf{C}_{12} & \mathbf{C}_{22} & \cdots & \mathbf{C}_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{1n} & \mathbf{C}_{2n} & \cdots & \mathbf{C}_{nn} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{C}_{jk}$ 는 $\det \mathbf{A}$에서 a_{jk}의 여인수

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ 의 역행렬은 } \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan Elimination

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- Ex. 3. Determine the inverse using the formula

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det \mathbf{A} = -1(-7) - 1 \cdot 13 + 2 \cdot 8 = 10, \quad \mathbf{C}_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -7, \ \mathbf{C}_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2, \ \mathbf{C}_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$$\mathbf{C}_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -13, \ \mathbf{C}_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -2, \ \mathbf{C}_{32} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7,$$

$$\mathbf{C}_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 8, \ \mathbf{C}_{23} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2, \ \mathbf{C}_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{bmatrix}$$

Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan Elimination

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- Computation of an nth-order determinant using formula involves **n!** Multiplications (determinant alone!).
- computing time of determinant (when one multiplication takes 10^{-9} sec)

n	10	15	20	25
Time	0.004 sec	22 min	77 years	$0.5 * 10^9$ years

- Explicit formula for inverses is used mainly for n = 2 (NOT for computing inverses of large matrices)

Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan Elimination

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- 대각행렬의 역행렬
  - 대각행렬 $\mathbf{A} = \lfloor a_{jk} \rfloor$ 의 역행렬이 존재 ⇔ $a_{jj} \neq 0 \ (j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$
  - A^{-1} ???

$\mathbf{A}^{-1}$은 $1/a_{11},\ \cdots,\ 1/a_{nn}$ 이 대각원소인 행렬

- Ex. 4

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan Elimination

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- 두 행렬의 곱

$$(\mathbf{AC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

$$(\mathbf{AC}\cdots\mathbf{PQ})^{-1} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{P}^{-1}\cdots\mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$$

- 역행렬의 역행렬

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$$

Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan Elimination

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- 행렬의 곱에 대한 특이 성질. Cancellation Laws (약분법)
  - 행렬의 곱은 교환법칙이 성립하지 않음. $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ (일반적으로 성립하지 않음)
  - $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ 일 때 $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ 또는 $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ 이 아닐 수도 있다. $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
  - $\mathbf{AC} = \mathbf{AD}$ 일 때 $\mathbf{C} \neq \mathbf{D}$ 일 수도 있다 (심지어 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ 일 때에도).
- Cancellation Laws (약분법칙)

  $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$를 $n \times n$ 행렬이라 하자.

  - $\operatorname{rank} \mathbf{A} = n$ 이고 $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ 이면, $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.
  - $\operatorname{rank} \mathbf{A} = n$ 이면 $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ 이면 $\mathbf{B} = \mathbf{0}$.

  $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$이면서 $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$이고 $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$이면 $\operatorname{rank} \mathbf{A} < n$ 이고 $\operatorname{rank} \mathbf{B} < n$

  - $\mathbf{A}$ 가 특이행렬이면 $\mathbf{AB}$ 와 $\mathbf{BA}$ 도 또한 특이행렬
  - 행렬곱의 행렬식 $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$

Programming

Gauss Elimination의 프로그래밍 예.
(Kreyszig, 837p).

Table 20.1 Gauss Elimination

ALGORITHM GAUSS ($\tilde{\mathbf{A}} = [a_{jk}] = [\mathbf{A} \quad \mathbf{b}]$)

This algorithm computes a unique solution $\mathbf{x} = [x_j]$ of the system (1) or indicates that (1) has no unique solution.

INPUT: Augmented $n \times (n + 1)$ matrix $\tilde{\mathbf{A}} = [a_{jk}]$, where $a_{j,n+1} = b_j$

OUTPUT: Solution $\mathbf{x} = [x_j]$ of (1) or message that the system (1) has no unique solution

For $k = 1, \cdots, n - 1$, do:

1 If $a_{jk} = 0$ for all $j \geqq k$ then OUTPUT "No unique solution exists." Stop

[*Procedure completed unsuccessfully;* **A** *is singular*]

2 Else exchange the contents of rows $\tilde{j}$ and k of $\tilde{\mathbf{A}}$ with $\tilde{j}$ the smallest $j \geqq k$ such that $|a_{jk}|$ is maximum in column k.

3 For $j = k + 1, \cdots, n$, do:

$$m_{jk} := \frac{a_{jk}}{a_{kk}}$$

4 For $p = k + 1, \cdots, n + 1$, do:

$$a_{jp} := a_{jp} - m_{jk}a_{kp}$$

End

End

End

5 If $a_{nn} = 0$ then OUTPUT "No unique solution exists."
Stop
Else

6 $$x_n = \frac{a_{n,n+1}}{a_{nn}}$$ [*Start back substitution*]

For $i = n - 1, \cdots, 1$, do:

7 $$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(a_{i,n+1} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j\right)$$

End

OUTPUT $\mathbf{x} = [x_j]$. Stop

End GAUSS

Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan Elimination

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- Computing time for Gauss Elimination (n x n matrix) ~ **n^3**

Algorithm	$n = 1000$	$n = 10\,000$
Elimination	0.7 sec	11 min
Back substitution	0.001 sec	0.1 sec

When one operation takes 10^{-9} sec

Inverse of a Matrix. Gauss-Jordan Elimination

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- 행렬방정식의 해법
  - 직접법 – 정해를 구함
    - Gauss Elimination
    - Cramer's Rule
    - Gauss-Jordan method
    - LU decomposition
  - 반복법 – 수치해를 구함 (→ Kreyszig, ch.20)
    - Gauss-Seidel method
    - Jacobi Method
    - Successive relaxation method
    - Conjugate gradient method