[2008][11-1]

Computer aided ship design

Part 3. Optimization Methods

November 2008

Prof. Kyu-Yeul Lee

Department of Naval Architecture and Ocean Engineering,
Seoul National University of College of Engineering

Advanced
Ship
Design
Automation
Laboratory

Ch5. 제약 비선형 최적화 기법 및 응용 예

5.1 2차 계획법(Quadratic Programming;QP)
5.2 Penalty Function 방법
5.3 순차적 선형 계획법(Sequential Linear Programming; SLP)
5.4 CSD(Constrained Steepest Descent) 방법
5.5 최적화 기법을 이용한 선박의 최적 주요 치수 결정 문제

Advanced
Ship
Design
Automation
Laboratory

5.1 2차 계획법
(Quadratic Programming:QP)

Advanced
Ship
Design
Automation
Laboratory

[참고] 2변수 함수의 테일러 전개 (복습 / 1)

2변수 함수 $f(x_1, x_2)$ 에 대한 점 (x_1^*, x_2^*) 에서의 테일러 전개식(3차 이상의 고차항은 무시할 경우)

$$f(x_1,x_2) = f(x_1^*,x_2^*) + \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2}(x_1-x_1^*)^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1-x_1^*)(x_2-x_2^*) + \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^2}(x_2-x_2^*)^2\right) \quad \cdots\cdots ①$$

$\mathbf{c} = \nabla f(\mathbf{x}^*),\ \mathbf{d} = (\mathbf{x}-\mathbf{x}^*)$라 가정

$$\Rightarrow f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*) + \nabla f(\mathbf{x}^*)^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*)^T \mathbf{H}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*) = f(\mathbf{x}^*) + \mathbf{c}^T\mathbf{d} + \frac{1}{2}\mathbf{d}^T\mathbf{H}(\mathbf{x}^*)\mathbf{d} \quad \cdots\cdots ②$$

식 ②를 x로 미분하면 어떤 형태의 Matrix로 표현 될까?

식①을 전개하면,

$$f(x_1,x_2) = f(x_1^*,x_2^*) + \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1}x_1 - \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1}x_1^* + \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}x_2 - \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}x_2^*$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2}(x_1^2 - 2x_1x_1^* + x_1^{*2}) + 2\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2}(x_1x_2 - x_1^*x_2 + x_1^*x_2^* - x_1x_2^*) + \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^2}(x_2^2 - 2x_2x_2^* + x_2^{*2})\right) \cdots\cdots ③$$

식③을 전개하면,

$$f(x_1,x_2) = \boxed{f(x_1^*,x_2^*)} + \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1}x_1 - \boxed{\frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1}x_1^*} + \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}x_2 - \boxed{\frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}x_2^*}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2}x_1^2 - \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2}x_1x_1^* + \boxed{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2}x_1^{*2}}$$

$$+\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2}x_1x_2 - \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2}x_1^*x_2 + \boxed{\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2}x_1^*x_2^*} - \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2}x_1x_2^* \quad \cdots\cdots ④$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^2}x_2^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^2}x_2x_2^* + \boxed{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^2}x_2^{*2}}$$

x^*는 상수 이므로
파란색 네모 안의 수는
모두 상수이다.

[참고] 2변수 함수의 테일러 전개 (복습 / 2)

2변수 함수 $f(x_1, x_2)$ 에 대한 점 (x_1^*, x_2^*) 에서의 테일러 전개식(3차 이상의 고차항은 무시할 경우)

$$f(x_1,x_2)=f(x_1^*,x_2^*)+\frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1}(x_1-x_1^*)+\frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}(x_2-x_2^*)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2}(x_1-x_1^*)^2+2\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2}(x_1-x_1^*)(x_2-x_2^*)+\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^2}(x_2-x_2^*)^2\right) \quad \cdots\cdots ①$$

$\mathbf{c}=\nabla f(\mathbf{x}^*)$, $\mathbf{d}=(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*)$라 가정

$$\Rightarrow f(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}^*)+\nabla f(\mathbf{x}^*)^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*)+\frac{1}{2}\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\right)^T\mathbf{H}(\mathbf{x}^*)\left(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*\right)=f(\mathbf{x}^*)+\mathbf{c}^T\mathbf{d}+\frac{1}{2}\mathbf{d}^T\mathbf{H}(\mathbf{x}^*)\,\mathbf{d} \quad \cdots\cdots ②$$

식 ②를 x로 미분하면 어떤 형태의 Matrix로 표현 될까?

$$f(x_1,x_2)=\boxed{f(x_1^*,x_2^*)}+\frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1}x_1-\boxed{\frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1}x_1^*}+\frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}x_2-\boxed{\frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}x_2^*}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2}x_1^2-\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2}x_1x_1^*+\boxed{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2}x_1^{*2}}$$

$$+\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2}x_1x_2-\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2}x_1^*x_2+\boxed{\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2}x_1^*x_2^*}-\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2}x_1x_2^*+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^2}x_2^2-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^2}x_2x_2^*+\boxed{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^2}x_2^{*2}} \quad \cdots ④$$

식④를 x_1과 x_2로 각각 미분(3차 이상의 고차항은 무시할 경우)

x^*는 상수 이므로 **파란색 네모** 안의 수는 모두 상수이다.

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}=\frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1}+\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2}x_1-\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2}x_1^*+\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2}x_2-\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2}x_2^*$$

$$=\frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1}+\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2}(x_1-x_1^*)+\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2}(x_2-x_2^*)$$

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}=\frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}+\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^2}x_2-\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^2}x_2^*+\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2}x_1-\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2}x_1^*$$

$$=\frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}+\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^2}(x_2-x_2^*)+\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2}(x_1-x_1^*)$$

[참고] 2변수 함수의 테일러 전개 (복습 / 3)

2변수 함수 $f(x_1, x_2)$ 에 대한 점 (x_1^*, x_2^*) 에서의 테일러 전개식(3차 이상의 고차항은 무시할 경우)

$$f(x_1,x_2) = f(x_1^*,x_2^*) + \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2}(x_1-x_1^*)^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1-x_1^*)(x_2-x_2^*) + \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^2}(x_2-x_2^*)^2\right) \quad \cdots\cdots ①$$

$\mathbf{c} = \nabla f(\mathbf{x}^*)$, $\mathbf{d} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$라 가정

$$\Rightarrow f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*) + \nabla f(\mathbf{x}^*)^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*)^T \mathbf{H}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*) = f(\mathbf{x}^*) + \mathbf{c}^T\mathbf{d} + \frac{1}{2}\mathbf{d}^T\mathbf{H}(\mathbf{x}^*)\mathbf{d}$$

식 ②를 x로 미분하면 어떤 형태의 Matrix로 표현 될까?

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} = \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2}(x_1-x_1^*) + \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2}(x_2-x_2^*), \quad \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} = \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2}(x_1-x_1^*) + \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^2}(x_2-x_2^*)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1} + \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2}(x_1-x_1^*) + \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2}(x_2-x_2^*) \\ \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2} + \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2}(x_1-x_1^*) + \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^2}(x_2-x_2^*) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2}(x_1-x_1^*) + \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2}(x_2-x_2^*) \\ \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2}(x_1-x_1^*) + \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^2}(x_2-x_2^*) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_1-x_1^*) \\ (x_2-x_2^*) \end{bmatrix}$$

$$= \nabla f(\mathbf{x}^*) + \mathbf{H}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*) = \mathbf{c} + \mathbf{H}(\mathbf{x}^*)\mathbf{d}$$

$\mathbf{c} = \nabla f(\mathbf{x}^*)$, $\mathbf{d} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$ 라 가정

[참고] 2변수 함수의 테일러 전개 (복습 / 4)

2변수 함수 $f(x_1, x_2)$에 대한 점 (x_1^*, x_2^*)에서의 테일러 전개식(3차 이상의 고차항은 무시할 경우)

$$f(x_1,x_2) = f(x_1^*,x_2^*) + \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1}(x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}(x_2 - x_2^*)$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1^2}(x_1-x_1^*)^2 + 2\frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1-x_1^*)(x_2-x_2^*) + \frac{\partial^2 f(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2^2}(x_2-x_2^*)^2\right) \quad \cdots\cdots ①$$

$\mathbf{c} = \nabla f(\mathbf{x}^*),\ \mathbf{d} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$라 가정

$$\Rightarrow f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*) + \nabla f(\mathbf{x}^*)^T(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*)^T \mathbf{H}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*) = f(\mathbf{x}^*) + \mathbf{c}^T\mathbf{d} + \frac{1}{2}\mathbf{d}^T\mathbf{H}(\mathbf{x}^*)\mathbf{d} \quad \cdots\cdots ②$$

식 ②를 d로 미분하면 어떤 형태의 Matrix로 표현 될까?

식 ①을 d_1과 d_2로 각각 미분(3차 이상의 고차항은 무시할 경우)

Chain rule**에 의해**

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial d_1} = \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial d_1} = \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1}$$

$$\because d_1 = x_1 - x_1^* \quad \text{양면을 } d_1\text{으로 미분} \quad 1 = \frac{\partial x_1}{\partial d_1}$$

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial d_2} = \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial d_2} = \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2}$$

$$\because d_2 = x_2 - x_2^* \quad \text{양면을 } d_2\text{로 미분} \quad 1 = \frac{\partial x_2}{\partial d_2}$$

식 ②를 d로 미분한 결과는 x로 미분한 결과와 같다.

$$\frac{\partial f(\mathbf{d})}{\partial \mathbf{d}} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \nabla f(\mathbf{x}^*) + \mathbf{H}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x}-\mathbf{x}^*) = \mathbf{c} + \mathbf{H}(\mathbf{x}^*)\mathbf{d}$$

$\mathbf{c} = \nabla f(\mathbf{x}^*),\ \mathbf{d} = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$ 라 가정

2차 계획 문제(Quadratic Programming Problem)의 정식화

Minimize $f(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}) \cong f(\mathbf{x}) + \nabla f^T(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} + 0.5\Delta\mathbf{x}^T\mathbf{H}\Delta\mathbf{x}$

Taylor 급수의 2차항까지 고려한 목적 함수

Subject to $h_j(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}) \cong h_j(\mathbf{x}) + \nabla h_j^T(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} = 0;\ j = 1\ to\ p$

Taylor 급수의 1차항(선형항)만 고려한 등호 제약 조건

$g_j(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}) \cong g_j(\mathbf{x}) + \nabla g_j^T(\mathbf{x})\Delta\mathbf{x} \le 0;\ j = 1\ to\ m$

Taylor 급수의 1차항(선형항)만 고려한 부등호 제약 조건

여기서, $\bar{f} = f(\mathbf{x}+\Delta\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}),\ e_j = -h_j(\mathbf{x}),\ b_j = -g_j(\mathbf{x}),$

$c_i = \partial f(\mathbf{x})/\partial x_i,\ n_{ij} = \partial h_j(\mathbf{x})/\partial x_i,\ a_{ij} = \partial g_j(\mathbf{x})/\partial x_i,$

$d_i = \Delta x_i$ 라고 가정하면

<u>Matrix form</u>

Minimize $\bar{f} = \mathbf{c}^T{}_{(1\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)} + \frac{1}{2}\mathbf{d}^T{}_{(1\times n)}\mathbf{H}_{(n\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)}$: 2차 형식의 목적 함수

Subject to $\mathbf{N}^T{}_{(p\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)} = \mathbf{e}_{(p\times 1)}$: 선형화 된 등호 제약 조건

$\mathbf{A}^T{}_{(m\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)} \le \mathbf{b}_{(m\times 1)}$: 선형화 된 부등호 제약 조건

Simplex 방법을 이용한 2차 계획 문제의 풀이 방법

$$\textit{Minimize} \quad \bar{f} = \mathbf{c}^T{}_{(1\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)} + \frac{1}{2}\mathbf{d}^T{}_{(1\times n)}\mathbf{H}_{(n\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)}$$

$$\textit{Subject to} \quad \mathbf{N}^T{}_{(p\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)} = \mathbf{e}_{(p\times 1)}$$

$$\mathbf{A}^T{}_{(m\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)} \le \mathbf{b}_{(m\times 1)} \;\Rightarrow\; \mathbf{A}^T{}_{(m\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)} - \mathbf{b}_{(m\times 1)} + \mathbf{s}_{(m\times 1)}{}^2 = \mathbf{0}$$

Lagrange 함수

$$L = \mathbf{c}^T{}_{(1\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)} + \frac{1}{2}\mathbf{d}^T{}_{(1\times n)}\mathbf{H}_{(n\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)}$$
$$+ \mathbf{u}^T{}_{(1\times m)}(\mathbf{A}^T{}_{(m\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)} + \mathbf{s}_{(m\times 1)}{}^2 - \mathbf{b}_{(m\times 1)})$$
$$+ \mathbf{v}^T{}_{(1\times p)}(\mathbf{N}^T{}_{(p\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)} - \mathbf{e}_{(p\times 1)})$$

Simplex 방법을 이용한 2차 계획 문제의 풀이 방법

Lagrange 함수

$$L(\mathbf{d},\mathbf{v},\mathbf{s},\mathbf{u}) = \mathbf{c}^T{}_{(1\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)} + \frac{1}{2}\mathbf{d}^T{}_{(1\times n)}\mathbf{H}_{(n\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)}$$

$$+\mathbf{u}^T{}_{(1\times m)}(\mathbf{A}^T{}_{(m\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)} + \mathbf{s}_{(m\times 1)}{}^2 - \mathbf{b}_{(m\times 1)})$$

$$+\mathbf{v}^T{}_{(1\times p)}(\mathbf{N}^T{}_{(p\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)} - \mathbf{e}_{(p\times 1)})$$

Kuhn-Tucker 필요 조건: $\nabla L(\mathbf{d},\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{s},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\zeta}) = \mathbf{0}$

$$\frac{\partial L(\mathbf{d},\mathbf{v},\mathbf{s},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{d}_{(n\times 1)}} = \mathbf{c}_{(n\times 1)} + \mathbf{H}_{(n\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)} + \mathbf{A}_{(n\times m)}\mathbf{u}_{(m\times 1)} + \mathbf{N}_{(n\times p)}\mathbf{v}_{(p\times 1)} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{d},\mathbf{v},\mathbf{s},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{v}_{(p\times 1)}} = \mathbf{N}^T{}_{(p\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)} - \mathbf{e}_{(p\times 1)} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{d},\mathbf{v},\mathbf{s},\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}_{(n\times 1)}} = \mathbf{A}^T{}_{(m\times n)}\mathbf{d}_{(n\times 1)} + \mathbf{s}_{(m\times 1)}{}^2 - \mathbf{b}_{(m\times 1)} = 0$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{d},\mathbf{v},\mathbf{s},\mathbf{u})}{\partial s_i} = u_i s_i = 0, \quad i = 0 \ to \ m$$

Simplex 방법을 이용한 2차 계획 문제의 풀이 방법

Kuhn-Tucker 필요 조건: $\nabla L(\mathbf{d},\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{s},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\zeta})=\mathbf{0}$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{d}_{(n\times1)}}=\mathbf{c}_{(n\times1)}+\mathbf{H}_{(n\times n)}\mathbf{d}_{(n\times1)}+\mathbf{A}_{(n\times m)}\mathbf{u}_{(m\times1)}+\mathbf{N}_{(n\times p)}\mathbf{v}_{(p\times1)}=\mathbf{0},\qquad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{(p\times1)}}=\mathbf{N}^{T}{}_{(p\times n)}\mathbf{d}_{(n\times1)}-\mathbf{e}_{(p\times1)}=\mathbf{0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_i}=u_i\boxed{s_i}=0,\ i=0\ to\ m\ \text{----}①\qquad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}_{(n\times1)}}=\mathbf{A}^{T}_{(m\times n)}\mathbf{d}_{(n\times1)}+\mathbf{s}_{(m\times1)}{}^{2}-\mathbf{b}_{(m\times1)}=0$$

식①의 양변에 s_i 를 곱한다.

$$u_i s_i=0 \;\Rightarrow\; u_i s_i^2=0$$

양변에 s_i 를 곱해도 $u_i=0\ or\ s_i=0$ 이라는 해는 변하지 않는다.

변경된 Kuhn-Tucker 필요 조건: $\nabla L(\mathbf{d},\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{s})=\mathbf{0}$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{d}_{(n\times1)}}=\mathbf{c}_{(n\times1)}+\mathbf{H}_{(n\times n)}\mathbf{d}_{(n\times1)}+\mathbf{A}_{(n\times m)}\mathbf{u}_{(m\times1)}+\mathbf{N}_{(n\times p)}\mathbf{v}_{(p\times1)}=\mathbf{0},\qquad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{(p\times1)}}=\mathbf{N}^{T}{}_{(p\times n)}\mathbf{d}_{(n\times1)}-\mathbf{e}_{(p\times1)}=\mathbf{0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_i}=u_i\boxed{s_i^2}=0,\ i=0\ to\ m\ \text{----}①'\qquad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}_{(n\times1)}}=\mathbf{A}^{T}_{(m\times n)}\mathbf{d}_{(n\times1)}+\mathbf{s}_{(m\times1)}{}^{2}-\mathbf{b}_{(m\times1)}=0$$

Simplex 방법을 이용한 2차 계획 문제의 풀이 방법

변경된 Kuhn-Tucker 필요 조건: $\nabla L(\mathbf{d},\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{s},\boldsymbol{\delta},\boldsymbol{\zeta})=\mathbf{0}$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{d}_{(n\times1)}}=\mathbf{c}_{(n\times1)}+\mathbf{H}_{(n\times n)}\mathbf{d}_{(n\times1)}+\mathbf{A}_{(n\times m)}\mathbf{u}_{(m\times1)}+\mathbf{N}_{(n\times p)}\mathbf{v}_{(p\times1)}=\mathbf{0},\quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{(p\times1)}}=\mathbf{N}^T{}_{(p\times n)}\mathbf{d}_{(n\times1)}-\mathbf{e}_{(p\times1)}=\mathbf{0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_i}=u_i\boxed{s_i^2}=0,\ i=0\ to\ m\text{----}①,\quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}_{(n\times1)}}=\mathbf{A}^T_{(m\times n)}\mathbf{d}_{(n\times1)}+\boxed{\mathbf{s}_{(m\times1)}{}^2}-\mathbf{b}_{(m\times1)}=0$$

s_i^2 를 s_i' 로 치환 (단, $s_i'\geq 0$)

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{d}_{(n\times1)}}=\mathbf{c}_{(n\times1)}+\mathbf{H}_{(n\times n)}\mathbf{d}_{(n\times1)}+\mathbf{A}_{(n\times m)}\mathbf{u}_{(m\times1)}+\mathbf{N}_{(n\times p)}\mathbf{v}_{(p\times1)}=\mathbf{0},\quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{(p\times1)}}=\mathbf{N}^T{}_{(p\times n)}\mathbf{d}_{(n\times1)}-\mathbf{e}_{(p\times1)}=\mathbf{0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_i}=u_is_i'=0,\ i=0\ to\ m$$

비선형 부정 방정식

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}_{(n\times1)}}=\mathbf{A}^T_{(m\times n)}\mathbf{d}_{(n\times1)}+\mathbf{s}'_{(m\times1)}-\mathbf{b}_{(m\times1)}=0$$

선형 부정 방정식

선형 부정 방정식에서 구한 해가 이 비선형 부정 방정식을 만족하는지 확인하여 해를 확정한다.

이 식들은 설계 변수 d에 대해 모두 선형이므로, 이 식들로부터 설계 변수 d를 구하는 문제는 등호 제약 조건만으로 이루어진 선형 계획 문제임

여기서, $u_i, s_i' \geq 0;\ i=1\ to\ m$

Simplex 방법을 이용한 2차 계획 문제의 풀이 방법

Kuhn-Tucker 필요 조건으로부터

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{d}_{(n\times1)}} = \mathbf{c}_{(n\times1)} + \mathbf{H}_{(n\times n)}\mathbf{d}_{(n\times1)} + \mathbf{A}_{(n\times m)}\mathbf{u}_{(m\times1)} + \mathbf{N}_{(n\times p)}\mathbf{v}_{(p\times1)} = \mathbf{0}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{(p\times1)}} = \mathbf{N}^T{}_{(p\times n)}\mathbf{d}_{(n\times1)} - \mathbf{e}_{(p\times1)} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_i} = u_i s_i' = 0,\ i = 0\ to\ m$$

비선형 부정 방정식

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}_{(n\times1)}} = \mathbf{A}^T_{(m\times n)}\mathbf{d}_{(n\times1)} + \mathbf{s}'_{(m\times1)} - \mathbf{b}_{(m\times1)} = 0$$

선형 부정 방정식

선형 부정 방정식에서 구한 해가
이 비선형 부정 방정식을 만족하는지
확인하여 해를 확정한다.

이 식들은 설계 변수 d에 대해
모두 선형이므로, 이 식들로부터
설계 변수 d를 구하는 문제는
등호 제약 조건만으로 이루어진
선형 계획 문제임

여기서, $u_i, s_i' \geq 0;\quad i = 1\ to\ m$

설계 변수 $\mathbf{d}_{(n\times1)}$는 부호의 제한이 없으므로 Simplex 방법을 이용하기 위해서
설계 변수를 아래와 같이 변환해야 함

$$\mathbf{d}_{(n\times1)} = \mathbf{d}^+_{(n\times1)} - \mathbf{d}^-_{(n\times1)},\ (d_i^+ \geq 0,\ d_i^- \geq 0; i = 1\ to\ n)$$

등호 제약 조건에 대한 Lagrange multiplier $\mathbf{v}_{(p\times1)}$는 부호의 제한이 없으므로
Simplex 방법을 이용하기 위해서 다음과 같이 변환해야 함

$$\mathbf{v}_{(p\times1)} = \mathbf{y}_{(p\times1)} - \mathbf{z}_{(p\times1)},\ (y_i \geq 0,\ z_i \geq 0;\ i = 1\ \ to\ \ p)$$

Simplex 방법을 이용한 2차 계획 문제의 풀이 방법

Kuhn-Tucker 필요 조건으로부터

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{d}_{(n\times1)}} = \mathbf{c}_{(n\times1)} + \mathbf{H}_{(n\times n)}\mathbf{d}_{(n\times1)} + \mathbf{A}_{(n\times m)}\mathbf{u}_{(m\times1)} + \mathbf{N}_{(n\times p)}\mathbf{v}_{(p\times1)} = \mathbf{0}, \qquad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}_{(p\times1)}} = \mathbf{N}^T{}_{(p\times n)}\mathbf{d}_{(n\times1)} - \mathbf{e}_{(p\times1)} = \mathbf{0}$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_i} = u_i s_i' = 0,\ i = 0\ to\ m$$

비선형 부정 방정식

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}_{(n\times1)}} = \mathbf{A}^T{}_{(m\times n)}\mathbf{d}_{(n\times1)} + \mathbf{s}'_{(m\times1)} - \mathbf{b}_{(m\times1)} = 0$$

선형 부정 방정식

선형 부정 방정식에서 구한 해가
이 비선형 부정 방정식을 만족하는지
확인하여 해를 확정한다.

이 식들은 설계 변수 d에 대해
모두 선형이므로, 이 식들로부터
설계 변수 d를 구하는 문제는
등호 제약 조건만으로 이루어진
선형 계획 문제임

여기서, $u_i, s_i' \geq 0;\ i = 1\ to\ m$

여기에서 d와 v는
그 부호를 확신할 수 없으므로

$$\mathbf{d}_{(n\times1)} = \mathbf{d}^+_{(n\times1)} - \mathbf{d}^-_{(n\times1)},\ (d_i^+ \geq 0,\ d_i^- \geq 0; i = 1\ to\ n)$$

$$\mathbf{v}_{(p\times1)} = \mathbf{y}_{(p\times1)} - \mathbf{z}_{(p\times1)},\ (y_i \geq 0,\ z_i \geq 0;\ i = 1\ to\ p)$$

행렬식 표현

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{(n\times n)} & -\mathbf{H}_{(n\times n)} & \mathbf{A}_{(n\times m)} & \mathbf{0}_{(n\times m)} & \mathbf{N}_{(n\times p)} & -\mathbf{N}_{(n\times p)} \\ \mathbf{A}^T{}_{(m\times n)} & -\mathbf{A}^T{}_{(m\times n)} & \mathbf{0}_{(m\times m)} & \mathbf{I}_{(m\times m)} & \mathbf{0}_{(m\times p)} & \mathbf{0}_{(m\times p)} \\ \mathbf{N}^T{}_{(p\times n)} & -\mathbf{N}^T{}_{(p\times n)} & \mathbf{0}_{(p\times m)} & \mathbf{0}_{(p\times m)} & \mathbf{0}_{(p\times p)} & \mathbf{0}_{(p\times p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}^+_{(n\times1)} \\ \mathbf{d}^-_{(n\times1)} \\ \mathbf{u}_{(m\times1)} \\ \mathbf{s}'_{(m\times1)} \\ \mathbf{y}_{(p\times1)} \\ \mathbf{z}_{(p\times1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{c}_{(n\times1)} \\ \mathbf{b}_{(m\times1)} \\ \mathbf{e}_{(p\times1)} \end{bmatrix}$$

인위 변수를 추가하고 인위 목적 함수를 만들어서 Simplex 방법으로 문제를 푼다.

Simplex 방법을 이용한 2차 계획 문제의 풀이 방법

행렬식 표현

인위 변수를 추가하고 인위 목적 함수를 만들어서 Simplex 방법으로 문제를 푼다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{(n\times n)} & -\mathbf{H}_{(n\times n)} & \mathbf{A}_{(n\times m)} & \mathbf{0}_{(n\times m)} & \mathbf{N}_{(n\times p)} & -\mathbf{N}_{(n\times p)} \\ \mathbf{A}^T{}_{(m\times n)} & -\mathbf{A}^T{}_{(m\times n)} & \mathbf{0}_{(m\times m)} & \mathbf{I}_{(m\times m)} & \mathbf{0}_{(m\times p)} & \mathbf{0}_{(m\times p)} \\ \mathbf{N}^T{}_{(p\times n)} & -\mathbf{N}^T{}_{(p\times n)} & \mathbf{0}_{(p\times m)} & \mathbf{0}_{(p\times m)} & \mathbf{0}_{(p\times p)} & \mathbf{0}_{(p\times p)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{d}^+_{(n\times 1)} \\ \mathbf{d}^-_{(n\times 1)} \\ \mathbf{u}_{(m\times 1)} \\ \mathbf{s}'_{(m\times 1)} \\ \mathbf{y}_{(p\times 1)} \\ \mathbf{z}_{(p\times 1)} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_{n+m+p} \end{bmatrix}}_{\text{인위 변수}} = \begin{bmatrix} -\mathbf{c}_{(n\times 1)} \\ \mathbf{b}_{(m\times 1)} \\ \mathbf{e}_{(p\times 1)} \end{bmatrix}$$

인위 목적함수를 만드는 법

- 1행부터 n+m+p행까지 모두 더해서 하나의 방정식을 만든다.
- 인위변수의 총 합($Y_1+Y_2+\ldots+Y_{n+m+p}$)를 목적함수(w)로 정의한다.

- 위의 선형 부정 방정식의 초기 기저 가능해를 Simplex 방법을 이용하여 구한다.
- 초기 기저 가능해 중 아래의 비선형 부정 방정식을 만족하는지 확인하여 해를 확정한다.

$$\frac{\partial L}{\partial s_i} = u_i s_i' = 0, \quad i = 0 \ to \ m$$

[참고] Simplex 방법을 이용한 2차 계획 문제의 풀이 방법

Kuhn-Tucker 필요 조건(행렬식 표현)

$$\mathbf{B}_{((n+m+p)\times(2n+2m+2p))}\mathbf{X}_{((2n+2m+2p)\times 1)} = \mathbf{D}_{((n+m+p)\times 1)}$$

Simplex 방법을 이용한 QP 문제의 해법

1. Kuhn-Tucker 필요 조건의 해를 구하는 문제는 등호 제약 조건만으로 이루어진 부정 선형 연립 방정식의 해를 구하는 문제(선형 계획 문제)임
2. 부정 선형 연립 방정식의 해를 구하기 위하여 Simplex 방법에서 인위 변수 및 인위 목적 함수를 도입하여 초기 기저 가능해를 구하는 방법임

$$\mathbf{B}_{((n+m+p)\times(2n+2m+2p))}\mathbf{X}_{((2n+2m+2p)\times 1)} + \mathbf{Y}_{((n+m+p)\times 1)} = \mathbf{D}_{((n+m+p)\times 1)}$$

여기서, D의 어떤 요소가 음이면 해당 식을 -1로 곱하여 양수로 만듬

3. 인위 목적 함수를 다음과 같이 정의함

$$w = \sum_{i=1}^{n+m+p} Y_i = \sum_{i=1}^{n+m+p} D_i - \sum_{j=1}^{2(n+m+p)} \sum_{i=1}^{n+m+p} B_{ij} X_j = w_0 + \sum_{j=1}^{2(n+m+p)} C_j X_j$$

여기서, $\underbrace{C_j = -\sum_{i=1}^{n+m+p} B_{ij}}$, $\underbrace{w_0 = \sum_{i=1}^{n+m+p} D_i}$ 인위 목적 함수의 초기값

행렬 B의 j번째 열의 요소를 모두 더해 부호를 바꾼 것(상대 비용 계수)

4. Simplex 방법을 이용하여 해를 구하고 다음 식을 만족하는지 확인함

$$u_i s_i' = 0;\ i = 1\ to\ m$$

: 이 식은 비선형 방정식으로서 해를 구한 후 이를 만족하는지 평가하기 위한 용도로 사용됨

2차 계획 법(QP)- Class의 구현 예

```
class QP
{
public:
	QP();
	virtual ~QP();

	Simplex BXYD;			// 선형 방정식 "BX + Y = D"를 해결하기 위한 Simplex
	double** m_pH;			// H를 나타내는 2차원 배열
	double** m_pA;			// A를 나타내는 2차원 배열
	double** m_pN;			// N을 나타내는 2차원 배열
	double* m_pD;			// 선형 방정식을 푼 결과 Search Direction을 저장한 변수
	double* m_pU;			// 선형 방정식을 푼 결과 부등호 제약 조건식에 대한 Lagrange Multipliers를 저장한 변수
	double* m_pXi;			// 선형 방정식을 푼 결과 설계 변수의 양수 조건식에 대한 Lagrange Multipliers를 저장한 변수
	double* m_pS;			// 선형 방정식을 푼 결과 부등호 제약 조건식에 대한 완화 변수를 저장한 변수
	double* m_pY;			// 선형 방정식을 푼 결과 등호 제약 조건식에 대한 Lagrange Multipliers를 저장한 변수
	double* m_pZ;			// 선형 방정식을 푼 결과 등호 제약 조건식에 대한 Lagrange Multipliers를 저장한 변수

	void ConstructSimplexTable();	// 선형 방정식 "BX + Y = D"에 해당하는 Simplex를 구성하는 함수
	int CheckEndCondition();	// QP 방법의 종료 조건을 판단(U*S = 0 & Xi*D = 0)하는 함수
	int Solve();			// QP를 실행하는 함수
};
```

K-T 필요 조건을 이용한 프로 펠러 최적 주요 치수 결정 예(1)

Given $P, n, A_E / A_O, V$

Find $J, P_i / D_P$

Maximize $\eta_O = \dfrac{J}{2\pi} \cdot \dfrac{K_T}{K_Q}$ → K_T와 K_Q가 모두 J와 P_i/D_p의 함수이므로 목적 함수 역시 J와 P_i/D_p의 함수임

Subject to $\dfrac{P}{2\pi n} = \rho \cdot n^2 \cdot D_P{}^5 \cdot K_Q$

: 주기관이 전달한 토오크를 프로펠러가 흡수하는 조건

Where, $J = \dfrac{V(1-w)}{n \cdot D_P}$

$$K_T = f(J, P_i / D_P)$$

$$K_Q = f(J, P_i / D_P)$$

P: 프로펠러 전달 마력
n: 프로펠러 회전수
D_P: 프로펠러 직경
P_i: 프로펠러 피치
A_E/A_O: 프로펠러 날개 면적비
V: 선속
η_O: 프로펠러 효율

➡ 미지수 2개, 등호 제약 조건 1개인 최적화 문제

K-T 필요 조건을 이용한 프로펠러의 최적 주요 치수 결정 예(2)

$$\frac{P}{2\pi n} = \rho \cdot n^2 \cdot D_P^{\ 5} \cdot K_Q \quad \cdots\cdots \quad (a)$$: 주기관이 전달한 토오크를 프로펠러가 흡수하는 조건

주기관 전달 마력을 프로펠러가 흡수하는 경우, 그 조건은 식 (a)로부터

$$C = \frac{K_Q}{J^5} = \frac{P \cdot n^2}{2\pi\rho \cdot V_A^{\ 5}}$$

$$G(J, P_i / D_P) = K_Q - C \cdot J^5 = 0 \quad \cdots\cdots \quad (b)$$

프로펠러 단독 효율(η_0)은

$$F(J, P_i / D_P) = \eta_0 = \frac{J}{2\pi} \cdot \frac{K_T}{K_Q} \quad \cdots\cdots \quad (c)$$

목적 함수 F는 P_i / D_P 와 J의 함수이며 따라서 식 (b)를 만족하면서 단독 효율이 최대가 되는 프로펠러 피치비(P_i / D_P)와 전진비(J)를 구하는 최적화 문제가 됨

K-T 필요 조건을 이용한 프로펠러의 최적 주요 치수 결정 예(3)

$$G(J, P_i/D_P) = K_Q - C \cdot J^5 = 0 \quad \cdots\cdots \quad (b)$$

$$F(J, P_i/D_P) = \eta_0 = \frac{J}{2\pi} \cdot \frac{K_T}{K_Q} \quad \cdots\cdots \quad (c)$$

라그란지 승수 λ 를 도입하여 식(b)와 식(c)로부터

$$H(J, P_i/D_P, \lambda) = F(J, P_i/D_P) + \lambda G(J, P_i/D_P) \quad \cdots\cdots \quad (d)$$

와 같은 함수를 정의하고 이로부터 함수 H가 최대가 되는 미정 계수 P_i/D_P, J 및 λ 를 결정함

$$\frac{\partial H}{\partial J} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{K_T}{K_Q}\right) + \frac{J}{2\pi}\frac{\left\{\left(\frac{\partial K_T}{\partial J}\right)\cdot K_Q - \left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)\cdot K_T\right\}}{K_Q^{\;2}} + \lambda\left\{\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right) - 5\cdot C\cdot J^4\right\}$$

$$= 0 \quad \cdots\cdots \quad (e)$$

$$\frac{\partial H}{\partial (P_i/D_P)} = \frac{J}{2\pi}\frac{\left\{\left(\frac{\partial K_T}{\partial P_i/D_P}\right)\cdot K_Q - \left(\frac{\partial K_Q}{\partial P_i/D_P}\right)\cdot K_T\right\}}{K_Q^{\;2}} + \lambda\left(\frac{\partial K_Q}{\partial P_i/D_P}\right)$$

$$= 0 \quad \cdots\cdots \quad (f)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = K_Q - C\cdot J^5 = 0 \quad \cdots\cdots \quad (g)$$

K-T 필요 조건을 이용한 프로펠러의 최적 주요 치수 결정 예(5)

식 (e), (f), (g)에서 λ 를 소거하여 정리하면

$$\left(\frac{\partial K_Q}{\partial (P_i / D_P)}\right)\left\{J \cdot \left(\frac{\partial K_T}{\partial J}\right) - 4K_T\right\}$$

$$+\left(\frac{\partial K_T}{\partial (P_i / D_P)}\right)\left\{5K_Q - J \cdot \left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)\right\} = 0 \quad \cdots\cdots \quad \text{(h)}$$

$$K_Q - C \cdot J^5 = 0 \quad \cdots\cdots \quad \text{(i)}$$

식 (h), (i)의 해를 구함으로써 전달 마력을 흡수하는 최대의 효율을 갖는 피치비(P_i / D_P)와 전진비(J)를 구할 수 있다.

$J = \dfrac{V(1-w)}{n \cdot D_P}$ 이므로 J를 구하면 D_p를 구할 수 있고, 또한 P_i/D_p로부터 P_i 역시 구할 수 있다.

즉, 프로펠러 직경(D_P)과 피치(P_i)를 모두 구할 수 있다.

(참고) e, f, g로부터 h 유도 (1)

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{K_T}{K_Q}\right)+\frac{J}{2\pi}\frac{\left\{\left(\frac{\partial K_T}{\partial J}\right)\cdot K_Q-\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)\cdot K_T\right\}}{{K_Q}^2}+\lambda\left\{\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)-5\cdot C\cdot J^4\right\}=0 \quad \cdots\cdots \quad \text{(e)}$$

$$\frac{J}{2\pi}\frac{\left\{\left(\frac{\partial K_T}{\partial(P_i/D_P)}\right)\cdot K_Q-\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\cdot K_T\right\}}{{K_Q}^2}+\lambda\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)=0 \quad \cdots\cdots \quad \text{(f)}$$

λ를 소거하기 위해 다음과 같은 연산을 한다.

$$\text{(e)}\times\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)-(f)\times\left\{\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)-5\cdot C\cdot J^4\right\}=0$$

$$\text{(e)}\times\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right):\ \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left(\frac{K_T}{K_Q}\right)+\frac{J}{2\pi}\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\frac{\left\{\left(\frac{\partial K_T}{\partial J}\right)\cdot K_Q-\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)\cdot K_T\right\}}{{K_Q}^2}+\cancel{\lambda\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left\{\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)-5\cdot C\cdot J^4\right\}}=0$$

$$(f)\times\left\{\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)-5\cdot C\cdot J^4\right\}:\ \frac{J}{2\pi}\frac{\left\{\left(\frac{\partial K_T}{\partial(P_i/D_P)}\right)\cdot K_Q-\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\cdot K_T\right\}}{{K_Q}^2}\left\{\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)-5\cdot C\cdot J^4\right\}+\cancel{\lambda\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left\{\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)-5\cdot C\cdot J^4\right\}}=0$$

$$\text{(e)}\times\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)-(f)\times\left\{\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)-5\cdot C\cdot J^4\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left(\frac{K_T}{K_Q}\right)+\frac{J}{2\pi}\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\frac{\left\{\left(\frac{\partial K_T}{\partial J}\right)\cdot K_Q-\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)\cdot K_T\right\}}{{K_Q}^2}-\frac{J}{2\pi}\frac{\left\{\left(\frac{\partial K_T}{\partial(P_i/D_P)}\right)\cdot K_Q-\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\cdot K_T\right\}}{{K_Q}^2}\left\{\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)-5\cdot C\cdot J^4\right\}=0$$

(참고) e, f, g로부터 h 유도 (2)

$$(\mathrm{e})\times\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)-(f)\times\left\{\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)-5\cdot C\cdot J^4\right\}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left(\frac{K_T}{K_Q}\right)+\frac{J}{2\pi}\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\frac{\left\{\left(\frac{\partial K_T}{\partial J}\right)\cdot K_Q-\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)\cdot K_T\right\}}{K_Q{}^2}-\frac{J}{2\pi}\frac{\left\{\left(\frac{\partial K_T}{\partial(P_i/D_P)}\right)\cdot K_Q-\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\cdot K_T\right\}}{K_Q{}^2}\left\{\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)-5\cdot C\cdot J^4\right\}=0$$

양변에 2π 곱하기, 2번째 항과 3번째 항 정리하여 묶기

$$\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left(\frac{K_T}{K_Q}\right)+\frac{J}{K_Q{}^2}\left[\underline{\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left\{\left(\frac{\partial K_T}{\partial J}\right)\cdot K_Q-\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)\cdot K_T\right\}-\left\{\left(\frac{\partial K_T}{\partial(P_i/D_P)}\right)\cdot K_Q-\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\cdot K_T\right\}\left\{\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)-5\cdot C\cdot J^4\right\}}\right]=0$$

밑줄 친 부분부터 정리

$$=\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left(\frac{\partial K_T}{\partial J}\right)\cdot K_Q-\cancel{\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)\cdot K_T}-\left(\frac{\partial K_T}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)\cdot K_Q+\cancel{\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)\cdot K_T}+5\cdot\left(\frac{\partial K_T}{\partial(P_i/D_P)}\right)\cdot K_Q\cdot C\cdot J^4-5\cdot\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\cdot K_T\cdot C\cdot J^4$$

$$=\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left(\frac{\partial K_T}{\partial J}\right)\cdot K_Q-\left(\frac{\partial K_T}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)\cdot K_Q+5\cdot\left(\frac{\partial K_T}{\partial(P_i/D_P)}\right)\cdot K_Q\cdot C\cdot J^4-5\cdot\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\cdot K_T\cdot C\cdot J^4$$

위 식에 결과 대입

$$\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left(\frac{K_T}{K_Q}\right)+\frac{J}{K_Q{}^2}\left[\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left(\frac{\partial K_T}{\partial J}\right)\cdot K_Q-\left(\frac{\partial K_T}{\partial(P_i/D_P)}\right)\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)\cdot K_Q+5\cdot\left(\frac{\partial K_T}{\partial(P_i/D_P)}\right)\cdot K_Q\cdot C\cdot J^4-5\cdot\left(\frac{\partial K_Q}{\partial(P_i/D_P)}\right)\cdot K_T\cdot C\cdot J^4\right]=0$$

(참고) e, f, g로부터 h 유도 (2)

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = K_Q - C \cdot J^5 = 0 \quad \cdots\cdots \quad \text{(g)}$$

$$\left(\frac{\partial K_Q}{\partial (P_i/D_P)}\right)\left(\frac{K_T}{K_Q}\right) + \frac{J}{K_Q^{\,2}}\left[\left(\frac{\partial K_Q}{\partial (P_i/D_P)}\right)\left(\frac{\partial K_T}{\partial J}\right)\cdot K_Q - \left(\frac{\partial K_T}{\partial (P_i/D_P)}\right)\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)\cdot K_Q + 5\cdot\left(\frac{\partial K_T}{\partial (P_i/D_P)}\right)\cdot K_Q \cdot C \cdot J^4 - 5\cdot\left(\frac{\partial K_Q}{\partial (P_i/D_P)}\right)\cdot K_T \cdot C \cdot J^4\right] = 0$$

전개

$$\left(\frac{\partial K_Q}{\partial (P_i/D_P)}\right)\left(\frac{K_T}{K_Q}\right) + \left(\frac{\partial K_Q}{\partial (P_i/D_P)}\right)\left(\frac{\partial K_T}{\partial J}\right)\cdot\frac{J}{K_Q} - \left(\frac{\partial K_T}{\partial (P_i/D_P)}\right)\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)\cdot\frac{J}{K_Q} + 5\cdot\left(\frac{\partial K_T}{\partial (P_i/D_P)}\right)\cdot\cancel{\frac{C\cdot J^5}{K_Q}} - 5\cdot\left(\frac{\partial K_Q}{\partial (P_i/D_P)}\right)\cdot\frac{K_T}{K_Q}\cdot\cancel{\frac{C\cdot J^5}{K_Q}} = 0$$

(g)에 의해 $\frac{C\cdot J^5}{K_Q} = 1$

$$\underline{\left(\frac{\partial K_Q}{\partial (P_i/D_P)}\right)\left(\frac{K_T}{K_Q}\right)} + \left(\frac{\partial K_Q}{\partial (P_i/D_P)}\right)\left(\frac{\partial K_T}{\partial J}\right)\cdot\frac{J}{K_Q} - \left(\frac{\partial K_T}{\partial (P_i/D_P)}\right)\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)\cdot\frac{J}{K_Q} + 5\cdot\left(\frac{\partial K_T}{\partial (P_i/D_P)}\right)\underline{-5\cdot\left(\frac{\partial K_Q}{\partial (P_i/D_P)}\right)\cdot\frac{K_T}{K_Q}} = 0$$

밑줄 친 부분 계산

$$-4\cdot\left(\frac{\partial K_Q}{\partial (P_i/D_P)}\right)\left(\frac{K_T}{K_Q}\right) + \left(\frac{\partial K_Q}{\partial (P_i/D_P)}\right)\left(\frac{\partial K_T}{\partial J}\right)\cdot\frac{J}{K_Q} - \left(\frac{\partial K_T}{\partial (P_i/D_P)}\right)\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)\cdot\frac{J}{K_Q} + 5\cdot\left(\frac{\partial K_T}{\partial (P_i/D_P)}\right) = 0$$

양변에 K_Q 곱하기

$$-4\cdot\left(\frac{\partial K_Q}{\partial (P_i/D_P)}\right)K_T + \left(\frac{\partial K_Q}{\partial (P_i/D_P)}\right)\left(\frac{\partial K_T}{\partial J}\right)J - \left(\frac{\partial K_T}{\partial (P_i/D_P)}\right)\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)\cdot J + 5\cdot K_Q\left(\frac{\partial K_T}{\partial (P_i/D_P)}\right) = 0$$

$\left(\frac{\partial K_Q}{\partial (P_i/D_P)}\right), \left(\frac{\partial K_T}{\partial (P_i/D_P)}\right)$ 로 묶기

$$\left(\frac{\partial K_Q}{\partial (P_i/D_P)}\right)\left\{J\cdot\left(\frac{\partial K_T}{\partial J}\right) - 4K_T\right\} + \left(\frac{\partial K_T}{\partial (P_i/D_P)}\right)\left\{5K_Q - J\cdot\left(\frac{\partial K_Q}{\partial J}\right)\right\} = 0 \quad \cdots\cdots \quad \text{(h)}$$

5.2 Penalty Function 방법

제약 최적화 문제를 비제약 최적화 문제로 변환하는 방법
- Lagrange Multiplier 사용

<u>제약 최적화 문제</u>

Minimize $f(\mathbf{x})$

Subject to $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ 등호 제약 조건

$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \le \mathbf{0}$ 부등호 제약 조건

<u>Lagrange 함수를 이용한 비제약 최적화 문제로의 변환</u>

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{s}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^T\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^T(\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}^2)$$

국부적 후보 최적성 조건인 $\nabla L=0$으로부터 u, v를 계산해야 함

1) 현재의 설계점에서 제약 조건을 만족하는 경우

등호 제약 조건의 경우: $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

부등호 제약 조건의 경우: $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ (설계점이 제약 조건의 경계에 있지 않을 때)

$\mathbf{s} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ (설계점이 제약 조건의 경계 상에 있을 때)

따라서 $L(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{s}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^T\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^T(\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}^2) \Rightarrow f(\mathbf{x})$ ➡ 제약 조건을 만족할 때 Lagrange 함수가 원래의 목적 함수와 동일함

2) 현재의 설계점에서 제약 조건을 위배하는 경우

등호 제약 조건의 경우: $\mathbf{v}^T\mathbf{h}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$

부등호 제약 조건의 경우: $\mathbf{u}^T(\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}^2) > \mathbf{0}$

따라서 $L(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{s}) = f(\mathbf{x}) + \underline{\mathbf{v}^T\mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^T(\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}^2)}$

➡ 제약 조건을 위배할 때 원래의 목적 함수에 벌칙 값을 더한 것으로 생각할 수 있다.

제약 최적화 문제를 비제약 최적화 문제로 변환하는 방법

- SUMT: Sequential Unconstrained Minimization Technique(Internal Penalty Function Method)

제약 최적화 문제

Minimize $f(\mathbf{x})$

Subject to $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ 등호 제약 조건

$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \le \mathbf{0}$ 부등호 제약 조건

1968년에 Fiacco와 McCormick이
제약 조건의 위배량을 원래 목적 함수에 더한 수정된 목적 함수를 이용하여
제약 최적화 문제를 비제약 최적화 문제로 변환하는 방법을 제안함.
- SUMT: Sequential Unconstrained Minimization Technique

$$\Phi(\mathbf{x}, r_k) = f(\mathbf{x}) - r_k \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{g_j(\mathbf{x})}$$

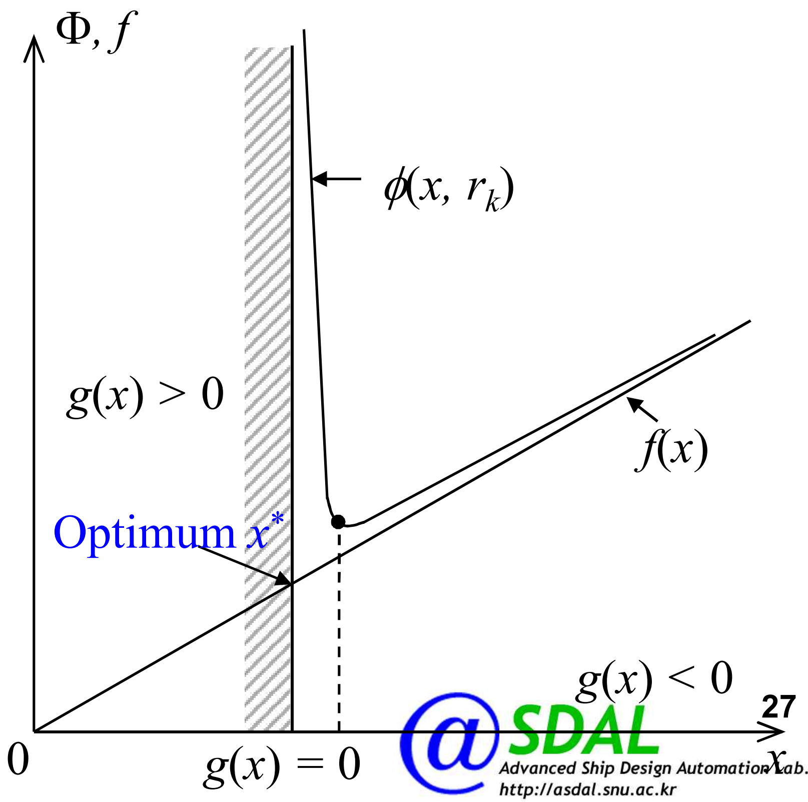
여기서, r_k는 문제에서 주어지는 양의 상수로서
Iteration이 진행될수록 그 값이 커짐

설계점이 Feasible region에서 부등호 제약 조건의 경계로 접근하면

$g_j(\mathbf{x}) \le 0$ 이며, 절대값이 작아짐

$-r_k \dfrac{1}{g_j(\mathbf{x})} > 0$ 이며, 절대값이 커짐

따라서 설계점이 부등호 제약 조건의 경계로 접근 할 때
수정된 목적 함수의 값이 증가하게 되고,
이는 제약 조건 식을 위배하는 것을 방지한다.



제약 최적화 문제를 비제약 최적화 문제로 변환하는 방법

- SUMT: Sequential Unconstrained Minimization Technique(Internal Penalty Function Method)

- 제약 조건에 다가가게 되면 목적 함수에 Penalty 항 부과
- 초기 시작점이 반드시 가능해 영역(feasible region)에 있어야 함

$$\Phi(\mathbf{x}, r_k) = f(\mathbf{x}) - r_k \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{g_j(\mathbf{x})}$$ (r_k는 k가 증가 할수록 감소한다.)

1변수 함수의 예시

$$f(x) = \alpha x, \quad g(x) = \beta - x \le 0$$

제약 최적화 문제를 비제약 최적화 문제로 변환

$$\Phi(x, r_k) = f(x) - r_k \frac{1}{g(x)} = \alpha x - r_k \frac{1}{\beta - x}$$

- k는 새로운 목적함수의 최적점을 찾는 반복 횟수이다.
- 각 반복과정에서의 최적점은 Gradient 방법, Hooke&Jeeves, Nelder&Mead 방법 등을 이용하여 찾을 수 있다.

$k = 1$, 시작점: x^*_0 ⇨ 최적점: x^*_1

$$\Phi(x, r_1) = \alpha x - r_1 \frac{1}{\beta - x}$$

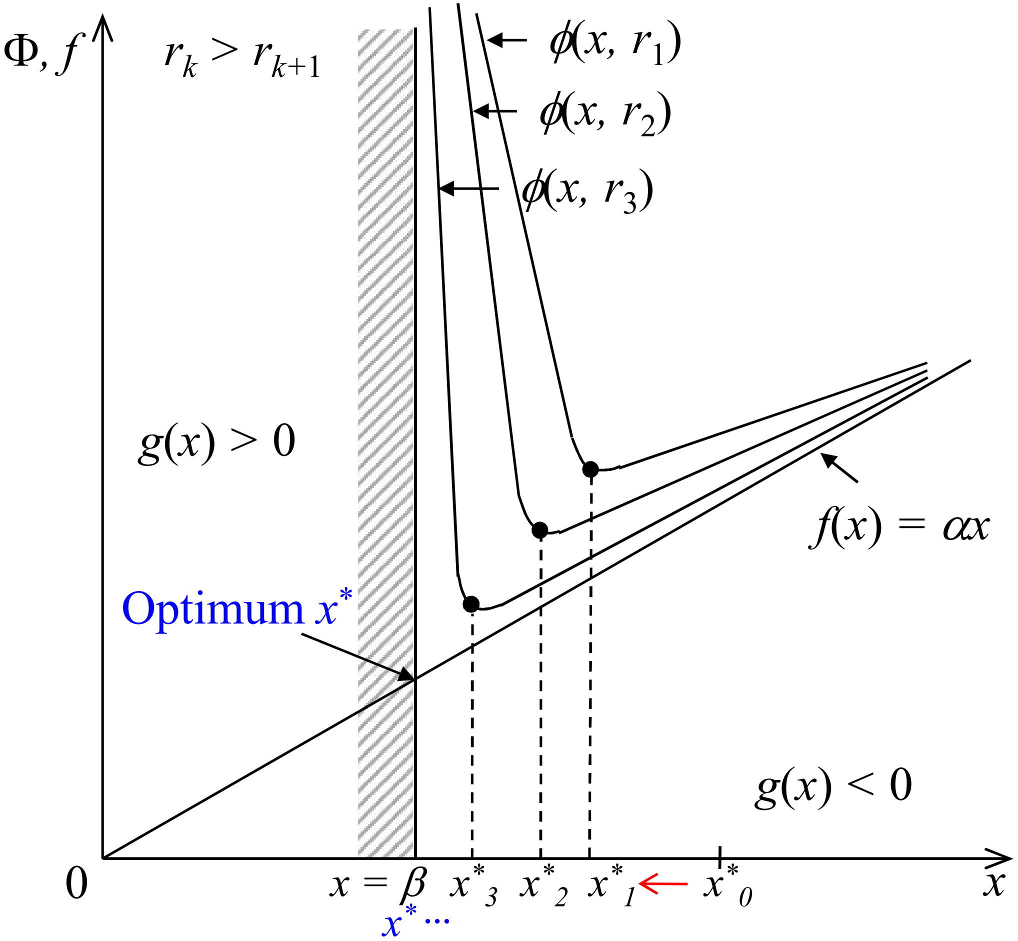
$k = 2$, 시작점: x^*_1 ⇨ 최적점: x^*_2

$$\Phi(x, r_2) = \alpha x - r_2 \frac{1}{\beta - x}$$

$k = 3$, 시작점: x^*_2 ⇨ 최적점: x^*_3

$$\Phi(x, r_3) = \alpha x - r_3 \frac{1}{\beta - x}$$

위의 과정을 반복하여 최적점(x^*)을 찾는다.



제약 최적화 문제를 비제약 최적화 문제로 변환하는 방법

- External Penalty Function Method사용(1/2)

- **제약 조건이 위배되었을 때만 목적 함수에 Penalty 항 부과**

$$\Phi(\mathbf{x}, r_k) = f(\mathbf{x}) + r_k \sum_{j=1}^{m} \left[\max\left\{ g_j(\mathbf{x}), 0 \right\} \right]^2 \qquad (r_k\text{는 } k\text{가 증가 할수록 증가한다.})$$

1변수 함수의 예시

$$f(x) = \alpha x, \quad g(x) = \beta - x \le 0$$

제약 최적화 문제를 비제약 최적화 문제로 변환

$$\Phi(x, r_k) = f(x) + r_k \max\left\{ g(x), 0 \right\} = \alpha x + r_k \max\left\{ g(x), 0 \right\}$$

- k는 새로운 목적함수의 최적점을 찾는 반복 횟수이다.
- 각 반복과정에서의 최적점은 Gradient 방법, Hooke&Jeeves, Nelder&Mead 방법 등을 이용하여 찾을 수 있다.

$k = 1$, **시작점**: x^*_0

$$\Phi(x, r_1) = \alpha x + r_1 \left[\max\left\{ g(x), 0 \right\} \right]^2 \Rightarrow \textbf{최적점}: x^*_1$$

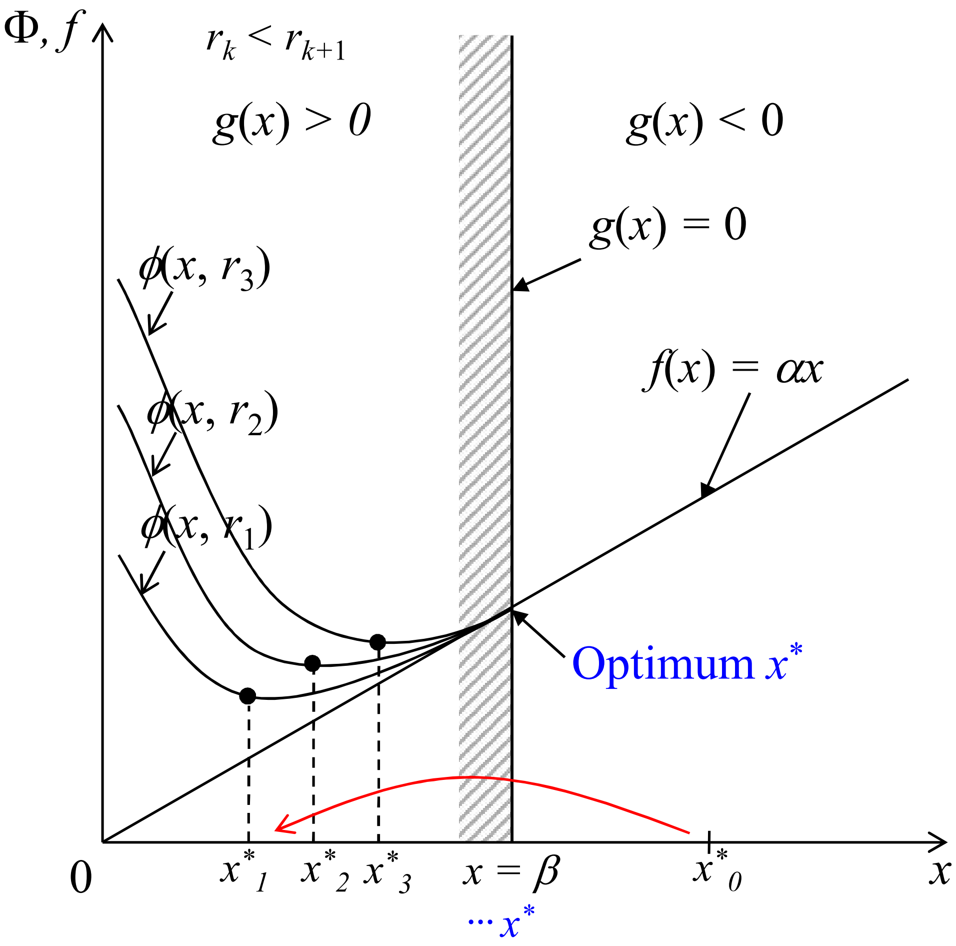
$k = 2$, **시작점**: x^*_0

$$\Phi(x, r_2) = \alpha x + r_2 \left[\max\left\{ g(x), 0 \right\} \right]^2 \Rightarrow \textbf{최적점}: x^*_2$$

$k = 3$, **시작점**: x^*_2

$$\Phi(x, r_3) = \alpha x + r_3 \left[\max\left\{ g(x), 0 \right\} \right]^2 \Rightarrow \textbf{최적점}: x^*_3$$

위의 과정을 반복하여 최적점(x^*)을 찾는다.



제약 최적화 문제를 비제약 최적화 문제로 변환하는 방법
- External Penalty Function Method사용(2/2)

- **제약 조건이 위배되었을 때만 목적 함수에 Penalty 항 부과**

$$\Phi(\mathbf{x}, r_k) = f(\mathbf{x}) + r_k \sum_{j=1}^{m} \max\{g_j(\mathbf{x}), 0\}$$ (r_k는 k가 증가 할수록 증가한다.)

1변수 함수의 예시

$$f(x) = \alpha x, \quad g(x) = \beta - x \le 0$$

제약 최적화 문제를 비제약 최적화 문제로 변환

$$\Phi(x, r_k) = f(x) + r_k \max\{g(x), 0\} = \alpha x + r_k \max\{g(x), 0\}$$

- k는 새로운 목적함수의 최적점을 찾는 반복 횟수이다.
- 각 반복과정에서의 최적점은 Gradient 방법, Hooke&Jeeves, Nelder&Mead 방법 등을 이용하여 찾을 수 있다.

$k = 1$, 시작점: x^*_0

$$\Phi(x, r_1) = \alpha x + r_1 \max\{g(x), 0\}$$

➡ 최적점: 찾을 수 없음

$k = 2$, 시작점: x^*_1

$$\Phi(x, r_2) = \alpha x + r_2 \max\{g(x), 0\}$$

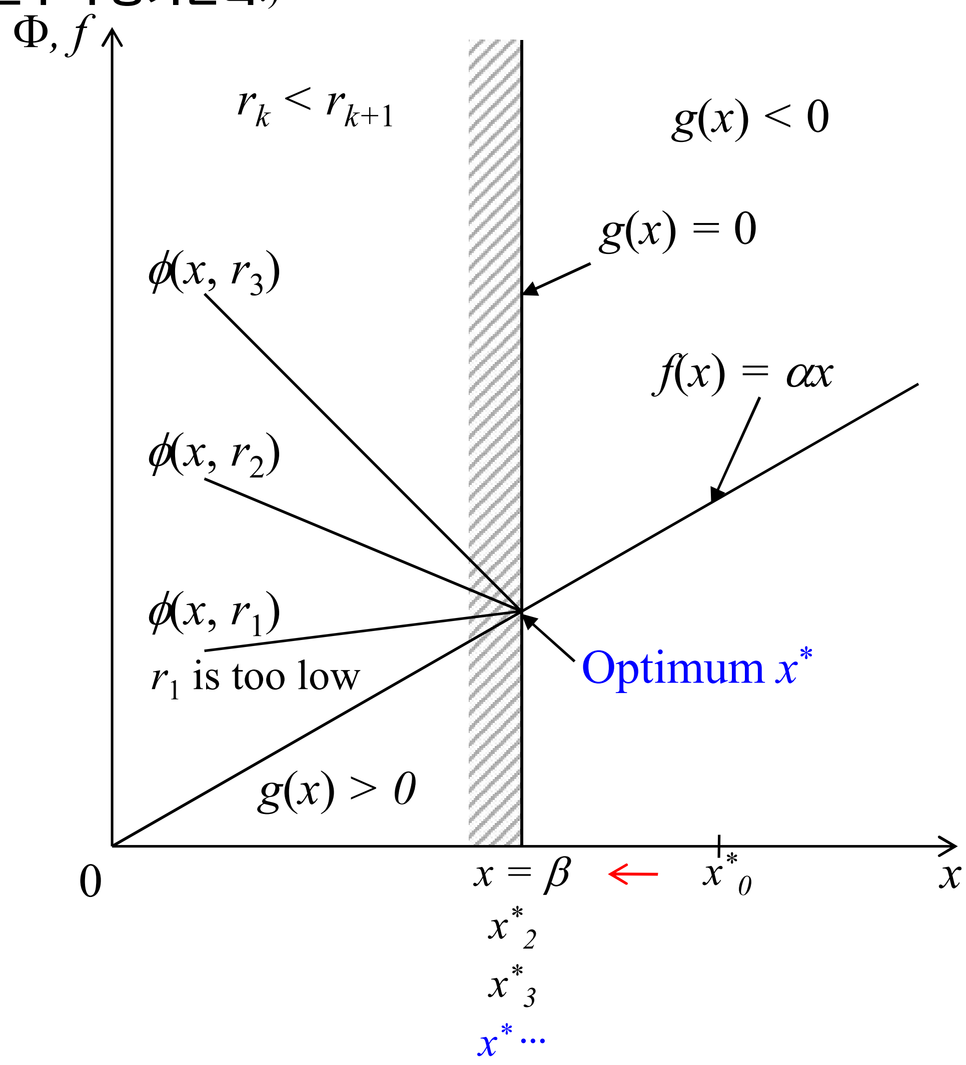
➡ 최적점: x^*_2

$k = 3$, 시작점: x^*_2

$$\Phi(x, r_3) = \alpha x + r_3 \max\{g(x), 0\}$$

➡ 최적점: x^*_3

최적점(x^*)이 변하지 않는다.
(r_k값을 적절히 결정했을 경우)



[참고] Penalty Function과 Feasible region의 관계(1/2)

- 제약 조건이 위배되었을 때만 목적 함수에 Penalty 항을 부과하기 때문에 Feasible region 내에 목적함수의 최소값이 있는 경우에는 강하 함수를 사용하여 최적 점을 찾는 경우와 원래 목적 함수를 사용하여 최적점을 찾는 경우의 결과가 같다.

1변수 함수의 예시

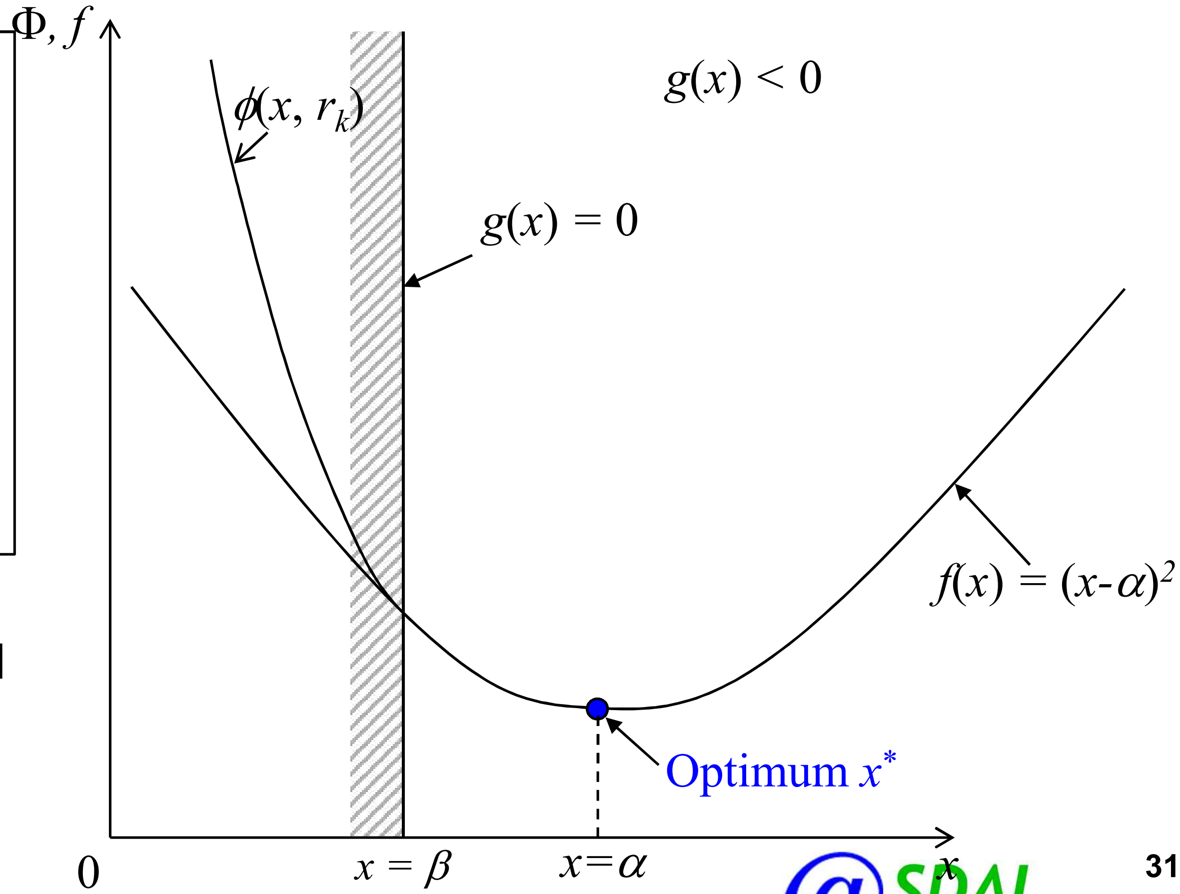
$$f(x)=(x-\alpha)^2,\ g(x)=\beta-x\le 0$$

$$\Phi(\mathbf{x},r_k)=f(\mathbf{x})+r_k\sum_{j=1}^{m}\underbrace{\left[\max\left\{g_j(\mathbf{x}),0\right\}\right]^2}_{\text{Penalty 항}}$$

$$\Phi(\mathbf{x},r_k)=f(\mathbf{x})$$

$$where,\ \ g(\mathbf{x})\le 0,\ \ \max\left\{g_j(\mathbf{x}),0\right\}=0$$

x가 가능해 영역(Feasible region)에 있는 경우 Penalty 항은 0이 되기 때문에 강하 함수와 목적 함수가 같아진다.



[참고] Penalty Function과 Feasible region의 관계(2/2)

- 제약 조건이 위배되었을 때만 목적 함수에 Penalty 항을 부과하기 때문에 목적함수의 최소값이 Feasible region 내에 없다면 강하 함수를 사용하여 최적 점을 찾는 경우와 원래 목적 함수를 사용하여 최적점을 찾는 경우의 결과는 다르다.

1변수 함수의 예시

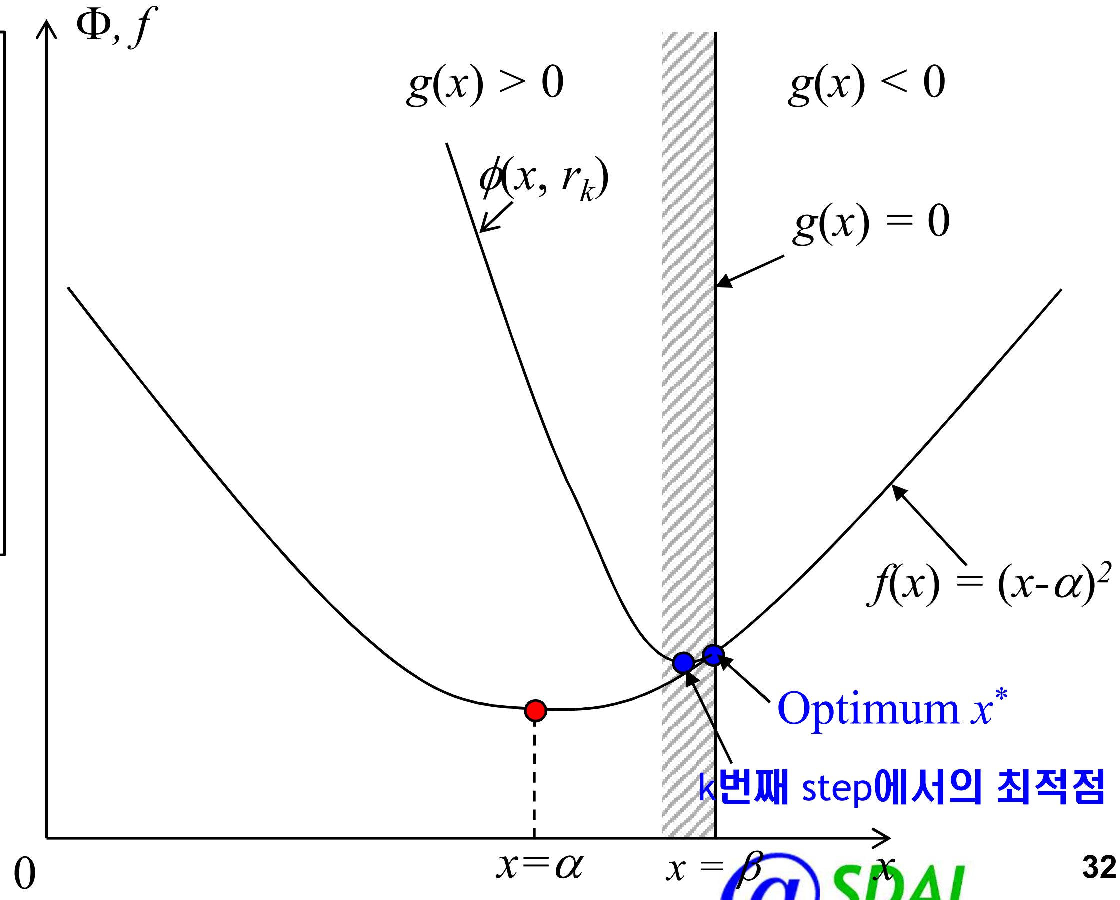
$$f(x) = (x-\alpha)^2,\ g(x) = \beta - x \le 0$$

$$\Phi(\mathbf{x}, r_k) = f(\mathbf{x}) + r_k \underbrace{\sum_{j=1}^{m} \left[\max\{g_j(\mathbf{x}), 0\}\right]^2}_{\text{Penalty 항}}$$

$$\Phi(\mathbf{x}, r_k) = f(\mathbf{x}) + r_k \sum_{j=1}^{m} g_j(\mathbf{x})^2$$

$$where,\ g(\mathbf{x}) > 0,\ \max\{g_j(\mathbf{x}), 0\} = g_j(\mathbf{x})$$

원래 목적함수의 최적점이 가능해 영역(Feasible region)내에 없는 경우 Penalty 항이 0보다 크기 때문에 강하 함수와 목적 함수는 달라진다.



제약 최적화 문제를 비제약 최적화 문제로 변환하는 방법
- Pshenichny의 강하 함수(Descent Function) 사용

<u>제약 최적화 문제</u>

Minimize $f(\mathbf{x})$

Subject to $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0$ 등호 제약 조건

$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \le 0$ 부등호 제약 조건

<u>*강하 함수(Descent Function)</u>
- 제약 조건의 위배량을 원래 목적 함수에 더한 수정된 목적 함수
- Penalty Function과 같은 의미

<u>Pshenichny의 강하 함수(Descent Function)*를 이용한 비제약 최적화 문제로의 변환</u>

1978년 Pshenichny와 Danilin에 의해 제안됨

$$\Phi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + R \cdot V(\mathbf{x})$$

여기서, $V(\mathbf{x}) = \max\{0; |\mathbf{h}|; \mathbf{g}\}$: 현재의 설계점에서의 최대 제약 조건 위배 값

$$R = \max\left\{\underbrace{R_0}_{\text{사용자가 정의하는 값}},\ r\left(= \sum_{i=1}^{p} |v_i| + \sum_{i=1}^{m} u_i\right)\right\}$$

: 벌칙 매개 변수로서
모든 Lagrange multiplier의 합

1) 현재의 설계점에서 제약 조건을 만족하는 경우

$$V(\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow R \cdot V(\mathbf{x}) = 0$$

$$\Rightarrow \Phi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + R \cdot V(\mathbf{x}) \Rightarrow f(\mathbf{x})$$

➡ 제약 조건을 만족할 때 강하 함수가
원래의 목적 함수와 동일함

2) 현재의 설계점에서 제약 조건을 위배하는 경우

$$R \cdot V(\mathbf{x}) > 0$$

$$\Rightarrow \Phi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \underline{R \cdot V(\mathbf{x})} > f(\mathbf{x})$$

➡ 제약 조건을 위배할 때
원래의 목적 함수에 양의 벌칙 값을 더한 것

[참고] Pshenichny의 강하 함수(Descent Function)에서 상수 R이 가지는 의미

Original Problem

$$\textit{Minimize} \quad f(\mathbf{x}) = 100(x_1 - 1.5)^2 + 100(x_2 - 1.5)^2$$

$$\textit{Subject to} \quad g(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 - 2 \le 0$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + R \cdot V(\mathbf{x})$$

$$V(\mathbf{x}) = \max\{0; |\mathbf{h}|; \mathbf{g}\}$$

$$R = \max\left\{R_0,\ r(=\sum_{i=1}^{p}|v_i| + \sum_{i=1}^{m} u_i)\right\}$$

만일 R이 10으로 고정되어 있다고 가정하면

점 C(1,1)(제약조건을 위반하지 않음)에서
강하함수 값은

$$\Phi(\mathbf{C}) = f(\mathbf{C}) + R \cdot V(\mathbf{C}) = 50 + R \cdot \max\{0, g(\mathbf{C})\}$$

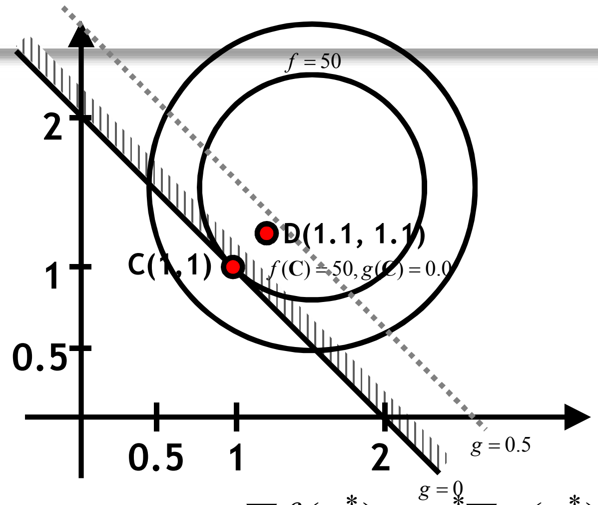
$$= 50 + 10 \cdot \max\{0, 0\} = 50$$

점 D(1.1, 1.1)(제약조건을 위반 함)에서
강하함수 값은

$$\Phi(\mathbf{D}) = f(\mathbf{D}) + R \cdot V(\mathbf{D}) = 32 + R \cdot \max\{0, g(\mathbf{D})\}$$

$$= 32 + 10 \cdot \max\{0, 0.2\} = 32 + 2 = 34$$

제약조건을 위반했음에도 강하함수 값이 감소하였다.
원래 목적함수 f의 변화량이 제약조건 g의 변화량보다
상대적으로 크기 때문이다. 따라서 f의 감소량이
제약조건 g의 증가량보다 큰 경우에는 R값이
커져야 한다.



점 C에서 $-\nabla f(\mathbf{x}^*) = u^* \nabla g(\mathbf{x}^*)$의 값을 살펴보면

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}^*(1,1)} = \begin{bmatrix} 200(x_1 - 1.5) \\ 200(x_2 - 1.5) \end{bmatrix}_{\mathbf{x}^*(1,1)} = \begin{bmatrix} -100 \\ -100 \end{bmatrix}$$

$$\nabla g(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\mathbf{x}^*(1,1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathbf{x}^*(1,1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$u^* = 100$

목적 함수값의 변화량($\nabla f(\mathbf{x})$)이 제약조건의
변화량($\nabla g(\mathbf{x})$)에 비하여 상대적으로 크면
Lagrange Multiplier의 값은 증가한다.
따라서 Lagrange Multiplier의 값을
강하 함수의 R값으로 사용하였다.

R값을 Lagrange Multiplier 값인 100을 사용할 경우
점D에서의 함수 값은 52로 증가하게 된다.

$$\Phi(\mathbf{D}) = f(\mathbf{D}) + R \cdot V(\mathbf{D}) = 32 + R \cdot \max\{0, g(\mathbf{D})\}$$

$$= 32 + 100 \cdot \max\{0, 0.2\} = 32 + 20 = 52$$

참 고 자 료

공학수학 Review
- Linear Algebra

Advanced
Ship
Design
Automation
Laboratory

공학수학 Review
- Quadratic Forms

Advanced
Ship
Design
Automation
Laboratory

Quadratic Forms. Transformation to Principal Axes

Definition: a quadratic form Q in the components $x_1, \ldots, x_n$ of a vector $\mathbf{x}$ is a sum of n^2 terms, namely,

$$Q = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_j x_k$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n \\ &\quad + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n \\ &\quad + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots + \\ &\quad + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned}$$

$\mathbf{A} = [a_{jk}]$ is called of the *coefficient matrix* of the form. We may assume that $\mathbf{A}$ is *symmetric*, because we can take off-diagonal terms together in pairs and write the result as a sum of two equal terms.

Quadratic Forms. Transformation to Principal Axes

Let

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= 3x_1^2 + \boxed{4x_1x_2 + 6x_2x_1} + 2x_2^2$$

$$= 3x_1^2 + \boxed{10x_1x_2} + 2x_2^2$$

$$= 3x_1^2 + \boxed{5x_1x_2 + 5x_2x_1} + 2x_2^2$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{x} \qquad \mathbf{C} = \left[c_{jk}\right],\ c_{jk} = \frac{1}{2}\left(a_{jk} + a_{kj}\right)$$

Principal Axes Theorem

Theorem 8.4.2 Symmetric Matrices

A symmetric matrix has an orthonormal basis of eigenvectors for R^n.

(Quadratic Forms) $$Q = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_j x_k$$

By the Theorem 8.4.2 the *symmetric* coefficient matrix $\mathbf{A}$ has an *orthonormal basis of eigenvectors* $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$. Let $\mathbf{X}$ be

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{x}_n]$$

$\mathbf{X}$ is *orthogonal*, so that $\mathbf{X}^{-1}=\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$, we obtain

$$\mathbf{D} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}$$

$$\therefore \mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^{-1} = \mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$$

$$Q = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}(\mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^{\mathrm{T}})\mathbf{x}$$

Symmetric: $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}$

Skew-symmetric: $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=-\mathbf{A}$

Orthogonal: $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\mathbf{A}^{-1}$

Principal Axes Theorem

$$Q = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$$

If we set $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{y}$, then, since $\mathbf{X}^{\mathrm{T}} = \mathbf{X}^{-1}$, we get

$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{y} = \mathbf{X}\mathbf{y}$$

Furthermore, we have

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} = \left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}$$

So Q becomes simply

$$Q = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{y}$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

$$Q = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} \longleftarrow \mathbf{D} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{X}$$

$$= \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} \longleftarrow \mathbf{y} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{x} = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$$

$$= \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{y} \qquad \mathbf{y}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{x})^{\mathrm{T}} = \mathbf{x}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}$$

Principal Axes Theorem

Theorem 8.4.5 Principal Axes Theorem

The substitution $\mathbf{x} = \mathbf{X}\mathbf{y}$ transforms a quadratic form

$$Q = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_j x_k \qquad \left(a_{kj} = a_{jk}\right)$$

to the *principal axes form* or *canonical form*

$$Q = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

where $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ are the (not necessarily distinct) eigenvalues of the *symmetric* matrix $\mathbf{A}$, and $\mathbf{X}$ is an *orthogonal* matrix with corresponding eigenvectors $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, respectively, as column vectors.

$Q = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$

Principal Axes Theorem

Ex) Transformation to Principal Axes. Conic Sections

Find out what type of conic section the following quadratic form represents and transform it to principal axes. (Ex 8.2-1)

$$Q = 17x_1^2 - 30x_1x_2 + 17x_2^2 = 128$$

$$Q = 17x_1^2 - 30x_1x_2 + 17x_2^2 = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 & -15 \\ -15 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 17 & -15 \\ -15 & 17 \end{bmatrix}$$

Characteristic Equation:

$$\begin{vmatrix} 17-\lambda & -15 \\ -15 & 17-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(17-\lambda)^2 - 15^2 = 0 \quad \therefore \lambda_1 = 2, \ \lambda_2 = 32$$

Eigenvectors

$$\lambda_1 = 2, \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = 32, \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$Q = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\mathbf{D}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{y}$$

$$= [y_1, y_2] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$= 2y_1^2 + 32y_2^2 = 128$$

$$\therefore \frac{y_1^2}{8^2} + \frac{y_2^2}{2^2} = 1$$

Principal Axes Theorem

Principal Axes

$$Q = 17x_1^2 - 30x_1x_2 + 17x_2^2 = 128$$

$$Q = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}$$

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 32$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 17 & -15 \\ -15 & 17 \end{bmatrix}$$

1) $\lambda = \lambda_1 = 2$

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 15 & -15 \\ -15 & 15 \end{bmatrix}$$

$$15x_1 - 15x_2 = 0$$

From this we get normalized eigenvector $\mathbf{x}_1$.

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

2) $\lambda = \lambda_2 = 32$

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -15 & -15 \\ -15 & -15 \end{bmatrix}$$

$$-15x_1 - 15x_2 = 0$$

From this we get normalized eigenvector $\mathbf{x}_2$.

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

Principal Axes Theorem

Ex) Transformation to Principal Axes. Conic Sections

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}\mathbf{y}$$

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2]$$

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}}$$

$$\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}^{\mathbf{T}}$$

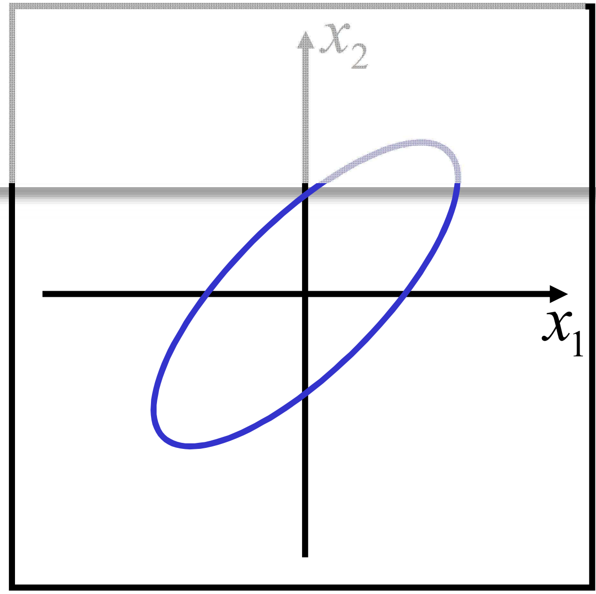
$$\therefore \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

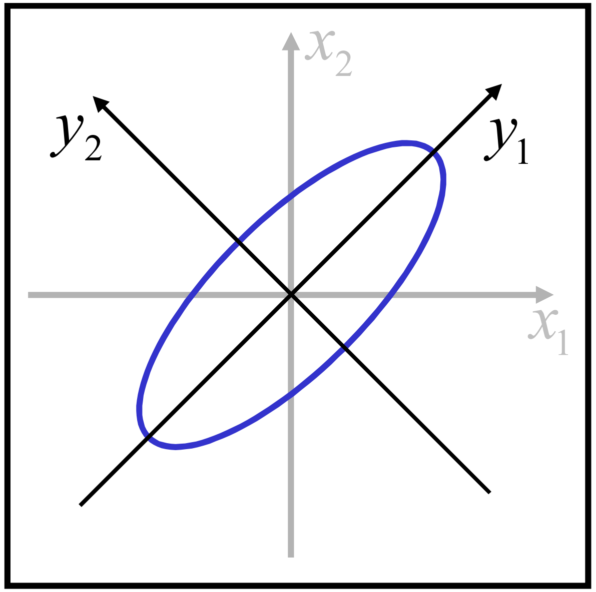
$$= \begin{bmatrix} \cos 45° & -\sin 45° \\ \sin 45° & \cos 45° \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

$$Q = 17x_1^2 - 30x_1x_2 + 17x_2^2 = 128$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}\mathbf{y}$$

$$\frac{y_1^2}{8^2} + \frac{y_2^2}{2^2} = 1$$





➔**This means a 45° rotation (of principal axes. (See example 8.2-1.)**

Quadratic form(Definiteness)

A quadratic form $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ and its (symmetric!) matrix A are called

(a) positive definite if $Q(\mathbf{x}) > 0$ for all $\mathbf{x} \neq 0$,

(b) negative definite if $Q(\mathbf{x}) < 0$ for all $\mathbf{x} \neq 0$,

(c) indefinite if Q(x) takes both positive and negative values.

Quadratic form(Definiteness)

A quadratic form $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}$ and its (symmetric!) matrix A are called

(a) positive definite if $Q(\mathbf{x}) > 0$ for all $\mathbf{x} \neq 0$,

(b) negative definite if $Q(\mathbf{x}) < 0$ for all $\mathbf{x} \neq 0$,

(c) indefinite if Q(x) takes both positive and negative values.

A necessary and sufficient condition for positive definiteness is that all the “principal minors” are positive, that is,

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \cdots \quad , \quad \det \mathbf{A} > 0$$

Show that the form in Prob. 23 is positive definite, whereas that in Prob. 19 is indefinite.

Quadratic form(Definiteness)

A necessary and sufficient condition for positive definiteness is that all the "principal minors" are positive, that is,

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \cdots \quad , \quad \det \mathbf{A} > 0$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = 4 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 4 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 5 > 0$$

➔ **positive definite**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 12 & -6 \end{bmatrix}$$

$$a_{11} = 1 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 12 \\ 12 & -6 \end{vmatrix} = -6 - 12^2 = -150 < 0$$

➔ **indefinite**

Quadratic form(Definiteness)

the eigenvalues of $\mathbf{A}$ are

(a) positive definite: all positive

(b) negative definite: all negative

(c) indefinite: both positive and negative

$$Q = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \mathbf{X}\mathbf{y}$$

$$= \mathbf{y}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 \quad \textbf{(1)}$$

Because y = X^{-1}x, if x≠0, then y≠0.

From equation (1),

If all eigenvalues are positive, $Q(x)$ is positive.

If all eigenvalues are negative, $Q(x)$ is negative.