Symmetric, Skew-Symmetric, and Orthogonal Matrices (대칭, 반대칭, 직교행렬)

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- Square matrix (정방행렬) $\mathbf{A} = [a_{jk}]$ 에 대하여
  - Symmetric: $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$
  - Skew-Symmetric: $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$
  - Orthogonal: $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$
- 실수 정방행렬 A는 대칭행렬 R과 반대칭행렬 S의 합으로 표현할 수 있다.

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T\right), \qquad \mathbf{S} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\right)$$

  - Ex. 2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & -8 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \mathbf{R} + \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 9.0 & 3.5 & 3.5 \\ 3.5 & 3.0 & -2.0 \\ 3.5 & -2.0 & 3.0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1.5 & -1.5 \\ -1.5 & 0 & -6.0 \\ 1.5 & 6.0 & 0 \end{bmatrix}$$

Symmetric, Skew-Symmetric, and Orthogonal Matrices (대칭, 반대칭, 직교행렬)

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- Eigenvalues of Symmetric and Skew-Symmetric Matrices (8.5)
  - 대칭행렬의 고유값은 실수 (8.2 Ex. 1)
  - 반대칭행렬의 고유값은 순 허수이거나 영 $\begin{bmatrix} 0 & 9 & -12 \\ -9 & 0 & 20 \\ 12 & -20 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 0,\ -25i,\ 25i$
- Orthogonal Transformation (직교변환): $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ $(\mathbf{A}$는 직교행렬$)$

Ex) 각도 θ 만큼의 평면회전은 직교변환이다.

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- 내적값

$$\mathbf{a} \bullet \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = [a_1 a_2 \cdots a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (R^n\text{의 임의의 벡터 } \mathbf{a},\ \mathbf{b})$$

  - 길이 또는 노름(Norm) :

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{\mathbf{a} \bullet \mathbf{a}} = \sqrt{\mathbf{a}^T \mathbf{a}}$$

Symmetric, Skew-Symmetric, and Orthogonal Matrices (대칭, 반대칭, 직교행렬)

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- **Invariance of Inner Product**
  - 직교변환은 벡터의 내적값을 보존,
  - 또한 벡터의 길이 또는 노름(norm)도 보존함.

$$\mathrm{u} \bullet \mathrm{v} = \mathrm{u}^T\mathrm{v} = (\mathrm{Aa})^T\mathrm{Ab} = \mathrm{a}^T\mathrm{A}^T\mathrm{Ab} = \mathrm{a}^T\mathrm{Ib} = \mathrm{a}^T\mathrm{b} = \mathrm{a} \bullet \mathrm{b}$$

- **Orthonormality of Column and Row Vectors**
  - 실수 정방행렬이 직교일 필요충분조건은 열벡터 $\mathbf{a}_1, \cdots, \mathbf{a}_n$ (또한 행벡터들)이 정규직교계(Orthonormal System)를 형성하는 것임.

$$\mathbf{a}_j \bullet \mathbf{a}_k = \mathbf{a}_j^T\mathbf{a}_k = \begin{cases} 0 & (j \neq k) \\ 1 & (j = k) \end{cases} \qquad \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^{-1}$$

$$\mathrm{I} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{A} = \mathrm{A}^T\mathrm{A} = \begin{bmatrix} \mathrm{a}_1^T \\ \mathrm{a}_2^T \\ \vdots \\ \mathrm{a}_n^T \end{bmatrix} [\mathrm{a}_1 \mathrm{a}_2 \cdots \mathrm{a}_n] = \begin{bmatrix} \mathrm{a}_1^T\mathrm{a}_1 & \mathrm{a}_1^T\mathrm{a}_2 & \cdots & \mathrm{a}_1^T\mathrm{a}_n \\ & & \cdots & \\ & & \cdots & \\ \mathrm{a}_n^T\mathrm{a}_1 & \mathrm{a}_n^T\mathrm{a}_2 & \cdots & \mathrm{a}_n^T\mathrm{a}_n \end{bmatrix}$$

Symmetric, Skew-Symmetric, and Orthogonal Matrices (대칭, 반대칭, 직교행렬)

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- **Determinant of an Orthogonal Matrix**
  - 직교행렬의 행렬식의 값은 +1 또는 -1

$$1 = \det \mathrm{I} = \det (\mathrm{AA}^{-1}) = \det (\mathrm{AA}^{\mathrm{T}}) = \det \mathrm{A} \det \mathrm{A}^{\mathrm{T}} = (\det \mathrm{A})^2$$

- **Eigenvalues of an Orthogonal Matrix**
  - 직교행렬의 고유값은 실수 또는 공액복소수이고 절대값은 1

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \quad -1,\ (5+i\sqrt{11})/6,\ (5-i\sqrt{11})/6$$

- **Basis of Eigenvectors**

만일 $n \times n$행렬 $\mathbf{A}$가 n개의 서로 다른 고유값을 가지면 ,

이 행렬 $\mathbf{A}$의 고유벡터 $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n$은 R^n의 기저가 된다.

$$\mathrm{x} = c_1\mathrm{x}_1 + c_2\mathrm{x}_2 + \cdots + c_n\mathrm{x}_n$$

$$\begin{aligned}\mathrm{y} = \mathrm{Ax} &= \mathrm{A}(c_1\mathrm{x}_1 + c_2\mathrm{x}_2 + \cdots + c_n\mathrm{x}_n) \\ &= c_1\mathrm{Ax}_1 + c_2\mathrm{Ax}_2 + \cdots + c_n\mathrm{Ax}_n \\ &= c_1\lambda_1\mathrm{x}_1 + c_2\lambda_2\mathrm{x}_2 + \cdots + c_n\lambda_n\mathrm{x}_n\end{aligned}$$

임의의 x에 대한 A의 연산 (복잡!)
→ 스칼라의 곱의 합 (간단!)

- **Basis (기저):**
  - **벡터공간내의 최대로 가능한 수의 일차독립인 벡터로 구성되는 집합이며, 기저가 되는 벡터의 수는 차원**

Eigenbases. Diagonalization. Quadratic Forms

- **Ex.1 Eigenbasis, Nondistinct Eigenvalues. Nonexistence**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eigenbases. Diagonalization. Quadratic Forms

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- **Symmetric Matrices**
  - 대칭행렬은 고유벡터로 구성된 정규직교 기저를 가짐.

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

Eigenbases. Diagonalization. Quadratic Forms

- **Similarity Transformation (상사변환)**

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} \qquad (n \times n \text{ 정칙행렬 } \mathbf{P})$$

- **Eigenvalues and Eigenvectors of similar matrices**

$\hat{\mathbf{A}}$가 $\mathbf{A}$에 상사이면 $\hat{\mathbf{A}}$는 $\mathbf{A}$와 같은 고유값을 갖는다.

$\mathbf{x}$가 $\mathbf{A}$의 고유벡터이면 $\mathbf{y} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$는 같은 고유값에 대응되는 $\hat{\mathbf{A}}$의 고유벡터가 된다.

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{Ax} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AIx} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{APP}^{-1}\mathrm{x} = \hat{\mathrm{A}}(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{x}) = \lambda \mathrm{P}^{-1}\mathrm{x} \qquad \mathrm{Ax} = \lambda \mathrm{x} \to \mathrm{P}^{-1}\mathrm{Ax} = \mathrm{P}^{-1}\lambda \mathrm{x}$$

- **Diagonalization of a matrix (행렬의 대각화)**

만일 $n \times n$행렬 $\mathbf{A}$가 고유벡터의 기저를 가지면

$$\mathbf{D} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{AX}$$

는 대각행렬이 되고, $\mathbf{A}$의 고유값들이 주대각선의 원소가 된다.

여기서 $\mathbf{X}$는 이들 고유벡터들을 열벡터로 하는 행렬이다.

또한 $\mathbf{D}^m = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}^m\mathbf{X}$

Eigenbases. Diagonalization. Quadratic Forms

- **Ex.**

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Eigenbases. Diagonalization. Quadratic Forms

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- **Diagonalization of a matrix (행렬의 대각화)**

만일 $n \times n$행렬 $\mathbf{A}$가 고유벡터의 기저를 가지면

$$\mathbf{D} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}$$

는 대각행렬이 되고, $\mathbf{A}$의 고유값들이 주대각선의 원소가 된다.

여기서 $\mathbf{X}$는 이들 고유벡터들을 열벡터로 하는 행렬이다.

또한 $\mathbf{D}^m = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}^m\mathbf{X}$

Eigenbases. Diagonalization. Quadratic Forms

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- **Ex.4 Diagonalize**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7.3 & 0.2 & -3.7 \\ -11.5 & 1.0 & 5.5 \\ 17.7 & 1.8 & -9.3 \end{bmatrix}$$

특성방정식 : $-\lambda^3 - \lambda^2 + 12\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad$ 고유값 : $\lambda = 3,\ \lambda = \text{-}4,\ \lambda = 0$

$\Rightarrow \quad$ 고유벡터 : $\begin{bmatrix} \text{-}1 \\ 3 \\ \text{-}1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \text{-}1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}^{-1} = \begin{bmatrix} -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{D} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} -0.7 & 0.2 & 0.3 \\ -1.3 & -0.2 & 0.7 \\ 0.8 & 0.2 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 9 & 4 & 0 \\ -3 & -12 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Eigenbases. Diagonalization. Quadratic Forms

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- **Quadratic Forms (2차 형식).**

벡터 $\mathbf{x}$의 성분 $x_1, \ \cdots, \ x_n$ 으로 구성된 2차형식 : $Q = \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_j x_k$

$$\begin{aligned} = \ & a_{11}x_1^{\ 2} + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\ & + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^{\ 2} + \cdots + a_{2n}x_2x_n \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^{\ 2} \end{aligned}$$

- **Principal Axes Theorem (주축정리)**
  - **치환 $\mathbf{x} = \mathbf{X}\mathbf{y}$ 에 의하여 2차 형식은 주축형식 또는 표준형으로 변환될 수 있음.**

표준형 : $Q = \mathbf{y}^T \mathbf{D}\mathbf{y} = \lambda_1 y_1^{\ 2} + \lambda_2 y_2^{\ 2} + \cdots + \lambda_n y_n^{\ 2}$

$\lambda_1, \ \lambda_2, \ \cdots, \ \lambda_n$: 행렬 $\mathbf{A}$(대칭행렬)의 고유값

$\mathbf{X}$: 고유값에 대응하는고유벡터 $x_1, \ x_2, \ \cdots, \ x_n$을 열벡터로 하는 직교행렬

Eigenbases. Diagonalization. Quadratic Forms

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- **Ex.5 Quadratic form. Symmetric Coefficient Matrix**

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 3{x_1}^2 + 10x_1x_2 + 2{x_2}^2$$

$4+6=10=5+5$이므로 $c_{jk} = \frac{1}{2}\left(a_{jk} + a_{kj}\right)$로 하는 행렬 $\mathbf{A}$에 대응하는 대칭행렬

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 3{x_1}^2 + 10x_1x_2 + 2{x_2}^2$$

Eigenbases. Diagonalization. Quadratic Forms

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- **Ex.6 Transformation to Principal Axes. Conic Sections**
  - **Find out what type of conic section (원뿔곡선) the following quadratic form represents and transform it to principal axes:**

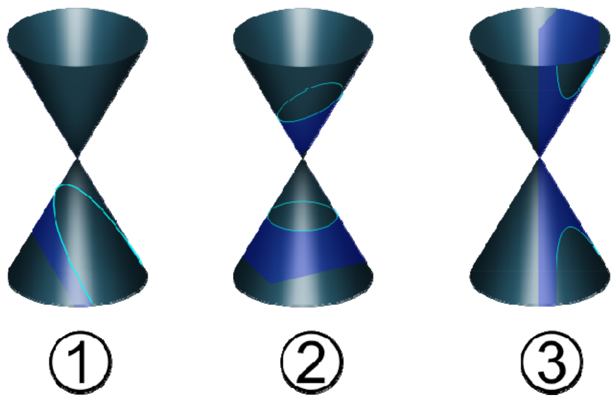
$$Q = 17x_1^{\,2} - 30x_1x_2 + 17x_2^{\,2} = 128$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 17 & -15 \\ -15 & 17 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{특성방정식} \ : \ (17 - \lambda)^2 - 15^2 = 0$$

$$\Rightarrow \ \text{고유값} \ : \ \lambda = 2, \ 32 \ \Rightarrow \ Q = 2y_1^{\,2} + 32y_2^{\,2}$$

$$\therefore \ \frac{y_1^{\,2}}{8^2} + \frac{y_2^{\,2}}{2^2} = 1$$



Parabola (포물선)

Circle or Ellipse (원 혹은 타원)

Hyperbola (쌍곡선)

http://en.wikipedia.org/wiki/Conic_section

Eigenbases. Diagonalization. Quadratic Forms

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- **Definiteness**
  - $Q(x) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}\mathbf{x}$ and symmetric matrix **A** are called
  - Positive definite if Q(x)>0 for all x≠0
  - Negative definite if Q(x)<0 for all x≠0
  - Indefinite if Q(x)>0 and Q(x)<0 for all x≠0
- **Positive Definiteness**
  - All the principal minors are positive

$$a_{11} > 0 \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0 \qquad \det \mathbf{A} > 0$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Eigenbases. Diagonalization. Quadratic Forms

SEOUL NATIONAL UNIVERSITY

- **Example) compliance matrix of elastic material**
  - Positive strains energy requires the Positive definiteness of matrix. → constraints of elastic parameters (elastic modulus and Poisson's ratio)

$$W = \frac{1}{2}\sigma^T S \sigma$$

W: strain energy intensity
S: compliance matrix

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{c} E > 0 \\ -1 < \nu < \frac{1}{2} \end{array}$$