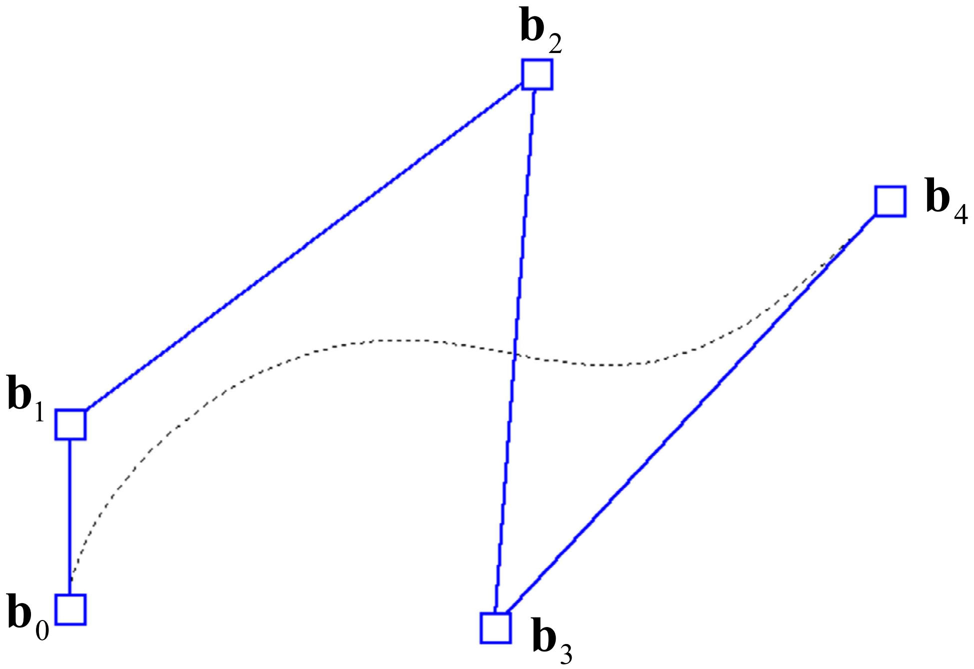
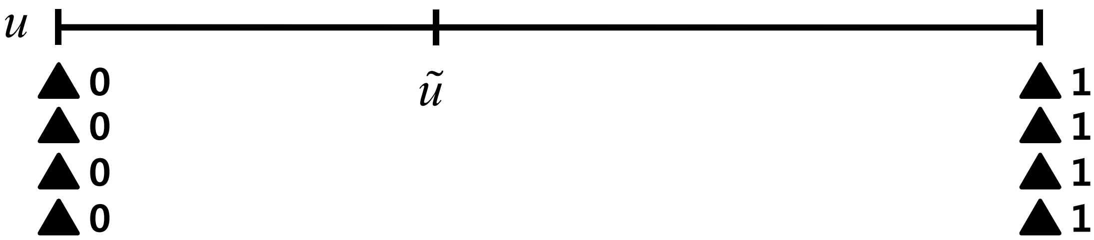
1. (de Casteljau Algorithm) 다음 그림은 어느 선박의 선수부 Section Line을 나타낸 것이다. 5개의 조정점(Control Point) $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, $\mathbf{b}_4$ 이 주어졌을 때, 조정점을 잇는 각각의 선분을 $\hat{u}:(1-\hat{u})$로 4번 연속적으로 내분하는 점은 4차 곡선 상에 있게 된다.





1) de Casteljau Algorithm을 이용하여 $\hat{u}$ 에서의 곡선 상의 점을 구하고 그 점이 조정점 $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, $\mathbf{b}_4$ 으로 정의되는 4차 Bezier 곡선 상의 점임을 보여라. (식 유도 과정을 적으시오.)

<풀이>

de Casteljau algorithm을 단계별로 적용하면 그림 1, 2, 3, 4와 같다.

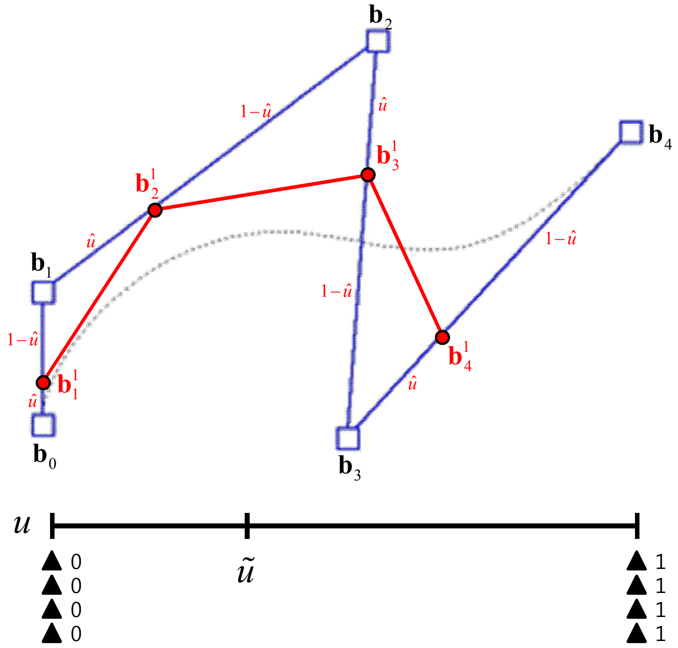


그림 1 de Casteljau algorithm 1회 수행

주어진 조정점 $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, $\mathbf{b}_4$ 를 잇는 각 선분을 $\hat{u}:(1-\hat{u})$ 으로 한번 내분하여 얻은 점 $\mathbf{b}_1^1$, $\mathbf{b}_2^1$, $\mathbf{b}_3^1$, $\mathbf{b}_4^1$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_1^1 &= (1-\hat{u})\mathbf{b}_0^0 + \hat{u}\mathbf{b}_1^0 \\
\mathbf{b}_2^1 &= (1-\hat{u})\mathbf{b}_1^0 + \hat{u}\mathbf{b}_2^0 \\
\mathbf{b}_3^1 &= (1-\hat{u})\mathbf{b}_2^0 + \hat{u}\mathbf{b}_3^0 \\
\mathbf{b}_4^1 &= (1-\hat{u})\mathbf{b}_3^0 + \hat{u}\mathbf{b}_4^0
\end{aligned} \tag{1}$$

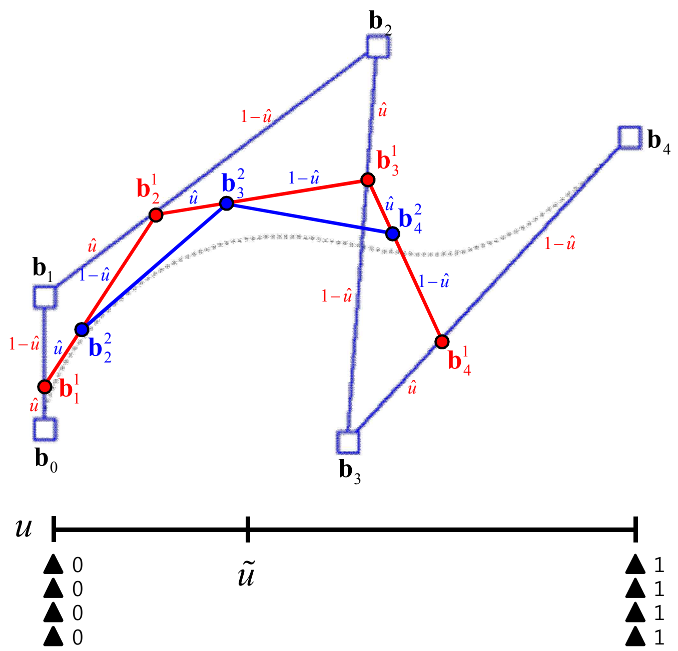


그림 2 de Casteljau algorithm 2회 수행

점 $\mathbf{b}_1^1$, $\mathbf{b}_2^1$, $\mathbf{b}_3^1$, $\mathbf{b}_4^1$를 잇는 각 선분을 $\hat{u}:(1-\hat{u})$으로 다시 내분하면 점 $\mathbf{b}_2^2$, $\mathbf{b}_3^2$, $\mathbf{b}_4^2$를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_2^2 &= (1-\hat{u})\mathbf{b}_1^1 + \hat{u}\mathbf{b}_2^1 \\ \mathbf{b}_3^2 &= (1-\hat{u})\mathbf{b}_2^1 + \hat{u}\mathbf{b}_3^1 \\ \mathbf{b}_4^2 &= (1-\hat{u})\mathbf{b}_3^1 + \hat{u}\mathbf{b}_4^1\end{aligned} \tag{2}$$

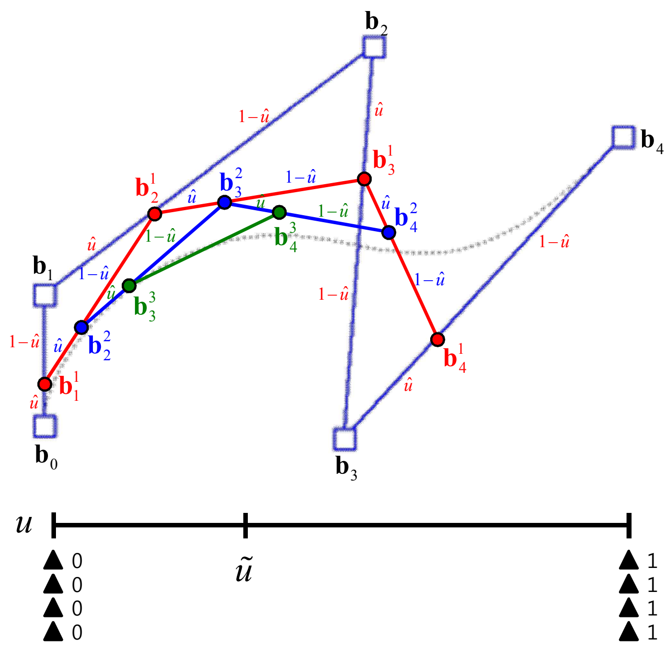


그림 3 de Casteljau algorithm 3회 수행

점 $\mathbf{b}_2^2$, $\mathbf{b}_3^2$, $\mathbf{b}_4^2$를 잇는 각 선분을 $\hat{u}:(1-\hat{u})$으로 다시 내분하면 점 $\mathbf{b}_3^3$, $\mathbf{b}_4^3$를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_3^3 &= (1-\hat{u})\mathbf{b}_2^2 + \hat{u}\mathbf{b}_3^2 \\ \mathbf{b}_4^3 &= (1-\hat{u})\mathbf{b}_3^2 + \hat{u}\mathbf{b}_4^2\end{aligned} \tag{3}$$

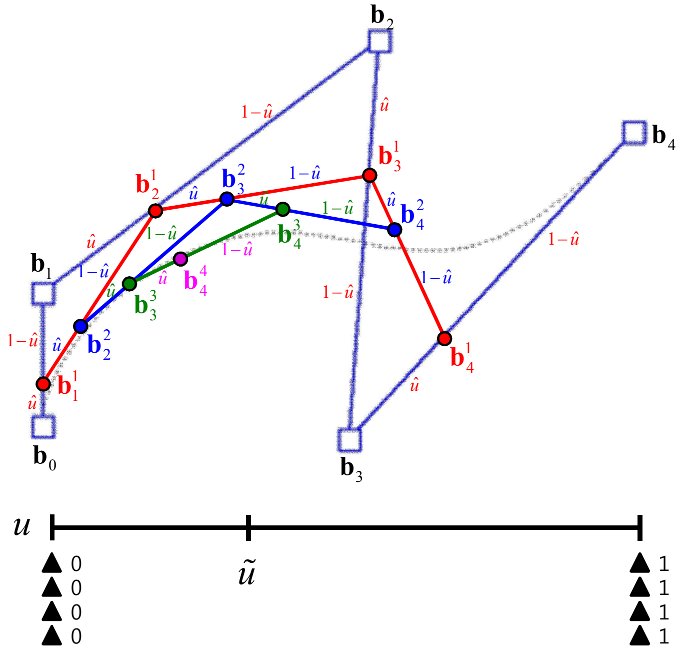


그림 4 de Casteljau algorithm 4회 수행

마지막으로 점 $\mathbf{b}_3^3$, $\mathbf{b}_4^3$를 잇는 각 선분을 $\hat{u}:(1-\hat{u})$으로 다시 내분하면 점 $\mathbf{b}_4^4$를 얻을 수 있다.

$$\mathbf{b}_4^4 = (1-\hat{u})\mathbf{b}_3^3 + \hat{u}\mathbf{b}_4^3 \tag{4}$$

위의 식 (1), (2), (3), (4) 를 이용하여 점 $\mathbf{b}_4^4$를 주어진 조정점 $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, $\mathbf{b}_4$로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_1^1 &= (1-\hat{u})\mathbf{b}_0^0 + \hat{u}\mathbf{b}_1^0 \\ \mathbf{b}_2^1 &= (1-\hat{u})\mathbf{b}_1^0 + \hat{u}\mathbf{b}_2^0 \\ \mathbf{b}_3^1 &= (1-\hat{u})\mathbf{b}_2^0 + \hat{u}\mathbf{b}_3^0 \\ \mathbf{b}_4^1 &= (1-\hat{u})\mathbf{b}_3^0 + \hat{u}\mathbf{b}_4^0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_2^2 &= (1-\hat{u})\mathbf{b}_1^1 + \hat{u}\mathbf{b}_2^1 = (1-\hat{u})\left[(1-\hat{u})\mathbf{b}_0^0 + \hat{u}\mathbf{b}_1^0\right] + \hat{u}\left[(1-\hat{u})\mathbf{b}_1^0 + \hat{u}\mathbf{b}_2^0\right] = (1-\hat{u})^2\mathbf{b}_0^0 + 2\hat{u}(1-\hat{u})\mathbf{b}_1^0 + \hat{u}^2\mathbf{b}_2^0 \\ \mathbf{b}_3^2 &= (1-\hat{u})\mathbf{b}_2^1 + \hat{u}\mathbf{b}_3^1 = (1-\hat{u})\left[(1-\hat{u})\mathbf{b}_1^0 + \hat{u}\mathbf{b}_2^0\right] + \hat{u}\left[(1-\hat{u})\mathbf{b}_2^0 + \hat{u}\mathbf{b}_3^0\right] = (1-\hat{u})^2\mathbf{b}_1^0 + 2\hat{u}(1-\hat{u})\mathbf{b}_2^0 + \hat{u}^2\mathbf{b}_3^0 \\ \mathbf{b}_4^2 &= (1-\hat{u})\mathbf{b}_3^1 + \hat{u}\mathbf{b}_4^1 = (1-\hat{u})\left[(1-\hat{u})\mathbf{b}_2^0 + \hat{u}\mathbf{b}_3^0\right] + \hat{u}\left[(1-\hat{u})\mathbf{b}_3^0 + \hat{u}\mathbf{b}_4^0\right] = (1-\hat{u})^2\mathbf{b}_2^0 + 2\hat{u}(1-\hat{u})\mathbf{b}_3^0 + \hat{u}^2\mathbf{b}_4^0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_3^3 &= (1-\hat{u})\mathbf{b}_2^2 + \hat{u}\mathbf{b}_3^2 = (1-\hat{u})\left[(1-\hat{u})^2\mathbf{b}_0^0 + 2\hat{u}(1-\hat{u})\mathbf{b}_1^0 + \hat{u}^2\mathbf{b}_2^0\right] + \hat{u}\left[(1-\hat{u})^2\mathbf{b}_1^0 + 2\hat{u}(1-\hat{u})\mathbf{b}_2^0 + \hat{u}^2\mathbf{b}_3^0\right]\\ &= (1-\hat{u})^3\mathbf{b}_0^0 + 3\hat{u}(1-\hat{u})^2\mathbf{b}_1^0 + +3\hat{u}^2(1-\hat{u})\mathbf{b}_2^0 + \hat{u}^3\mathbf{b}_3^0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_4^3 &= (1-\hat{u})\mathbf{b}_3^2 + \hat{u}\mathbf{b}_4^2 = (1-\hat{u})\left[(1-\hat{u})^2\mathbf{b}_1^0 + 2\hat{u}(1-\hat{u})\mathbf{b}_2^0 + \hat{u}^2\mathbf{b}_3^0\right] + \hat{u}\left[(1-\hat{u})^2\mathbf{b}_2^0 + 2\hat{u}(1-\hat{u})\mathbf{b}_3^0 + \hat{u}^2\mathbf{b}_4^0\right]\\ &= (1-\hat{u})^3\mathbf{b}_1^0 + 3\hat{u}(1-\hat{u})^2\mathbf{b}_2^0 + 3\hat{u}^2(1-\hat{u})\mathbf{b}_3^0 + \hat{u}^3\mathbf{b}_4^0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{b}_4^4 &= (1-\hat{u})\mathbf{b}_3^3 + \hat{u}\mathbf{b}_4^3\\ &= (1-\hat{u})\left[(1-\hat{u})^3\mathbf{b}_0^0 + 3\hat{u}(1-\hat{u})^2\mathbf{b}_1^0 + +3\hat{u}^2(1-\hat{u})\mathbf{b}_2^0 + \hat{u}^3\mathbf{b}_3^0\right]\\ &\quad +\hat{u}\left[(1-\hat{u})^3\mathbf{b}_1^0 + 3\hat{u}(1-\hat{u})^2\mathbf{b}_2^0 + 3\hat{u}^2(1-\hat{u})\mathbf{b}_3^0 + \hat{u}^3\mathbf{b}_4^0\right]\\ &= (1-\hat{u})^4\mathbf{b}_0^0 + 4\hat{u}(1-\hat{u})^3\mathbf{b}_1^0 + 6\hat{u}^2(1-\hat{u})^2\mathbf{b}_2^0 + 4\hat{u}^3(1-\hat{u})^1\mathbf{b}_3^0 + \hat{u}^4\mathbf{b}_4^0\end{aligned}$$

$$\therefore \mathbf{b}_4^4(\hat{u}) = (1-\hat{u})^4\mathbf{b}_0^0 + 4\hat{u}(1-\hat{u})^3\mathbf{b}_1^0 + 6\hat{u}^2(1-\hat{u})^2\mathbf{b}_2^0 + 4\hat{u}^3(1-\hat{u})^1\mathbf{b}_3^0 + \hat{u}^4\mathbf{b}_4^0 \qquad (5)$$

따라서, 주어진 조정점 $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, $\mathbf{b}_4$를 이용하여 de Casteljau algorithm을 수행한 결과는 4차 Bezier 곡선 식과 동일함을 알 수 있다.

2) 위 4차 Bezier 곡선은 $\hat{u}$ 에서의 곡선 상의 점을 기준으로 2개의 4차 Bezier 곡선으로 나눌 수 있다. 이 때 생성되는 2개의 4차 Bezier 곡선의 조정점을 구하시오.

<풀이>

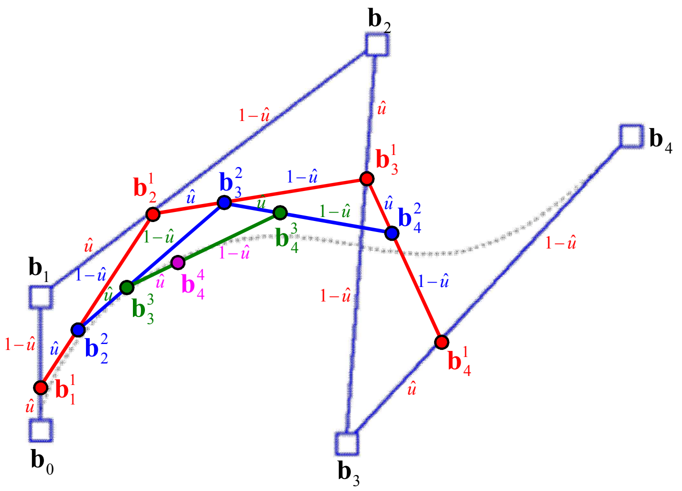


그림 5 de Casteljau algorithm 4회 수행 결과

문제 1)에서 주어진 5개의 조정점 $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, $\mathbf{b}_4$를 이용하여 de Casteljau algorithm을 4회 수행하면 4차 Bezier 곡선 상의 점을 구할 수 있음을 확인하였다. 또한 이 때 구한 점은 4차

Bezier 곡선을 분할하는 점으로 생각할 수 있다. 이 때 분할된 두 곡선을 다음과 같이 de Casteljau algorithm 수행 과정에서 계산한 점들을 조정점으로 가진다.

- 곡선 1의 조정점: $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_1^1$, $\mathbf{b}_2^2$, $\mathbf{b}_3^3$, $\mathbf{b}_4^4$
- 곡선 2의 조정점: $\mathbf{b}_4^4$, $\mathbf{b}_4^3$, $\mathbf{b}_4^2$, $\mathbf{b}_4^1$, $\mathbf{b}_4$

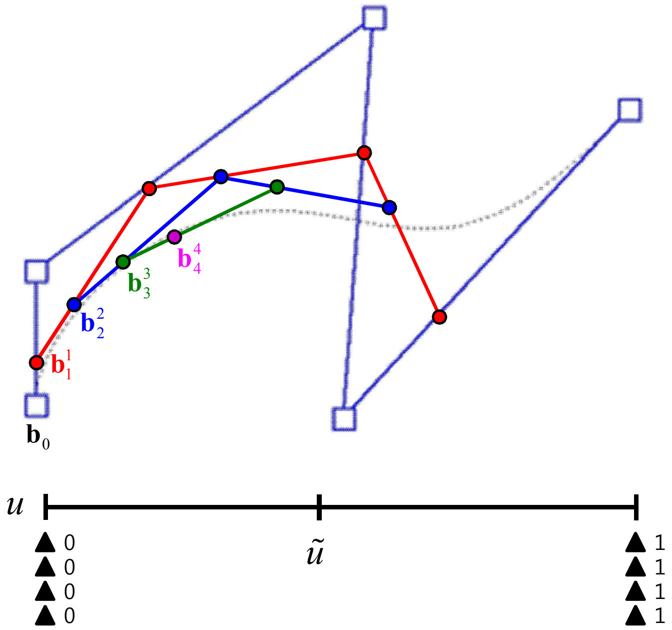


그림 6 곡선 1의 조정점 $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_1^1$, $\mathbf{b}_2^2$, $\mathbf{b}_3^3$, $\mathbf{b}_4^4$

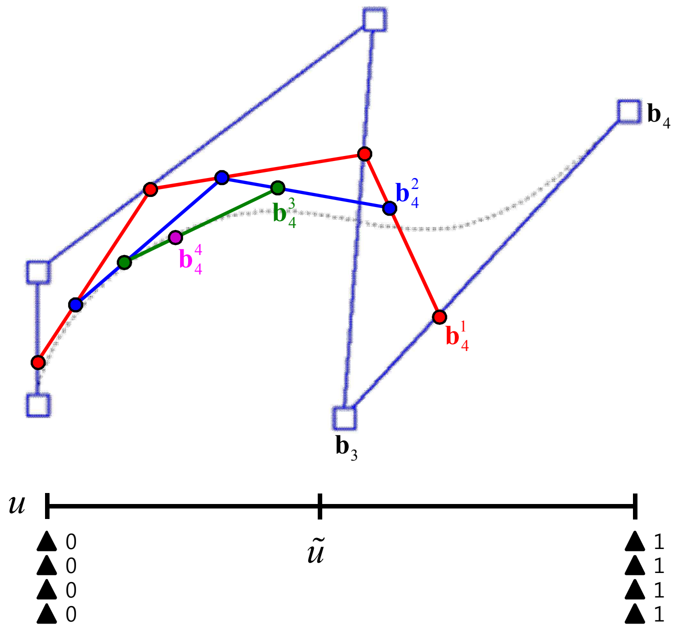
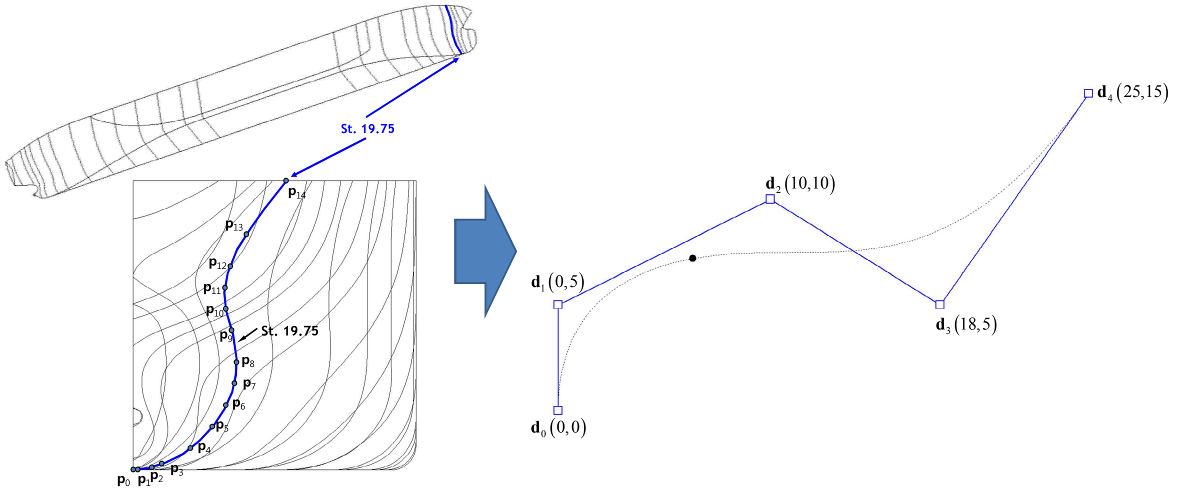
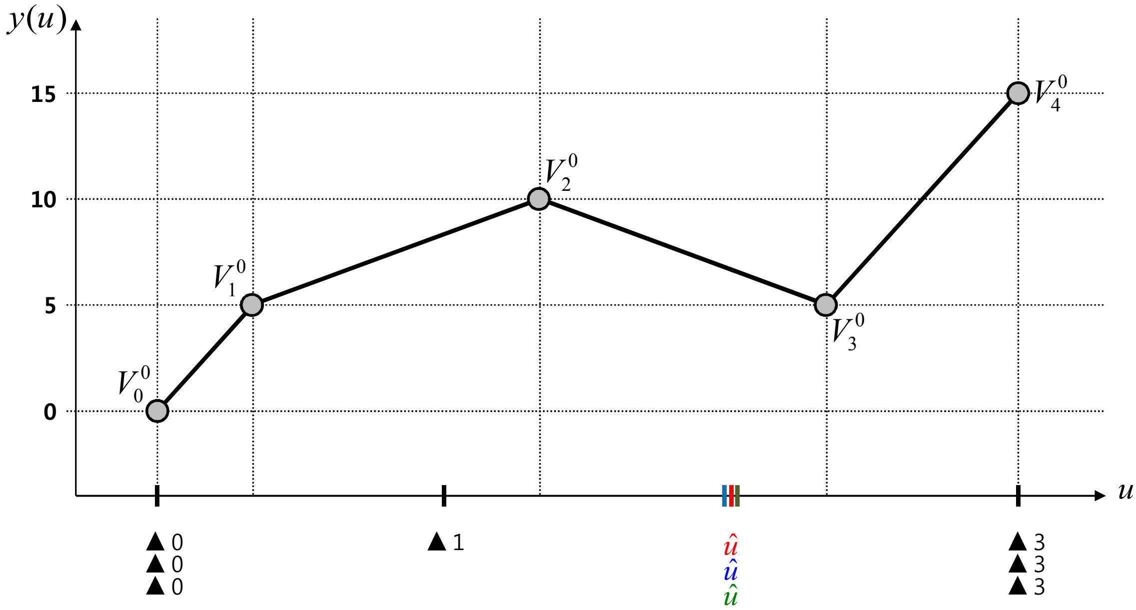


그림 7 곡선 2의 조정점 $\mathbf{b}_4^4$, $\mathbf{b}_4^3$, $\mathbf{b}_4^2$, $\mathbf{b}_4^1$, $\mathbf{b}_4$

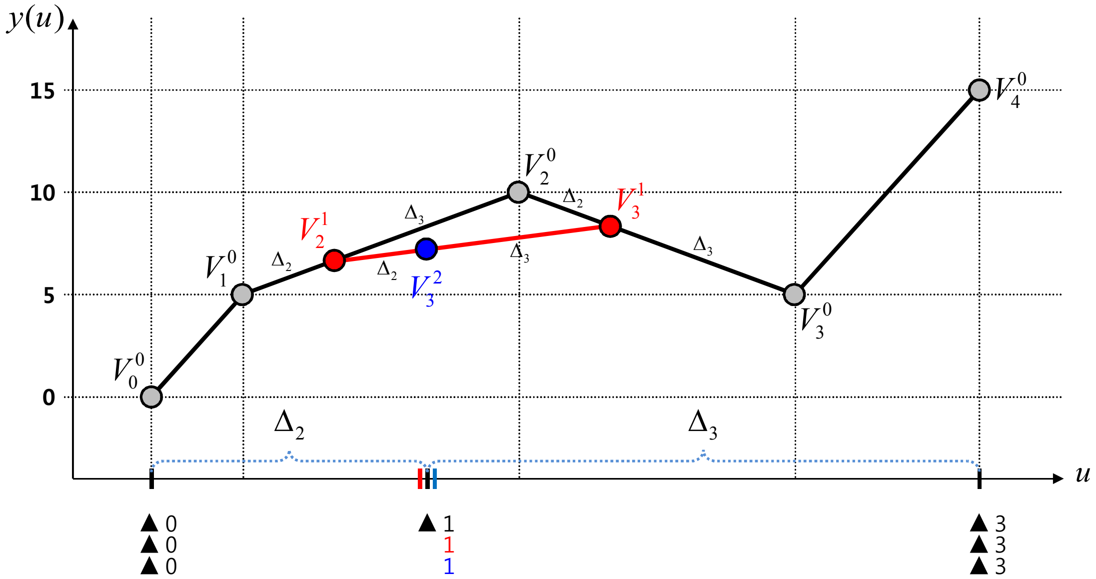
2. 다음 그림은 어느 선박의 선수부 Section Line을 나타낸 것이다.



5개의 조정점 $\mathbf{d}_0$, $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_2$, $\mathbf{d}_3$, $\mathbf{d}_4$이 위의 그림과 같이 주어졌을 때, B-Spline function y-control ordinate(V_0^0, V_1^0, V_2^0, V_3^0, V_4^0)를 표현하면 다음 그림과 같다. Knot는 그림과 같이 주어져 있다.



1) 그림의 3차 B-Spline function은 2개의 3차 Bezier function으로 구성되어 있다. Knot 간의 간격을 이용하여 2개의 3차 Bezier function의 y-control ordinate를 도시하시오.



2개의 3차 Bezier function을 결합할 때 만족하는 연속 조건인 C1, C2 조건을 이용하여 3차 Bezier function의 y-control ordinate를 구하면 위 그림과 같다. 이 때 각각의 Bezier function y-control ordinate는 다음과 같다.

- 좌측 Bezier function의 y-control ordinate: V_0^0, V_1^0, V_2^1, V_3^2
- 우측 Bezier function의 y-control ordinate: V_3^2, V_3^1, V_3^0, V_4^0

2) (de Boor Algorithm) $1 < u < 2$ 인 곳에 Knot $\hat{u}$ 를 3번 삽입한 후 계산할 수 있는 B-Spline function y-ordinate $y(\hat{u})$을 구하시오.

① Knot Insertion 수행 전

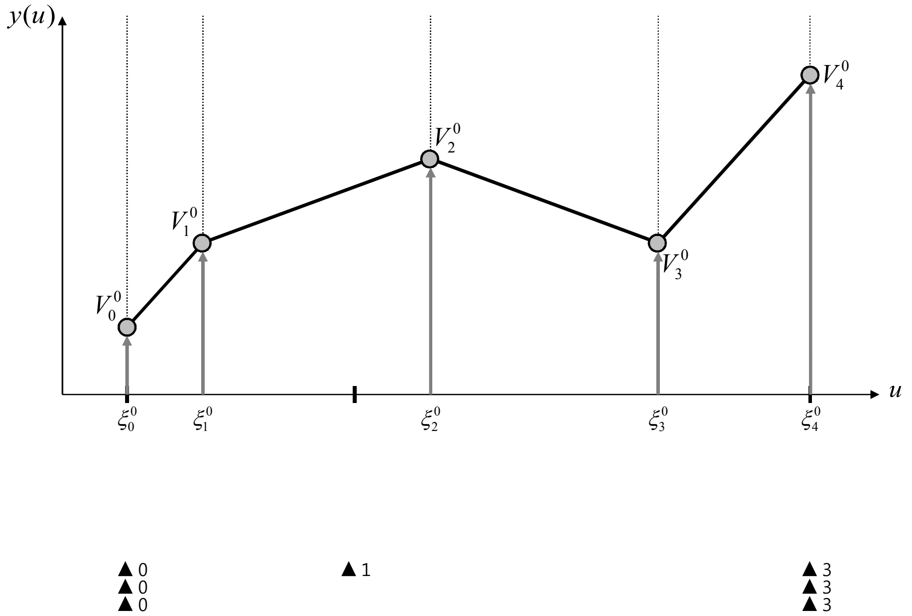


그림 8 주어진 B-Spline function y-control ordinate와 Greville abscissa

주어진 Knot를 이용하여 Greville abscissa를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\xi_0^0 &= \frac{0+0+0}{3} = 0 \\
\xi_1^0 &= \frac{0+0+1}{3} = \frac{1}{3} \\
\xi_2^0 &= \frac{0+1+3}{3} = \frac{4}{3} \\
\xi_3^0 &= \frac{1+3+3}{3} = \frac{7}{3} \\
\xi_4^0 &= \frac{3+3+3}{3} = 3
\end{aligned} \tag{6}$$

그리고 주어진 B-Spline function y-control ordinate (V_0^0, V_1^0, V_2^0, V_3^0, V_4^0)는 Greville abscissa 상에 존재한다.

② 1st Knot Insertion

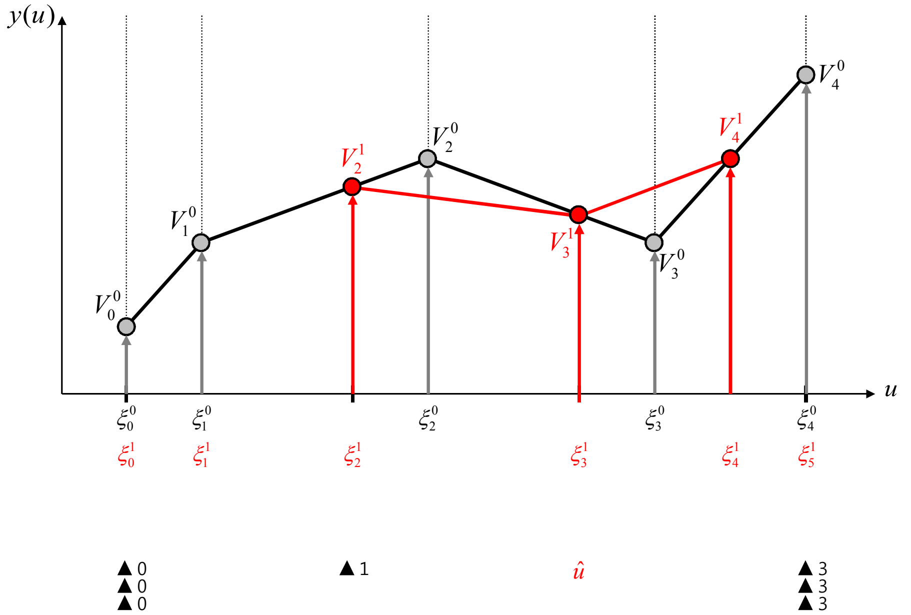


그림 9 1st Knot Insertion

Knot를 $1<\hat{u}<3$ 위치에 하나를 추가하면, 추가된 Knot에 의해 Greville abscissa가 다음과 같이 변경된다.

$$
\begin{aligned}
\xi_0^1 &= \frac{0+0+0}{3} = 0 = \xi_0^0 \\
\xi_1^1 &= \frac{0+0+1}{3} = \frac{1}{3} = \xi_1^0 \\
\xi_2^1 &= \frac{0+1+\hat{u}}{3} = \frac{\hat{u}+1}{3} \\
\xi_3^1 &= \frac{1+\hat{u}+3}{3} = \frac{\hat{u}+4}{3} \\
\xi_4^1 &= \frac{\hat{u}+3+3}{3} = \frac{\hat{u}+6}{3} \\
\xi_5^1 &= \frac{3+3+3}{3} = 3 = \xi_4^0
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Knot를 $1<\hat{u}<3$ 위치에 하나를 추가함에 따라 생성되는 B-Spline y-control ordinate는 V_2^1, V_3^1, V_4^1 이며 각 ordinate는 선분 $\overline{V_1^0V_2^0}$, $\overline{V_2^0V_3^0}$, $\overline{V_3^0V_4^0}$ 상에 내분점으로 위치하고 있다. V_2^1를 Greville abscissa 와의 비례식으로 구하면 다음과 같다.

$$\overline{V_1^0V_2^1} : \overline{V_2^1V_2^0} = \overline{\xi_1^0\xi_2^1} : \overline{\xi_2^1\xi_2^0}$$

$$\overline{\xi_1^0\xi_2^1} = \frac{\hat{u}+1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{\hat{u}}{3}$$

$\overline{\xi_2^1 \xi_2^0} = \frac{4}{3} - \frac{\hat{u}+1}{3} = \frac{3-\hat{u}}{3}$

$$\therefore V_2^1 = \frac{3-\hat{u}}{3} V_1^0 + \frac{\hat{u}}{3} V_2^0 \tag{8}$$

마찬가지 방법으로 V_3^1, V_4^1를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} V_3^1 &= \frac{3-\hat{u}}{3} V_2^0 + \frac{\hat{u}}{3} V_3^0 \\ V_4^1 &= \frac{3-\hat{u}}{2} V_2^0 + \frac{\hat{u}-1}{2} V_3^0 \end{aligned} \tag{9}$$

③ 2^{nd} Knot Insertion

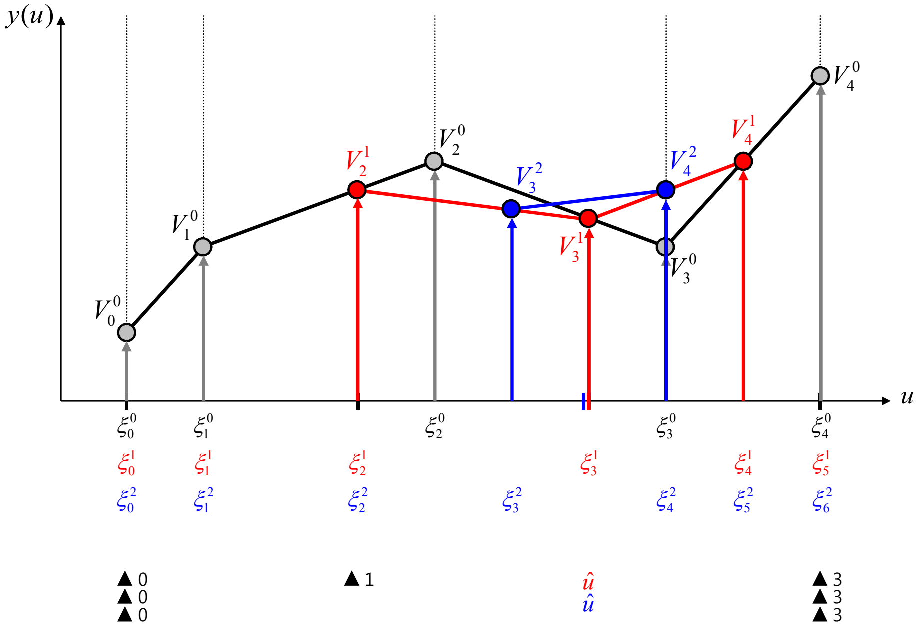


그림 10 2^{nd} Knot Insertion

Knot를 $1<\hat{u}<3$ 위치에 하나를 더 추가하면, 추가된 Knot에 의해 Greville abscissa가 다음과 같이 변경된다.

$$\begin{aligned}
\xi_0^2 &= \frac{0+0+0}{3} = 0 = \xi_0^0 \\
\xi_1^2 &= \frac{0+0+1}{3} = \frac{1}{3} = \xi_1^0 \\
\xi_2^2 &= \frac{0+1+\hat{u}}{3} = \frac{\hat{u}+1}{3} = \xi_2^1 \\
\xi_3^2 &= \frac{1+\hat{u}+\hat{u}}{3} = \frac{2\hat{u}+1}{3} \\
\xi_4^2 &= \frac{\hat{u}+\hat{u}+3}{3} = \frac{2\hat{u}+3}{3} \\
\xi_5^2 &= \frac{\hat{u}+3+3}{3} = \frac{\hat{u}+6}{3} = \xi_4^1 \\
\xi_6^2 &= \frac{3+3+3}{3} = 3 = \xi_4^0
\end{aligned} \tag{10}$$

Knot를 $1<\hat{u}<3$ 위치에 하나 더 추가함에 따라 생성되는 B-Spline y-control ordinate는 V_3^2, V_4^2 이며 각 ordinate는 선분 $\overline{V_2^1V_3^1}$, $\overline{V_3^1V_4^1}$ 상에 내분점으로 위치하고 있다. V_3^2 를 Greville abscissa 와의 비례식으로 구하면 다음과 같다.

$$\overline{V_2^1 V_3^2} : \overline{V_3^2 V_3^1} = \overline{\xi_2^1 \xi_3^2} : \overline{\xi_3^2 \xi_3^1}$$

$$\overline{\xi_2^1 \xi_3^2} = \frac{2\hat{u}+1}{3} - \frac{\hat{u}+1}{3} = \frac{\hat{u}}{3}$$

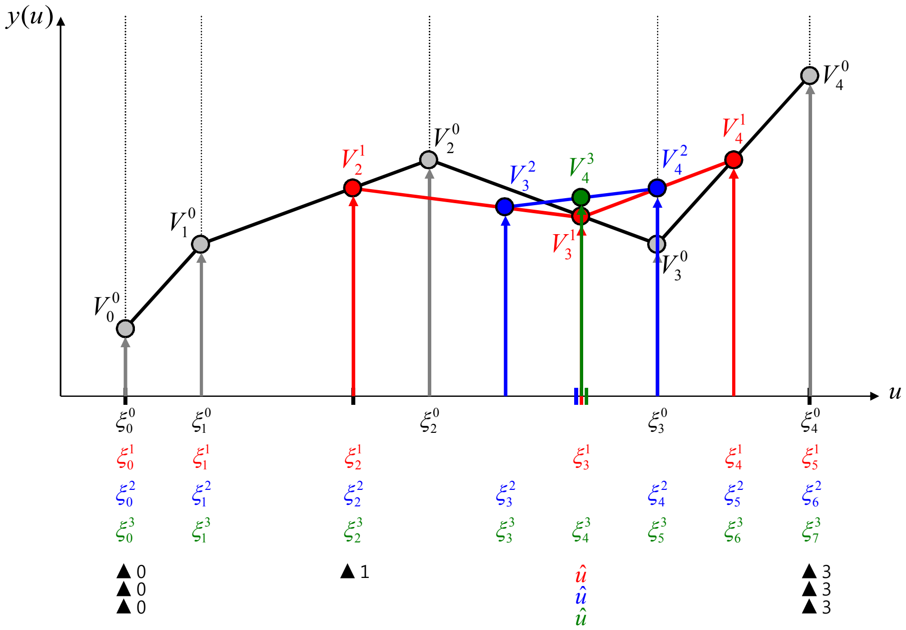
$$\overline{\xi_3^2 \xi_3^1} = \frac{\hat{u}+4}{3} - \frac{2\hat{u}+1}{3} = \frac{3-\hat{u}}{3}$$

$$\therefore V_3^2 = \frac{3-\hat{u}}{3} V_2^1 + \frac{\hat{u}}{3} V_3^1 \tag{11}$$

마찬가지 방법으로 V_4^2 를 구하면 다음과 같다.

$$V_4^2 = \frac{3-\hat{u}}{2} V_3^1 + \frac{\hat{u}-1}{2} V_4^1 \tag{12}$$

④ 3rd Knot Insertion



Knot를 $1 < \hat{u} < 3$ 위치에 하나를 더 추가하면, 추가된 Knot에 의해 Greville abscissa가 다음과 같이 변경된다.

$$
\begin{aligned}
\xi_0^3 &= \frac{0+0+0}{3} = 0 = \xi_0^0 \\
\xi_1^3 &= \frac{0+0+1}{3} = \frac{1}{3} = \xi_1^0 \\
\xi_2^3 &= \frac{0+1+\hat{u}}{3} = \frac{\hat{u}+1}{3} = \xi_2^1 \\
\xi_3^3 &= \frac{1+\hat{u}+\hat{u}}{3} = \frac{2\hat{u}+1}{3} = \xi_3^2 \\
\xi_4^3 &= \frac{\hat{u}+\hat{u}+\hat{u}}{3} = \hat{u} \\
\xi_5^3 &= \frac{\hat{u}+\hat{u}+3}{3} = \frac{2\hat{u}+3}{3} = \xi_4^2 \\
\xi_6^3 &= \frac{\hat{u}+3+3}{3} = \frac{\hat{u}+6}{3} = \xi_4^1 \\
\xi_7^3 &= \frac{3+3+3}{3} = 3 = \xi_4^0
\end{aligned} \tag{13}
$$

Knot를 $1 < \hat{u} < 3$ 위치에 하나 더 추가함에 따라 생성되는 B-Spline y-control ordinate는 V_4^3 이며 각 ordinate는 선분 $\overline{V_3^2 V_4^2}$ 상에 내분점으로 위치하고 있다. V_4^3 를 Greville abscissa 와의 비례식으로 구하면 다음과 같다.

$\overline{V_3^2 V_4^3} : \overline{V_4^3 V_4^2} = \overline{\xi_3^2 \xi_4^3} : \overline{\xi_4^3 \xi_4^2}$

$$\overline{\xi_3^2 \xi_4^3} = \hat{u} - \frac{2\hat{u}+1}{3} = \frac{\hat{u}-1}{3}$$

$$\overline{\xi_4^3 \xi_4^2} = \frac{2\hat{u}+3}{3} - \hat{u} = \frac{3-\hat{u}}{3}$$

$$\therefore V_4^3 = \frac{3-\hat{u}}{2} V_3^2 + \frac{\hat{u}-1}{2} V_4^2 \tag{14}$$

식 (8)~(14)를 이용하여 V_4^3를 정리하면 다음과 같다.

$$V_2^1 = \frac{3-\hat{u}}{3} V_1^0 + \frac{\hat{u}}{3} V_2^0$$

$$V_3^1 = \frac{3-\hat{u}}{3} V_2^0 + \frac{\hat{u}}{3} V_3^0$$

$$V_4^1 = \frac{3-\hat{u}}{2} V_3^0 + \frac{\hat{u}-1}{2} V_4^0$$

$$V_3^2 = \frac{3-\hat{u}}{3} V_2^1 + \frac{\hat{u}}{3} V_3^1 = \frac{3-\hat{u}}{3}\left(\frac{3-\hat{u}}{3} V_1^0 + \frac{\hat{u}}{3} V_2^0\right) + \frac{\hat{u}}{3}\left(\frac{3-\hat{u}}{3} V_2^0 + \frac{\hat{u}}{3} V_3^0\right)$$

$$= \frac{(3-\hat{u})^2}{9} V_1^0 + \frac{2\hat{u}(3-\hat{u})}{9} V_2^0 + \frac{\hat{u}^2}{9} V_3^0$$

$$V_4^2 = \frac{3-\hat{u}}{2} V_3^1 + \frac{\hat{u}-1}{2} V_4^1 = \frac{3-\hat{u}}{2}\left(\frac{3-\hat{u}}{3} V_2^0 + \frac{\hat{u}}{3} V_3^0\right) + \frac{\hat{u}-1}{2}\left(\frac{3-\hat{u}}{2} V_3^0 + \frac{\hat{u}-1}{2} V_4^0\right)$$

$$= \frac{(3-\hat{u})^2}{6} V_2^0 + \left[\frac{\hat{u}(3-\hat{u})}{6} + \frac{(\hat{u}-1)(3-\hat{u})}{4}\right] V_3^0 + \frac{(\hat{u}-1)^2}{4} V_4^0$$

$$= \frac{(3-\hat{u})^2}{6} V_2^0 + \frac{(5\hat{u}-3)(3-\hat{u})}{12} V_3^0 + \frac{(\hat{u}-1)^2}{4} V_4^0$$

$$V_4^3 = \frac{3-\hat{u}}{2} V_3^2 + \frac{\hat{u}-1}{2} V_4^2$$

$$= \frac{3-\hat{u}}{2}\left[\frac{(3-\hat{u})^2}{9} V_1^0 + \frac{2\hat{u}(3-\hat{u})}{9} V_2^0 + \frac{\hat{u}^2}{9} V_3^0\right]$$

$$+ \frac{\hat{u}-1}{2}\left[\frac{(3-\hat{u})^2}{6} V_2^0 + \frac{(5\hat{u}-3)(3-\hat{u})}{12} V_3^0 + \frac{(\hat{u}-1)^2}{4} V_4^0\right]$$

$$= \frac{(3-\hat{u})^3}{18} V_1^0 + \left[\frac{2\hat{u}(3-\hat{u})^2}{18} + \frac{(\hat{u}-1)(3-\hat{u})^2}{12}\right] V_2^0$$

$$+ \left[\frac{\hat{u}^2(3-\hat{u})}{18} + \frac{(\hat{u}-1)(5\hat{u}-3)(3-\hat{u})}{24}\right] V_3^0 + \frac{(\hat{u}-1)^3}{8} V_4^0$$

$$= \frac{(3-\hat{u})^3}{18} V_1^0 + \frac{(7\hat{u}-3)(3-\hat{u})^2}{36} V_2^0 + \frac{(19\hat{u}^2-24\hat{u}+9)(3-\hat{u})}{72} V_3^0 + \frac{(\hat{u}-1)^3}{8} V_4^0$$

3) (Cox-de Boor Algorithm) $u = \hat{u}$ 에서의 B-Spline function y-ordinate는 Cox-de Boor Algorithm을 이용하여 구할 수 있다. 이 결과가 위의 문제에서 구한 결과가 동일함을 보이시오.

- de Boor Algorithm: $V_i^k(u) = \dfrac{u_{i+n-k} - u}{u_{i+n-k} - u_{i-1}} V_{i-1}^{k-1}(u) + \dfrac{u - u_{i-1}}{u_{i+n-k} - u_{i-1}} V_i^{k-1}(u)$
- Cox-de Boor Algorithm: $N_i^n(u) = \dfrac{u - u_{i-1}}{u_{i+n-1} - u_{i-1}} N_i^{n-1}(u) + \dfrac{u_{i+n} - u}{u_{i+n} - u_i} N_{i+1}^{n-1}(u)$

$$N_i^0(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } u_{i-1} \le u < u_i \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

- B-Spline Function: $y(u) = \sum_{i=0}^{D-1} V_i^0 N_i^n(u)$

(D: 주어진 B-Spline control ordinate 의 개수, n: 곡선의 차수)

<풀이>

Cox-de Boor algorithm으로 전개한 식은 다음과 같다. 단, $u_3 \le \hat{u} < u_4$ 이므로 $N_4^0(\hat{u}) = 1$ 이다.

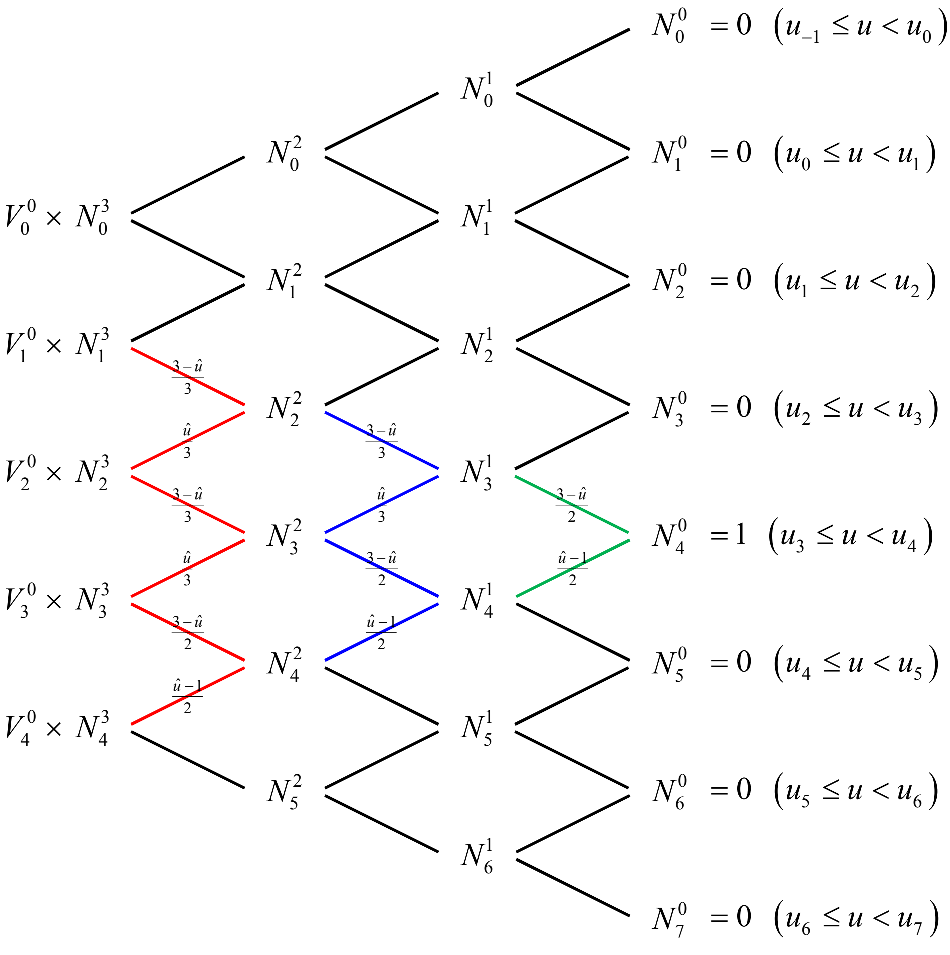


그림 11 Cox-de Boor algorithm을 이용한 B-Spline function 식 계산

문제 2)에서 풀이한 V_4^3에 대한 수식을 그림으로 표현하면 다음과 같다. (de Boor algorithm)

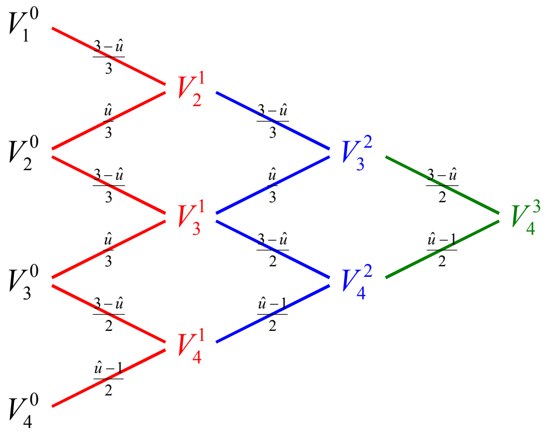


그림 12 de Boor algorithm을 이용한 B-Spline function 식 계산

그림 11과 그림 12를 비교해 볼 때, Cox-de Boor algorithm을 이용한 B-Spline function 식과 de Boor algorithm을 이용한 B-Spline function 식이 동일함을 알 수 있다.

그림 11을 참고하여 Cox-de Boor algorithm으로 3차 B-Spline function을 계산하면 다음과 같다.

① $n=1$

$$N_3^1(\hat{u})=\frac{3-\hat{u}}{2}$$

$$N_4^1(\hat{u})=\frac{\hat{u}-1}{2}$$

② $n=2$

$$\begin{aligned}N_2^2(\hat{u})&=\frac{3-\hat{u}}{3}N_3^1(\hat{u})\\&=\frac{3-\hat{u}}{3}\cdot\frac{3-\hat{u}}{2}\\&=\frac{(3-\hat{u})^2}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N_3^2(\hat{u})&=\frac{\hat{u}}{3}N_3^1(\hat{u})+\frac{3-\hat{u}}{2}N_4^1(\hat{u})\\&=\frac{\hat{u}}{3}\cdot\frac{3-\hat{u}}{2}+\frac{3-\hat{u}}{2}\cdot\frac{\hat{u}-1}{2}=\frac{3-\hat{u}}{2}\left(\frac{\hat{u}}{3}+\frac{\hat{u}-1}{2}\right)\\&=\frac{(3-\hat{u})(5\hat{u}-3)}{12}\end{aligned}$$

$$N_4^2(\hat{u}) = \frac{\hat{u}-1}{2} N_4^1(\hat{u})$$
$$= \frac{\hat{u}-1}{2} \cdot \frac{\hat{u}-1}{2}$$
$$= \frac{(\hat{u}-1)^2}{4}$$

③ $n = 3$

$$N_1^3(\hat{u}) = \frac{3-\hat{u}}{3} N_2^2(\hat{u})$$
$$= \frac{3-\hat{u}}{3} \cdot \frac{(3-\hat{u})^2}{6}$$
$$= \frac{(3-\hat{u})^3}{18}$$

$$N_2^3(\hat{u}) = \frac{\hat{u}}{3} N_2^2(\hat{u}) + \frac{3-\hat{u}}{3} N_3^2(\hat{u})$$
$$= \frac{\hat{u}}{3} \cdot \frac{(3-\hat{u})^2}{6} + \frac{3-\hat{u}}{3} \cdot \frac{(3-\hat{u})(5\hat{u}-3)}{12} = \frac{(3-\hat{u})^2}{6}\left(\frac{\hat{u}}{3} + \frac{5\hat{u}-3}{6}\right)$$
$$= \frac{(3-\hat{u})^2(7\hat{u}-3)}{36}$$

$$N_3^3(\hat{u}) = \frac{\hat{u}}{3} N_3^2(\hat{u}) + \frac{3-\hat{u}}{2} N_4^2(\hat{u})$$
$$= \frac{\hat{u}}{3} \cdot \frac{(3-\hat{u})(5\hat{u}-3)}{12} + \frac{3-\hat{u}}{2} \cdot \frac{(\hat{u}-1)^2}{4} = \frac{3-\hat{u}}{2}\left\{\frac{\hat{u}(5\hat{u}-3)}{18} + \frac{(\hat{u}-1)^2}{4}\right\}$$
$$= \frac{(3-\hat{u})(19\hat{u}^2-24\hat{u}+9)}{72}$$

$$N_4^3(\hat{u}) = \frac{\hat{u}-1}{2} N_4^2(\hat{u})$$
$$= \frac{\hat{u}-1}{2} . \frac{(\hat{u}-1)^2}{4}$$
$$= \frac{(\hat{u}-1)^2}{8}$$

①, ②, ③ 에서 계산한 결과를 이용하여 $r(\hat{u})$를 구하면 다음과 같다.

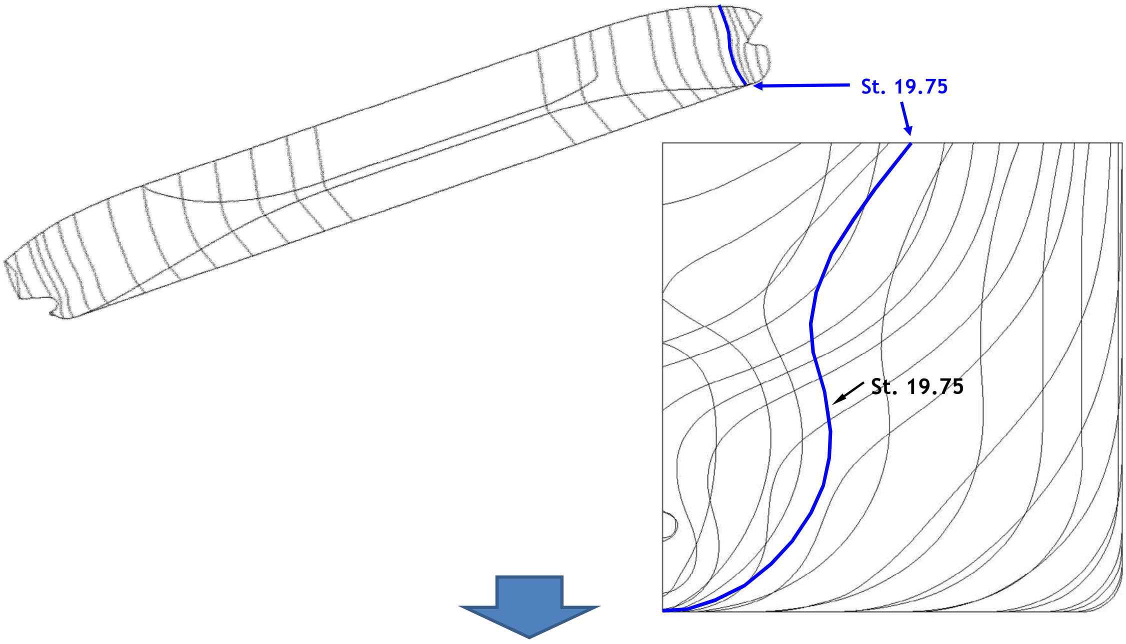
$$r(\hat{u}) = V_1^0 N_1^3(\hat{u}) + V_2^0 N_2^3(\hat{u}) + V_3^0 N_3^3(\hat{u}) + V_4^0 N_4^3(\hat{u})$$

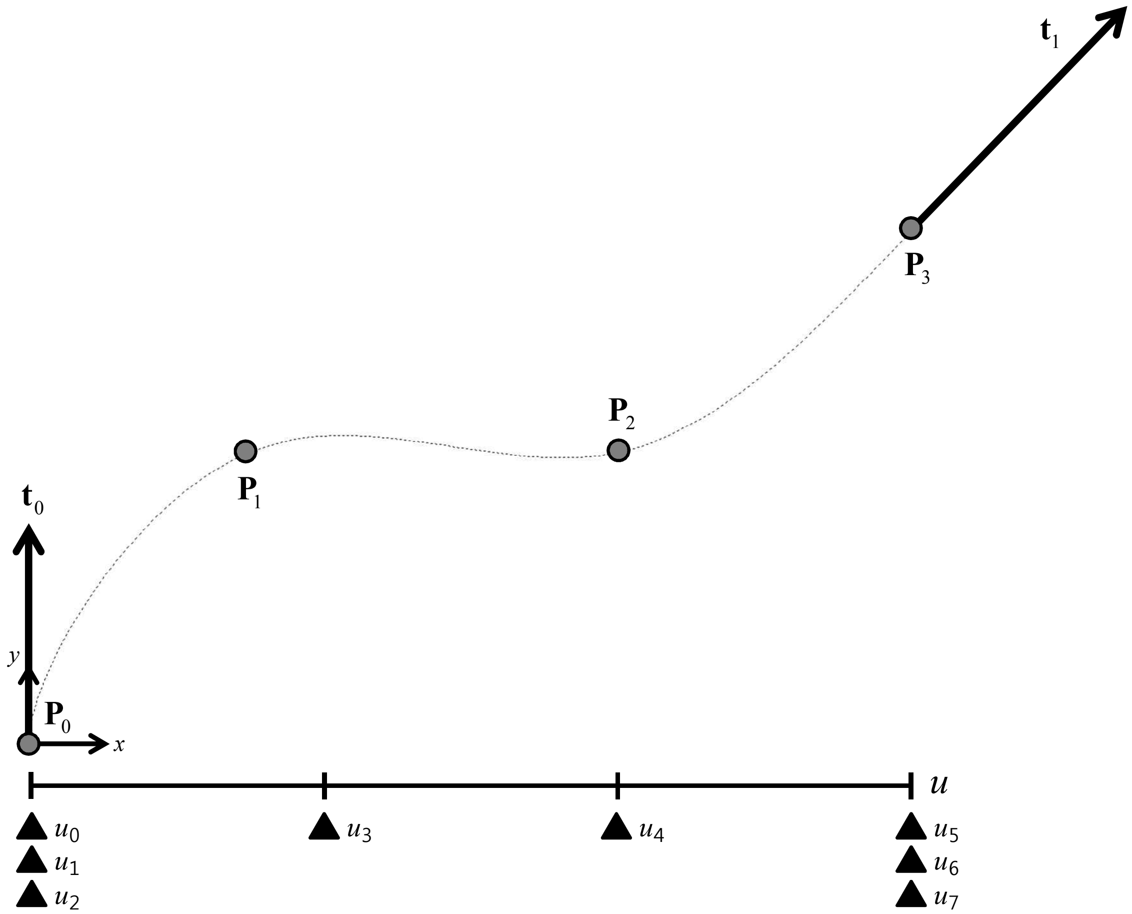
$$\therefore r(\hat{u}) = \frac{(3-\hat{u})^3}{18} V_1^0 + \frac{(7\hat{u}-3)(3-\hat{u})^2}{36} V_2^0 + \frac{(19\hat{u}^2 - 24\hat{u} + 9)(3-\hat{u})}{72} V_3^0 + \frac{(\hat{u}-1)^3}{8} V_4^0 \quad (15)$$

위 식 (15)는 문제 2-2)에서 Knot Insertion(de Boor algorithm)으로 계산한 결과와 동일함을 확인할 수 있다.

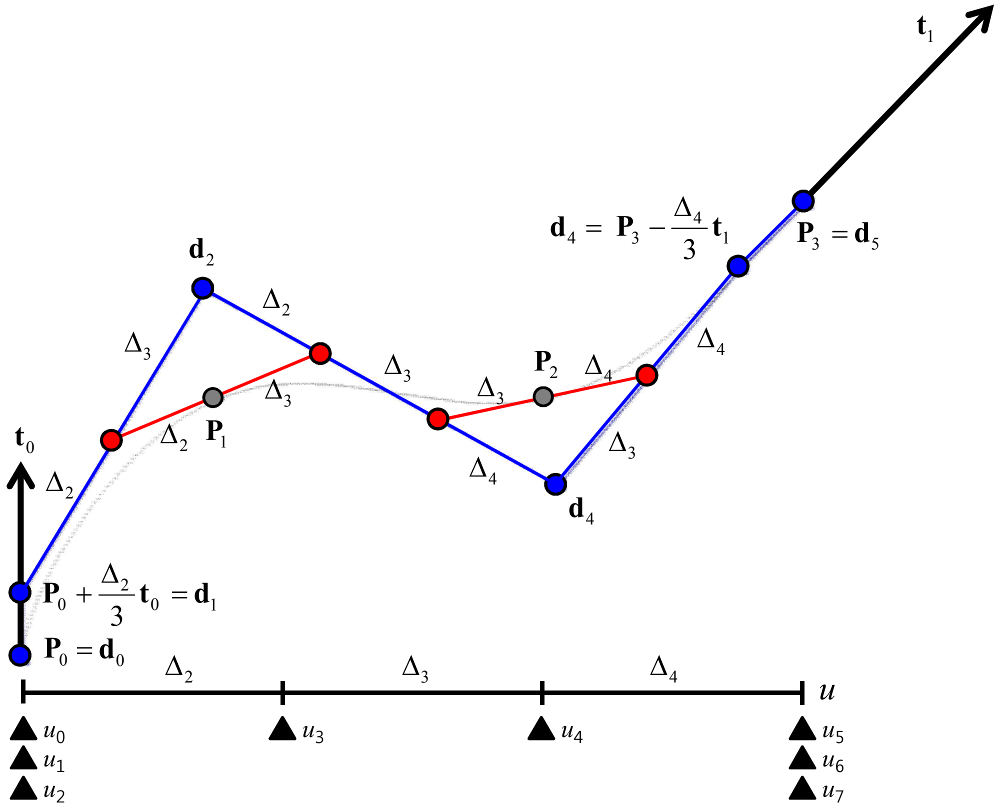
●

3. (Cubic B-Spline Curve Interpolation) 다음 그림은 어느 선박의 선수부 Section Line을 나타낸 것이다. 이것을 P_0, P_1, P_2, P_3 의 4개의 점을 지나는 부드러운 3차 곡선으로 표현하고자 한다. 단, 연결점인 P_1, P_2에서 C^1, C^2 조건을 만족해야 한다.





1) 그림을 이용하여 3차 B-Spline Control Point를 도시하시오.



2) 점의 좌표와 양 끝에서의 접선 벡터가 다음과 같이 주어졌을 때, 3차 B-Spline Control Point 를 구하시오.

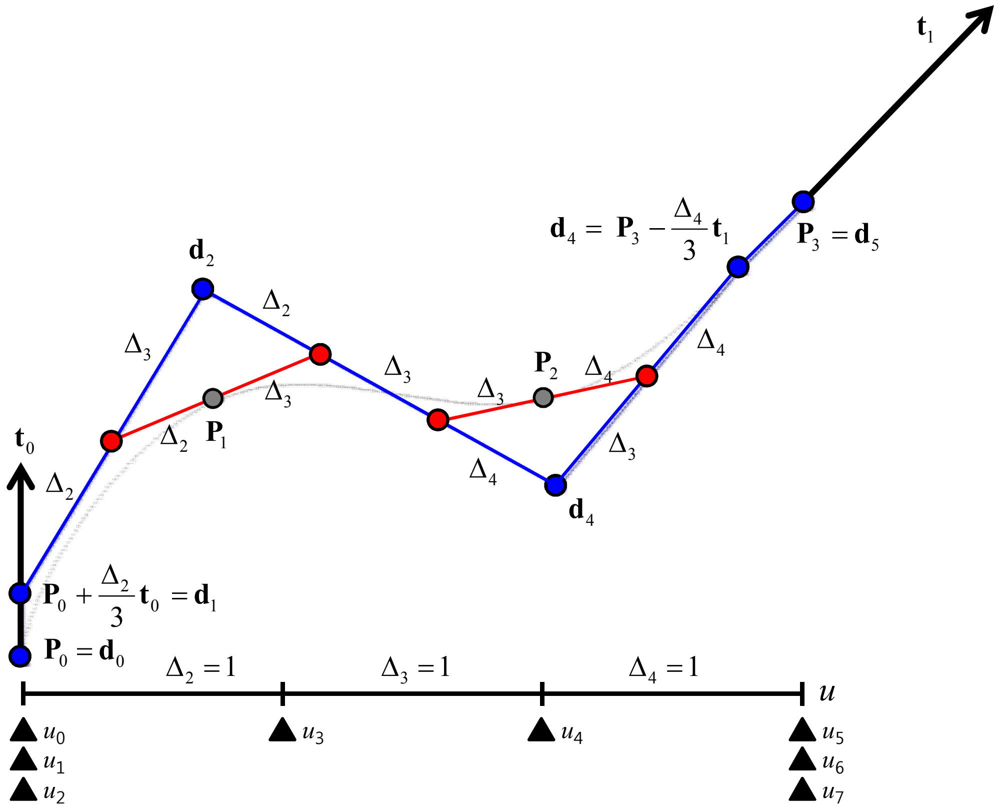
- 점의 좌표: $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_0(0,0)$, $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_1(3,4)$, $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2(8,4)$, $\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_3(12,7)$
- 접선 벡터: $\mathbf{t}_0 = (0,3)$, $\mathbf{t}_1 = (3,3)$

$$\alpha_i = \frac{(\Delta_{i+2})^2}{(\Delta_i + \Delta_{i+1} + \Delta_{i+2})(\Delta_{i+1} + \Delta_{i+2})}$$

$$\beta_i = \left\{\frac{\Delta_{i+2}(\Delta_i + \Delta_{i+1})}{(\Delta_i + \Delta_{i+1} + \Delta_{i+2})} + \frac{\Delta_{i+1}(\Delta_{i+2} + \Delta_{i+3})}{(\Delta_{i+1} + \Delta_{i+2} + \Delta_{i+3})}\right\} / (\Delta_{i+1} + \Delta_{i+2})$$

$$\gamma_i = \frac{(\Delta_{i+1})^2}{(\Delta_{i+1} + \Delta_{i+2} + \Delta_{i+3})(\Delta_{i+1} + \Delta_{i+2})}$$

<풀이>



우선 주어진 점들의 간격(Chord Length)를 이용하여 Knot 간격 Δ_2, Δ_3, Δ_4를 설정한다.

주어진 점의 간격을 구하면 다음과 같다.

$$\|\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0\| = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = 5$$

$$\|\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1\| = \sqrt{(8-3)^2 + (4-4)^2} = 5$$

$\|\mathbf{P}_3-\mathbf{P}_2\|=\sqrt{(12-8)^2+(7-4)^2}=5$

점의 간격을 이용하여 Knot 간격을 다음과 같이 설정한다.

$\Delta_2:\Delta_3:\Delta_4=\|\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_0\|:\|\mathbf{P}_2-\mathbf{P}_1\|:\|\mathbf{P}_3-\mathbf{P}_2\|=5:5:5=1:1:1$

$\therefore \Delta_2=\Delta_3=\Delta_4=1$

곡선 상의 점과 tangent vector가 위 그림과 같이 주어질 때 3차 B-Spline 곡선의 Control Point를 구하는 식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix}\mathbf{P}_0\\ \mathbf{t}_0\\ \mathbf{P}_1\\ \mathbf{P}_2\\ \mathbf{t}_1\\ \mathbf{P}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\ -\frac{3}{\Delta_2}&\frac{3}{\Delta_2}&0&0&0&0\\ 0&\alpha_1&\beta_1&\gamma_1&0&0\\ 0&0&\alpha_2&\beta_2&\gamma_2&0\\ 0&0&0&0&-\frac{3}{\Delta_4}&\frac{3}{\Delta_4}\\ 0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{d}_0\\ \mathbf{d}_1\\ \mathbf{d}_2\\ \mathbf{d}_3\\ \mathbf{d}_4\\ \mathbf{d}_5\end{bmatrix} \tag{16}$$

여기서 $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\alpha_1=\frac{(\Delta_3)^2}{(\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3)(\Delta_2+\Delta_3)}=\frac{1^2}{(0+1+1)(1+1)}=\frac{1}{4}$$

$$\beta_1=\{\frac{\Delta_3(\Delta_1+\Delta_2)}{(\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3)}+\frac{\Delta_2(\Delta_3+\Delta_4)}{(\Delta_2+\Delta_3+\Delta_4)}\}/(\Delta_2+\Delta_3)=\left\{\frac{1(0+1)}{(0+1+1)}+\frac{1(1+1)}{(1+1+1)}\right\}/(1+1)=\frac{7}{12}$$

$$\gamma_1=\frac{(\Delta_2)^2}{(\Delta_2+\Delta_3+\Delta_4)(\Delta_2+\Delta_3)}=\frac{1^2}{(1+1+1)(1+1)}=\frac{1}{6}$$

$$\alpha_2=\frac{(\Delta_4)^2}{(\Delta_2+\Delta_3+\Delta_4)(\Delta_3+\Delta_4)}=\frac{1^2}{(1+1+1)(1+1)}=\frac{1}{6}$$

$$\beta_2=\{\frac{\Delta_4(\Delta_2+\Delta_3)}{(\Delta_2+\Delta_3+\Delta_4)}+\frac{\Delta_3(\Delta_4+\Delta_5)}{(\Delta_3+\Delta_4+\Delta_5)}\}/(\Delta_3+\Delta_4)=\left\{\frac{1(1+1)}{(1+1+1)}+\frac{1(1+0)}{(1+1+0)}\right\}/(1+1)=\frac{7}{12}$$

$$\gamma_2=\frac{(\Delta_3)^2}{(\Delta_3+\Delta_4+\Delta_5)(\Delta_3+\Delta_4)}=\frac{1^2}{(1+1+0)(1+1)}=\frac{1}{4}$$

위에서 계산한 결과와 곡선 상의 점, 그리고 tangent vector를 대입하여 식 (15)를 완성하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ 3 & 4 \\ 8 & 4 \\ 3 & 3 \\ 12 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{7}{12} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{7}{12} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}_0 \\ \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \\ \mathbf{d}_4 \\ \mathbf{d}_5 \end{bmatrix} \tag{17}$$

역행렬을 계산하여 3차 B-Spline 곡선의 Control Point를 구하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d}_0 \\ \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \\ \mathbf{d}_4 \\ \mathbf{d}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{7}{12} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{7}{12} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \\ 3 & 4 \\ 8 & 4 \\ 3 & 3 \\ 12 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{14}{5} & \frac{17}{3} \\ \frac{41}{5} & \frac{8}{3} \\ 11 & 6 \\ 12 & 7 \end{bmatrix}$$

3) 위에서 구한 B-Spline Control Point를 이용하여 B-Spline 곡선식을 구하고, $u = 1.5$ 에서 곡선의 좌표를 구하시오.

B-Spline 곡선식

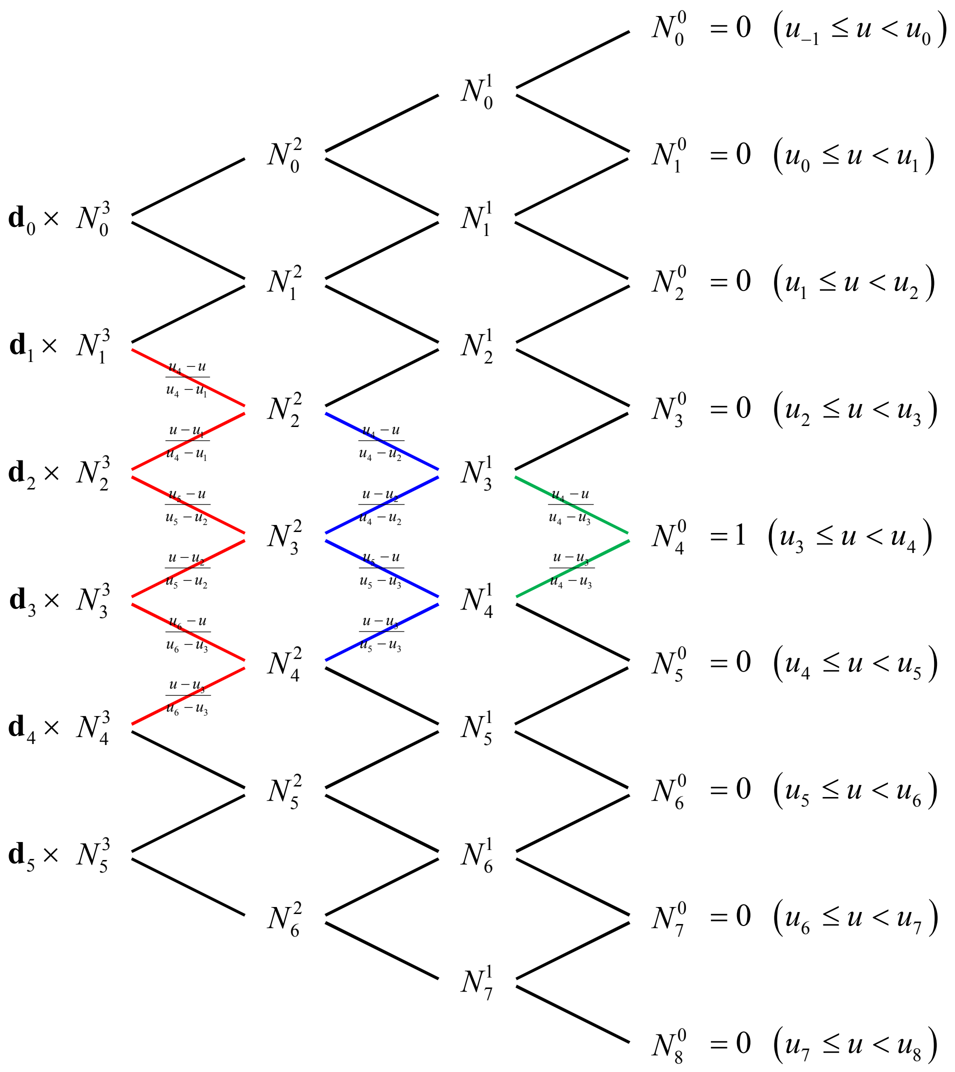
$$\mathbf{r}(u) = \begin{bmatrix} x(u) \\ y(u) \end{bmatrix} = \sum_{i=0}^{D-1} \mathbf{d}_i N_i^n(u) \quad \text{(D: 주어진 점의 개수)}$$

Cox-de Boor Recurrence Formula

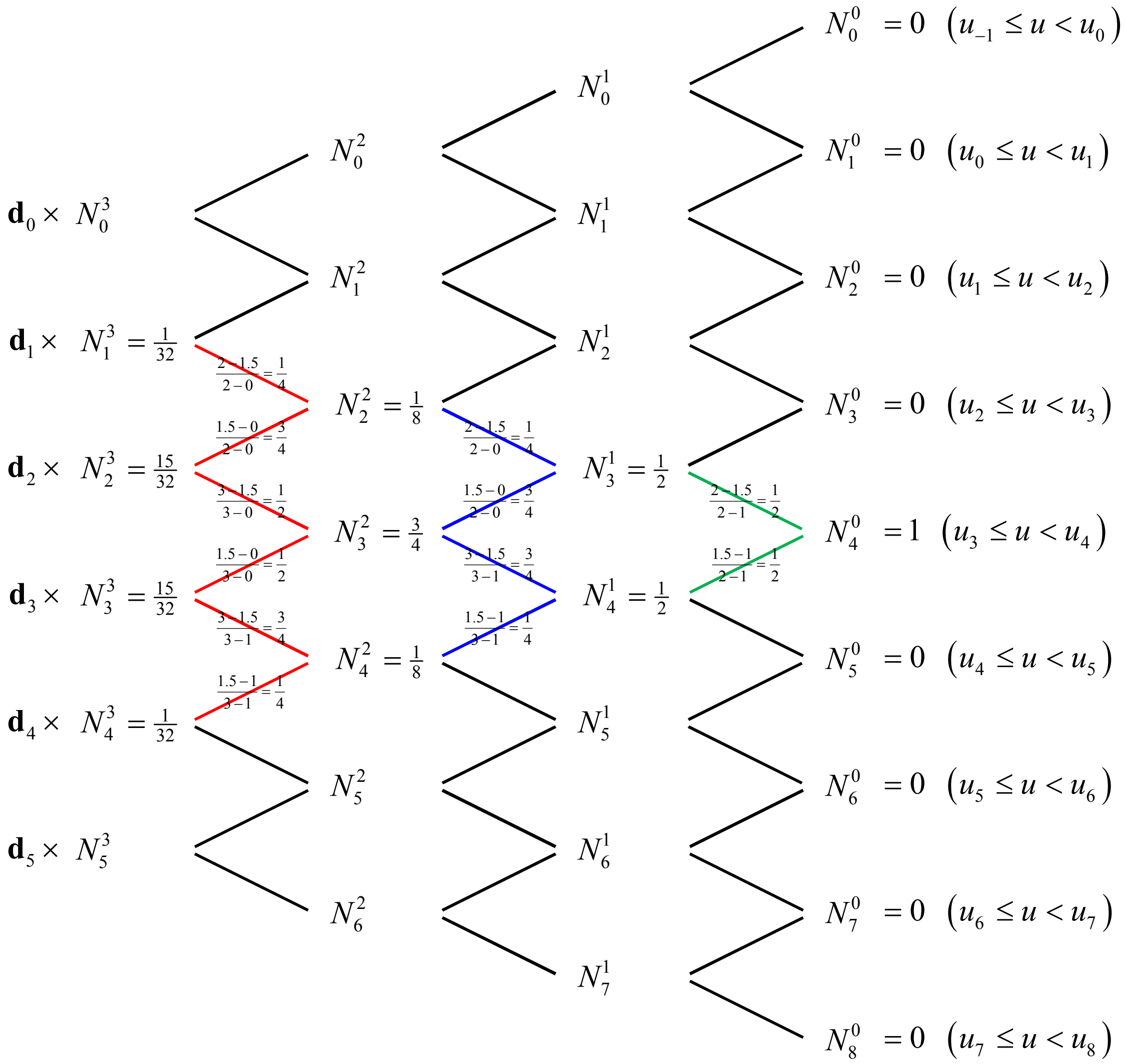
$$N_i^n(u) = \frac{u - u_{i-1}}{u_{i+n-1} - u_{i-1}} N_i^{n-1}(u) + \frac{u_{i+n} - u}{u_{i+n} - u_i} N_{i+1}^{n-1}(u), \qquad N_i^0(u) = \begin{cases} 1 & \text{if } u_{i-1} \le u < u_i \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

<풀이>

Cox-de Boor Recurrence Formula를 이용하여 B-Spline Basis Function을 계산하면 다음과 같다.



위 그림에서 실제 Knot 값과 $u = 1.5$ 를 대입하면 다음 그림과 같다.



이를 이용하여 $\mathbf{r}(u = 1.5)$를 계산하면

$$\mathbf{r}(1.5) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{32} + \begin{bmatrix} \frac{14}{5} \\ \frac{17}{3} \end{bmatrix} \cdot \frac{15}{32} + \begin{bmatrix} \frac{41}{5} \\ \frac{8}{3} \end{bmatrix} \cdot \frac{15}{32} + \begin{bmatrix} 11 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{32} = \begin{bmatrix} \frac{11}{2} \\ \frac{33}{8} \end{bmatrix}$$