학 습 목 표

측량에서는 많은 양의 관측 (observation)과 측정 (measurement)이 이루어지며 좀 더 신뢰성 있는 수치 결과를 얻기 위하여 여러 가지 측정 방법들이 사용된다. 그러나 어떤 측정 방법을 택하여도 편차 (variation) 또는 오차 (error)가 전혀 없는 측정값을 얻을 수는 없다. 즉, 우리가 측정한 값에는 편차를 포함하고 있으며, 어떤 측정값도 확실하다고 할 수 없다. 우리가 정확한 값, 혹은 참값 (true value)이라고 인정할 수 있는 값을 구하더라도 그것은 참값의 추정값에 불과하다. 이 장에서는 어떤 값의 측정값과 참값과의 차이를 오차라고 하며 측정값에서 오차를 줄이기 위한 방법을 배우게 된다.

2-1 오차론 용어

오차론 용어

- 참값 (True Value): 추상적인 개념의 값 , 관념적인 값이므로 절대 발견될 수 없음
- 참오차 (True Error): 참값과 마찬가지로 추상적인 개념의 값 (참값 - 측정값)
- 최확값 (Most Probable Value): 측정값으로 구할 수 있는 참값에 가까운 추정값
- 잔차 (Residual): 최확값과 측정값과의 차
- 상대오차 (Relative Error): 측정값의 크기와 오차의 크기 비율
- 중량 (Weight): 측정 사이의 상대적 신뢰도를 표현하는 척도

참고

각각의 용어 사이에는 다음의 관계식이 성립한다

- $x = l - X$ ····· ① $c = X - l = -x$ ····· ②
- $e = l - X_0$ ····· ③ $\delta = X_0 - l = -e$ ····· ④

X : 참값(True Value)

X_0 : 최확값(MPV: Most Probable Value)

l : 관측값/측정값

x : 참오차(True Error)

e : 오차(Error)

δ : 잔차(Residual)

c : 보정값(Correction Factor)

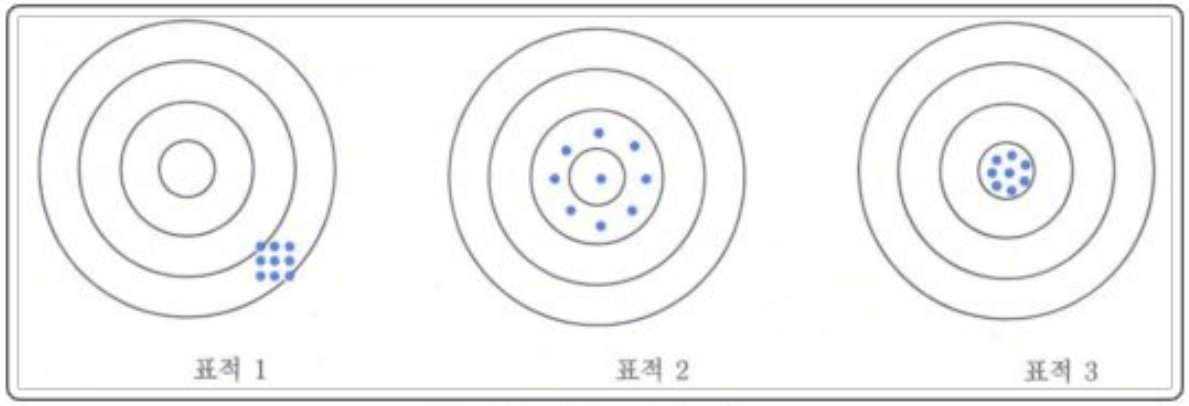
2-2 정확도와 정밀도

| 정확도 (accuracy)

표준치 또는 허용값과의 적합도로서 성과의 질에 관계된다. 측정값이 참값에 얼마나 일치되는가를 표시하는 척도로 사용되며, 참값에 대한 특별한 언급이 없는이상 발견될 수 없는 값이라 할 수 있다. 측정의 정교성이나 균질성과는 무관하다.

| 정밀도 (precision)

측정시의 정교도 및 측정기기 또는 방법의 완전성 정도를 의미하며 측정성과의 균일성 또는 재생성의 척도라 할 수 있다.



[2-1] 정확도와 정밀도

| 어느 한 사람이 표적에 대하여 사격 연습을 한 결과

- <표적 1>의 결과는 탄흔이 서로 가깝게 모여 있으므로 정밀, 표적 중심에서 벗어나 있으므로 정확하다고 할 수는 없음
- <표적 2>는 탄흔이 중심에 가까우므로 정확하다고 할 수 있으나 골고루 퍼져 있으므로 정밀하다고 할 수 없음
- <표적 3>은 탄흔이 중심에 모여 있으므로 정밀하고 정확하다고 할 수 있음

2-3 오차의 원인과 종류

일반적으로 오차는 오차의 성질에 따라 과대오차 , 정오차 , 우연오차의 세 가지로 구분되며 이중 정오차는 발생하는 원인에 의해 기계오차 , 물리적 오차 , 개인오차의 형태로 구분된다

성질별 구분

- **과대오차 (blunder or mistake)**
  : 관측자의 부주의나 측량 방법을 잘못 적용함으로써 발생하는 오차이다 . 다른 두 형태의 오차보다 크기가 상대적으로 매우 크므로 쉽게 발견되며 실제로 측정값에 큰 영향을 준다 .
- **정오차 (constant error or systematic error)**
  : 크기와 방향을 알 수 있는 오차이다 . 일정한 조건에서 언제나 같은 형태로 발생하는 오차이며 수학적인 모델링이 가능하다 .
- **우연오차 (random error)**
  : 발생빈도 , 크기 , 부호 등을 전혀 알 수 없으며 예측 불가능한 오차로써 통계학적으로 보정된다 .

정오차의 원인적 구분

- **자연오차 (natural error)**
  : 자연현상에 의해 측정을 방해 받음으로써 발생하는 오차
- **기계오차 (instrumental error)**
  : 측정에 사용되는 기계의 구조적 특성이나 조정의 불완전성에 의해 발생하는 오차
- **개인오차 (personal error)**
  : 개인의 버릇에 기인하는 오차

2-4 오차곡선

| 오차곡선

>> 자세히보기

$y = f(x)$ x: 오차의 크기, y: x 발생확률

여러 가지 모델 중, Gauss의 식 $y = ke^{-h^2x^2}$

※ $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

여기서, $\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} = h$, $(x-\mu) = x$로 두면, $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ $\frac{1}{\sqrt{2}\sigma} = h, (x-u) = x$

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} \xrightarrow{\frac{h}{\sqrt{\pi}}=k} y = ke^{-h^2} \quad y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2} \xrightarrow{\frac{h}{\sqrt{\pi}=k}} y = ke^{-h^2}$$

k, h는 관측조건에 따라 달라지는 상수

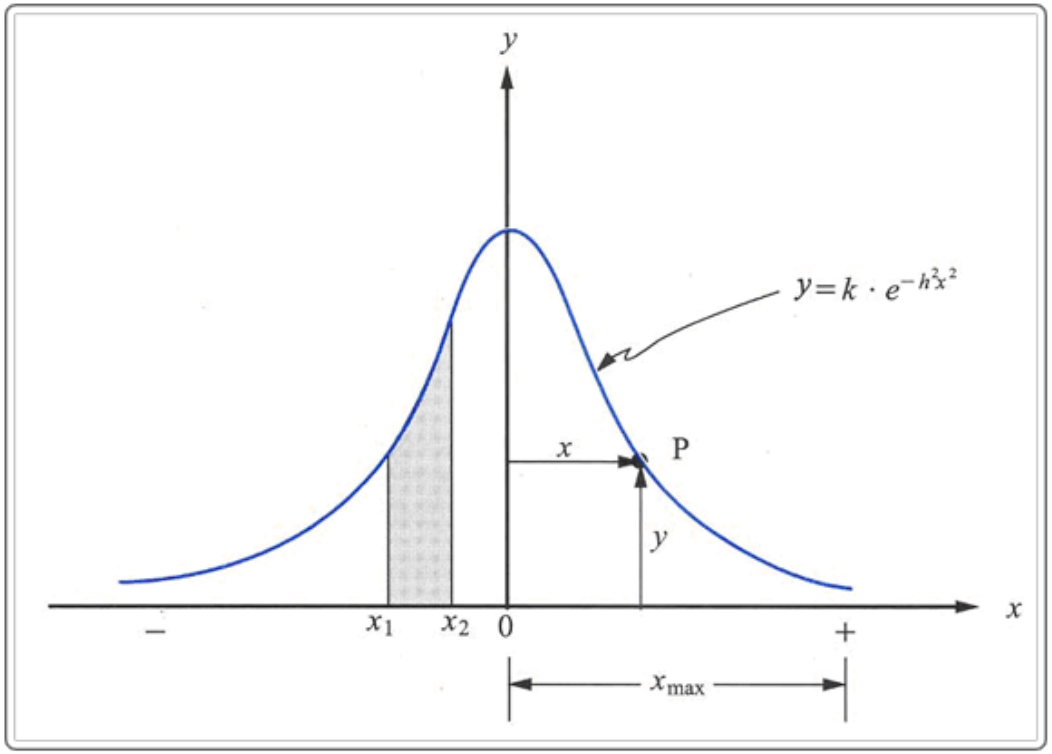
위의 Gauss 식에 의해 표현되는 곡선을 오차곡선 혹은 확률곡선이라 하며, 이러한 분포를 정규분포(Normal distribution $\sim N(\mu, \sigma^2)$)으로 표현한다. 특히 , $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ 인 특수한 경우를 표준정규분포(standard normal distribution)이라 한다.

$$P[u-\sigma_x \le x \le u+\sigma_x] = 0.6827$$
$$P[u-2\sigma_x \le x \le u+2\sigma_x] = 0.9545$$
$$P[u-3\sigma_x \le x \le u+3\sigma_x] = 0.9973$$
$$P[u-4\sigma_x \le x \le u+4\sigma_x] = 1.0000$$

2-4 오차곡선

오차곡선

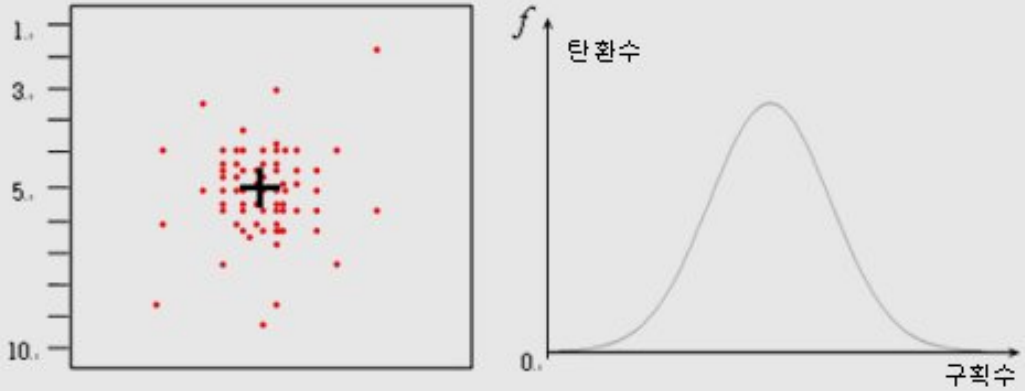
>> 자세히보기



2-4 오차곡선

| 오차의 3법칙 (1878년 美 병기국 실험)

구획	명중탄수
1	1
2	4
.	.
.	.
6	180
7	174
.	.
.	.
10	2
10	1,000



① 작은 오차 개수는 큰 오차 개수보다 많다 → 작은 오차 발생확률 > 큰 오차 발생확률
② 같은 크기의 (+), (-) 오차의 개수는 거의 같다 → 발생확률 비슷
③ 극히 큰 오차는 발생하지 않는다 → 기대확률은 0 에 가깝다

오차의 3법칙은 우연오차만을 대상으로 하고 있으므로 최소제곱법 (LSM) 적용 시에는 계통적 오차와 과오는 제외한다

2-4 오차곡선

proof > $y = ce^{-h^2x^2}$ 이 오차의 3법칙을 만족하는가 ? >> 자세히보기

proof> $y = ce^{-h^2x^2}$ 이 오차의 3법칙을 만족하는가?

① $\dfrac{dy}{dx} = -2ch^2xe^{-h^2x^2}$; $x=0$ 일 때 $\dfrac{dy}{dx} = 0$ → 기울기

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2(2h^2x^2-1)ch^2e^{-h^2x^2}$; $x=0$ 일 때 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = -2ch^2$ → 곡률 (위로 볼록)

② ①에서, $x=0$ 일 때 y 는 최대값을 가진다.

또, $y = ce^{-h^2x^2}$ 에서 오차 x 가 증가하면 확률 y 가 감소한다.

(⇒ 법칙 ①)

③ $y = ce^{-h^2x^2}$ 에서 y 는 x 의 제곱의 함수이므로 x 의 부호에 관계없다.

(⇒ 법칙 ②)

④ $x \longrightarrow \pm\infty$ 일 때 $y=0$ 이므로 (⇒ 법칙 ③)

2-5 정밀도의 표현

산포도를 이용하여 측정값의 정밀도를 표현

표준편차 (standard deviation)

산포도를 표현하는 가장 보편적인 수단 , 측정값의 평균값과 측정값의 편차의 제곱합 (분산)의 제곱근을 이용하여 표현한다

$$\text{분산 :}\quad \sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - u)^2 / n$$

여기서 μ 는 모집단의 평균(즉, 참값)이고, n 은 변수가 무한일 경우에 적용되는 식이다. 그러나 실제로는 한정된 변수만을 가지고 측정이 이루어지므로 모집단의 평균값 μ 대신 표본 평균값 $\bar{x}$ 를 사용한다. 또한, μ 대신 사용된 $\bar{x}$ 는 항상 기대 값보다 적어 모집단의 평균값이 편의되게 된다. 따라서 n 대신 n - 1 이 사용되며 이를 자유도라 부름.

$$\text{표준편차 :}\quad \sigma_x = \pm\{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 /(n-1)\}^{1/2}$$

표준오차 (standard error)

하나의 모집단으로부터 뽑혀 나온 같은 크기의 여러 개의 표본 평균에 대한 평균값이 어떤 구간 내에서 어떤 도수로 분포하고 있는 가를 평가하는 값 , 표본의 평균을 사용하여 표준오차를 구하고 모집단 평균에 대한 최적 추정값으로 이용

$$\text{표준오차 :}\quad \sigma_x = \pm\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \pm\{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 /(n-1)\}^{1/2}$$

2-6 중량평균

중량평균(weighted mean)

일련의 측정값으로부터 최확값을 결정할 경우 측정값들의 상대적인 신뢰도를 고려하여 결정한 측정값의 평균

중량평균 : $\overline{x_w} = \dfrac{x_1 w_1 + x_2 w_2 + \cdots\cdots + x_n w_n}{w_1 + w_2 + \cdots\cdots + w_n} = \sum_{i=1}^{n}(x_i w_i) / \sum_{i=1}^{n} w_i$

측정에 대한 중량을 결정하는 방법

① 측정 당시의 상황에 따른 측정자의 주관적 판단에 따르는 법
② 측정 반복 회수에 비례하여 할당하는 방법
③ 분산이나 공분산을 이용하는 방법

- ③의 방법은 통계적으로 가장 적절하므로 많이 쓰임
- 오차는 측정 횟수의 제곱근에 반비례하고, 중량은 측정 횟수에 비례하므로 분산의 역수에 비례한다. 즉, $w = k/\sigma^2$ (여기서 k는 비례상수)

2-6 중량평균

참고 중량을 고려한 측정값에 대한 표준편차 및 표준오차 >> 자세히보기

표준편차 : $$\sigma_x = \pm\left\{\sum_{i=1}^{n} w_i(x_i-\bar{x})^2 \Big/ \left(\sum_{i=1}^{n} w_i\right) w_i(n-1)\right\}^{1/2}$$

표준오차 : $$\sigma_x = \sigma_{x1} / \sqrt{w_i}$$

$$= \pm\left\{\sum_{i=1}^{n} w_i(x_i-\bar{x})^2 / w_i(n-1)\right\}^{1}$$

2-7 오차전파

오차전파 (Propagation of Error)

간접측량에 의해 측정값을 구할 경우 각각의 측정에서 발생하는 오차는 최종 측정값의 오차에 영향을 미치게 된다 . 이때 최종 측정값의 오차는 각각의 측정에서 발생하는 오차의 전파량을 구함으로써 알 수 있다

정오차의 전파

n 개의 구간으로 분할하여 기선을 측정할 경우 각 구간에서 발생한 정오차를 e_i 라 하면 전 기선에 대한 정오차 E는 다음과 같다.

$$E = e_1 + e_2 + e_3 + \cdots\cdots + e_n = \sum_{i=1}^{n} e_i$$

우연오차의 전파

nm 개의 값들로 이루어진 벡터 y가 n 개의 변수를 가진 또 다른 하나의 벡터 x의 함수일 경우 변수 x에 대한 공분산 행렬이 주어졌을 경우 y에 대한 공분산 행렬은 다음과 같다

$$\Sigma_{xy} = J_{xy} \Sigma_{xy} J_{yx}^{T}$$

여기서, J_{yx}는 $m \times n$ 행렬로써 **야코비 행렬 (Jacobian matrix)** >> 자세히보기

2-7 오차전파

야코비 행렬 (Jacobian matrix)

$$\Sigma_{xx} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 & \sigma_{13}^2 & \cdots\cdots & \sigma_{1n}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma_{22}^2 & \sigma_{23}^2 & \cdots\cdots & \sigma_{2n}^2 \\ \sigma_{31}^2 & \sigma_{32}^2 & \sigma_{33}^2 & \cdots\cdots & \sigma_{3n}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sigma_{m1}^2 & \sigma_{m2}^2 & \sigma_{m3}^2 & \cdots\cdots & \sigma_{mn}^2 \end{bmatrix}$$

$$J_{xy} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} & \cdots\cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} & \cdots\cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \frac{\partial y_m}{\partial x_3} & \cdots\cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

2-7 오차전파

특별한 경우의 우연오차 전파식

1) 함수 y가 n 개의 독립변수 의 함수일 경우

$$\sigma_y^2 = \left[\frac{\partial y}{\partial x_1}\ \frac{\partial y}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial y}{\partial x_n}\right] \begin{bmatrix} \sigma_{x1}^2 & & & \\ & \sigma_{x2}^2 & & 0 \\ & & & \\ & 0 & & \\ & & & \sigma_{xy}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} \\ \frac{\partial y}{\partial x_2} \\ \cdot \\ \frac{\partial y}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$\sigma_y^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x1}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x2}^2 + \cdots\cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{xn}^2$$

2) 함수 y가 n 개의 독립변수의 합으로 이루어진 함수일 경우

$$\sigma_y^2 = \sigma_{x1}^2 + \sigma_{x2}^2 + \sigma_{x3}^2 + \cdots\cdots + \sigma_{xm}^2$$

3) 함수 y가 두수의 곱으로 이루어진 경우

두 수의 곱 $y = X_1 X_2$ $\sigma_y = \sqrt{a^2 b_b^2 + b^2 \sigma_a^2}$

4) 평균의 표준오차

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial x_1} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial x_2} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial x_3} = \cdots\cdots = \frac{\partial \bar{x}}{\partial x_n} = \frac{1}{n}$$

$$\sigma_{x1} = \sigma_{x2} = \sigma_{x3} = \cdots\cdots = \sigma_{xm} = \sigma_x$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \pm\sqrt{n(1/n)^2 \sigma_x^2}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \pm\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

2-8 오차의 조정

최소제곱의 원리 (principle of least squares)

측정값에 항상 포함되어 있는 오차를 확률이론에 의해 합리적으로 조정하여 참값에 가장 가까운 값 , 즉 최확값을 구하는 방법

만일 어떤 측정값을 동일조건에서 n회 측정한 경우

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = l_1 - X \\ x_2 = l_2 - X \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \\ x_n = l_n - X \end{array}\right\} here, \left\{\begin{array}{l} X : True\ Value \\ l_i : 측정값 \\ x_i : True\ Error \end{array}\right.$$

그런데, 일반적으로 X는 알 수 없으므로 도 구할 수 없다.

따라서, X에 가장 가까운 값(최확값 또는 기대값(Expectation))를 X_0라면,

$$\left.\begin{array}{l} e_1 = l_1 - X_0 \\ e_2 = l_2 - X_0 \\ \quad\cdot \\ \quad\cdot \\ e_n = l_n - X_0 \end{array}\right\} here, \left\{\begin{array}{l} e_i : Error \\ -e_i : \delta_i\ (residual) \end{array}\right.$$

여기서, e_i를 참오차 x_i로 간주하면, x_i는 오차곡선식을 만족한다. 즉,

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = ce^{-h^2 x_1^2} \\ y_2 = ce^{-h^2 x_2^2} \\ \quad\vdots \\ y_n = ce^{-h^2 x_n^2} \end{array}\right\}$$

이들은 각각 독립사상이므로 동시에 발생할 확률 P는 $P = y_1 \cdot y_2 \cdots y_n = c^n e^{-h^2(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)}$

여기서, c, e, h는 상수

따라서 최확값은 P가 극대인 경우이므로 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \rightarrow \min$ 이면 된다.

∴ 측정된 값의 최확값은 오차의 제곱의 합이 최소가 되는 값이다

2-8 오차의 조정

참고

1. 산술평균을 최확값으로 사용할 수 있는 이유 >> 자세히보기

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = l_1 - X \\ x_2 = l_2 - X \\ \vdots \\ x_n = l_n - X \end{array}\right\} \quad [x] = [l] - nX \rightarrow ①$$

n이 충분히 많을 때, 오차의 법칙에 의해 $[x] = 0$이므로 $X = \frac{[l]}{n} \rightarrow ②$

그러나, True Value X는 구할 수 없으므로 X_0를 대신 사용하면,

$$X_0 = \frac{[l]}{n} \rightarrow ③$$

$$\left.\begin{array}{l} \delta_1 = X_0 - l_1 \\ \delta_2 = X_0 - l_2 \\ \vdots \\ \delta_n = X_0 - l_n \end{array}\right\} \rightarrow ④ \qquad [\delta] = nX_0 - [l] \rightarrow ⑤$$

③에서 $X_0 = \frac{[l]}{n}$이므로 $[\delta] = 0 \rightarrow$주로 계산점검에 사용

④의 제곱의 합을 만들면,

$$\begin{aligned}[\delta\delta] &= (X_0 - l_1)^2 + (X_0 - l_2)^2 + \cdots + (X_0 - l_n)^2 \\ &= nX_0^2 - 2[l]X_0 + [ll]\end{aligned} \rightarrow ⑥$$

③ →⑥대입하면, $[\delta\delta] = [ll] - \frac{[l]^2}{n} \rightarrow ⑦$

만약 $\left.\begin{array}{l}\text{미지의 임의의 값 } X' \\ \text{미지의 임의의 잔차 } \delta'\end{array}\right\}$ 라 하면

$$[\delta'\delta'] = nX'^2 - 2[l]X' + [ll]$$

⑦에서 $[ll] = [\delta\delta] + \frac{[l]^2}{n}$이므로

$$[\delta'\delta'] = [\delta\delta] + \underbrace{n(X' - X_0)^2}_{\text{항상}>0}$$

$$\therefore \quad [\delta\delta] < [\delta'\delta']$$

∴ 최소제곱법 원리에 의해 산술평균을 최확값으로 사용할 수 있다.

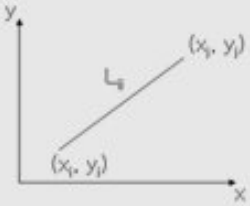
2. 관측법의 분류

- 직접관측
  - 직접관측
  - 조건관측
- 간접관측
  - 독립관측
  - 조건관측

2-8 오차의 조정

| 독립 간접관측의 조정법

L: 최확값
l: 관측값, l': 추정값
v: 잔차
w: 무게(행렬)



두 점간의 거리 $L_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$

이 때

① $L_{ij} = l_{ij} + v_{ij}\ (compare, \delta = x_0 - l)$

② L_{ij}를 l'_{ij}를 이용하여 $Taylor$급수에 의해 선형화 ⇒ 2차항 이하는 비선형이므로 생략

$$L_{ij} = l'_{ij} + [(\frac{\partial L_{ij}}{\partial x_i})\Delta x_i + (\frac{\partial L_{ij}}{\partial y_i})\Delta y_i + (\frac{\partial L_{ij}}{\partial x_j})\Delta x_j + (\frac{\partial L_{ij}}{\partial y_j})\Delta y_j]$$

①과 ②를 정리 하면,

$$\boldsymbol{v}_{ij} - \left[(\frac{\partial L_{ij}}{\partial x_i})\Delta x_i + (\frac{\partial L_{ij}}{\partial y_i})\Delta y_i + (\frac{\partial L_{ij}}{\partial x_j})\Delta x_j + (\frac{\partial L_{ij}}{\partial y_j})\Delta y_j\right] = \boldsymbol{l}'_{ij} - \boldsymbol{l}_{ij}$$

위 식에서, $b_1 = -\left(\frac{\partial L_{ij}}{\partial x_i}\right)$, $b_2 = -\left(\frac{\partial L_{ij}}{\partial y_i}\right)$, $b_3 = -\left(\frac{\partial L_{ij}}{\partial x_j}\right)$, $b_4 = -\left(\frac{\partial L_{ij}}{\partial y_j}\right)$.

$f_{ij} = l'_{ij} - l_{ij}$ 로 각각 치환하면,

$$\boldsymbol{v}_{ij} + b_1\Delta x_i + b_2\Delta y_i + b_3\Delta x_j + b_4\Delta y_j = f_{ij}$$

다각형의 경우 이와 같은 변의 조건이 여러 개 존재하므로 matrix form →

$$V = [v_{ij}],\quad B = [b_1\ b_2\ b_3\ b_4],\quad F = [f_{ij}]\quad \Delta = [\Delta x_i\ \Delta y_i\ \Delta x_j\ \Delta y_j]$$

즉, 일반식은 $V + B\Delta = F$: **관측 방정식**

2-8 오차의 조정

| 독립 간접관측의 조정법

LSM에서 확률적 최확값은

$\phi = \omega V^2 = V^t \omega V$ 가 최소인 경우 이므로, $(V = F - B\Delta$에서$)$

$$\phi = (F - B\Delta)^t \omega (F - B\Delta) = (F^t - \Delta^t B^t)\omega(F - B\Delta)$$

$$= F^t \omega F - \Delta^t B^t \omega F - F^t \omega B\Delta + \Delta^t B^t \omega B\Delta$$

$$= F^t \omega F - 2F^t \omega B\Delta + \Delta^t B^t \omega B\Delta \qquad (\because \Delta^t B^t \omega F = F^t \omega B\Delta)$$

ϕ 가 최소가 되기 위해서는

$$\frac{\partial \phi}{\partial \Delta} = 0 = \frac{\partial}{\partial \Delta}\left(F^t \omega F - 2F^t \omega B\Delta + \Delta^t B^t \omega B\Delta\right) = -2F^t \omega B + 2\Delta^t B^t \omega B$$

$\therefore \Delta^t B^t \omega B = F^t \omega B$ **: 정규 방정식**

양변의 *transpose* 하면, $(\Delta^t B^t \omega B)^t = (F^t \omega B)^t$

$$B^t \omega \Delta B = B^t \omega F \qquad (\because \omega^t = \omega)$$

$$N\Delta = V$$

$$\therefore \Delta = N^{-1}V$$

이 Δ를

$$x_1^0 + \Delta x_1 \longrightarrow x_1^0$$
$$y_1^0 + \Delta y_1 \longrightarrow y_1^0$$
$$x_2^0 + \Delta x_2 \longrightarrow x_2^0$$
$$\vdots$$

등으로 추정좌표를 재입력하여 잔차가 허용내에 들면 조정을 중지한다.

2-8 오차의 조정

| 조건부 직접관측의 조정법

r개의 기하학적 조건을 만족하는 n개의 관측값이 있을 때,

$$\begin{cases} a_{11}l_1 + a_{11}v_1 + a_{12}l_2 + a_{12}v_2 + \cdots + a_{1n}l_n + a_{1n}v_n = d_1 \\ a_{21}l_1 + a_{21}v_1 + a_{22}l_2 + a_{22}v_2 + \cdots + a_{2n}l_n + a_{2n}v_n = d_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{r1}l_1 + a_{r1}v_1 + a_{r2}l_2 + a_{r2}v_2 + \cdots + a_{rn}l_n + a_{rn}v_n = d_r \end{cases}$$

여기서,

l_i : 관측값

v_i : residual

$d_1, d_2, \cdots d_r$: 기하학적 조건으로 주어지는 상수

Matrix 형태로 나타내면,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ l_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ d_n \end{pmatrix}$$

(r × n) (n ×1) + (r ×n) (n ×1) =(r × 1)

즉, AI + AV = D

AV = D − AI = f 로 두면,

$\phi = \omega V^2 = V^t \omega V$ 에서 잔차 V의 수가 조건방정식의 수보다 많으므로 제한적 최소제곱법의 일종인 Lagrange 미정계수 사용

2-8 오차의 조정

| 조건부 직접관측의 조정법

$\phi = V^t \omega V$ 의 최소값은

$\phi' = V^t \omega V - 2K^t(AV - f)$ 의 최소값을 구하는 것과 같다.

$$\frac{\partial \phi'}{\partial V} = 2V^t \omega - 2K^t A = 0$$

$$\therefore V^t \omega = K^t A$$

위 식의 transpose 구하면, $(V^t \omega)^t = (K^t A)^t$

$$\omega V = A^t K$$

$$V = \omega^{-1} A^t K = QA^t K \qquad (\text{단, } Q = \omega^{-1})$$

$AV = f$ 에 $V = QA^t K$ 를 대입하면,

$$A(QA^t K) = f = AQA^t K$$

$$K = (AQA^t)^{-1} f = Q_e^{-1} f \qquad (\text{단, } Q_e = AQA^t)$$

$$\therefore K = \omega_e^f$$

이렇게 미정계수 K를 구하여 $V = QA^t K$ 에 대입하여 V를 구함.

$\hat{l} = l + V$ 조정 후의 값을 구함.

2-8 오차의 조정

| 조건부 간접관측의 조정법

앞의 두 가지가 결합된 형태로서 다음과 같다

$$AV + B\Delta = f$$

Lagrange 미정 계수법을 이용하여

$$\phi' = V^t \omega V - 2K^t(AV + B\Delta - f)$$

$$= \frac{\partial \phi'}{\partial V} = 2V^t \omega - 2K^t A = 0$$

$$= \frac{\partial \phi'}{\partial \Delta} = -2K^t B = 0$$

① 를 정리 하면 $V^t \omega = k^t A \xrightarrow{transpose} \omega V = A^t K$

$$\therefore V = \omega^{-1} A^t K = Q A^t K \quad (\omega^{-1} \to Q)$$

이를 $AV + B\Delta = f$ 에 대입

$$A(QA^t K) + B\Delta = f$$

$$AQA^t K + B\Delta = Q_e K + B\Delta = f \quad \left(AQA^t = Q_e\right)$$

$$K = \omega_k(f - B\Delta) \quad (Q_e^{-1} \to \omega_k)$$

② 의 $K^t B = 0$의 $transpose$ $B^t K = 0$에 K를 대입,

$$B^t[\omega_e(f - B\Delta)] = 0$$

$$B^t \omega_k f = B^t \omega_k B\Delta$$

$$\therefore \Delta = N^{-1} V$$

추정값에 Δ를 각각 수정하여 새로운 측정값을 입력하고 일정한 값 이상 Δ 값에 변화가 없으면 처리를 중지한다.