[2008][06-2]

Computer aided ship design

Part 2. Ship Motion & Wave Load

October 2008
Prof. Kyu-Yeul Lee

Department of Naval Architecture and Ocean Engineering,
Seoul National University of College of Engineering

Advanced
Ship
Design
Automation
Laboratory

Part II. Ship Motion & Wave Load
: 강의 내용

- 탄성선의 미분 방정식 유도
- 보 속의 전단력(Shear force), 굽힘 응력(Bending moment)
- 선박의 하중 곡선(Load curve),
  전단력(Shear force), 굽힘 응력(Bending moment)

탄성선의 미분 방정식

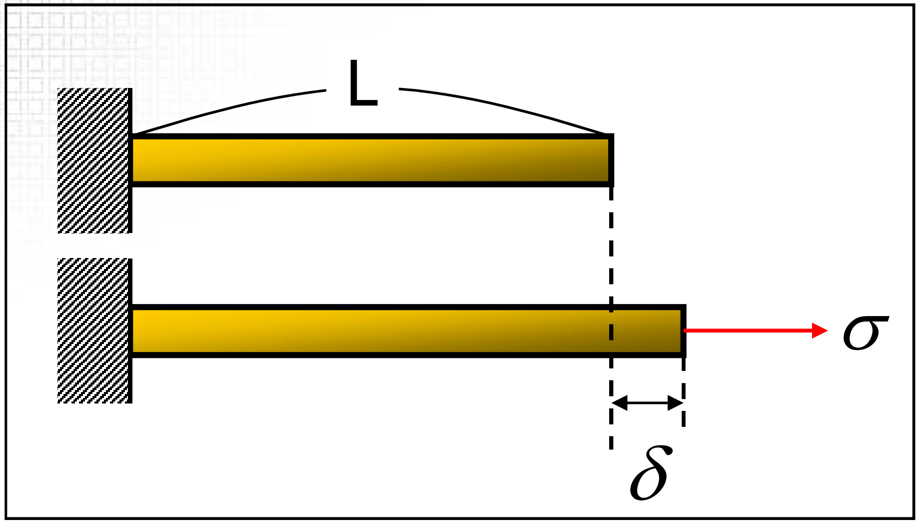
- James M. Gere, **재료역학** 6th edition, **도서출판 인터비젼**, 2004, pp. 276 - 280
- James M. Gere, **재료역학** 6th edition, **도서출판 인터비젼**, 2004, pp. 594 – 599
- **임상전**, **재료역학**, **문운당**, 2003, pp. 154 – 164
- **임상전**, **재료역학**, **문운당**, 2003, pp. 267 - 273

응력과 변형율의 관계 (1)

① 힘(F)은 압력(σ)과 면적(A)의 곱으로 표현

$$F = \sigma \cdot A \Rightarrow \sigma = \frac{F}{A}$$

② 어떤 재료를 힘을 주어 당기면 늘어난다.



$$\sigma = \frac{F}{A} \propto \frac{\delta}{L}$$

응력과 변형율의 관계 (2)

$$\sigma = \frac{F}{A} \propto \frac{\delta}{L}$$

③ 비례상수 E (young's modulus)를 사용하여 나타내면,

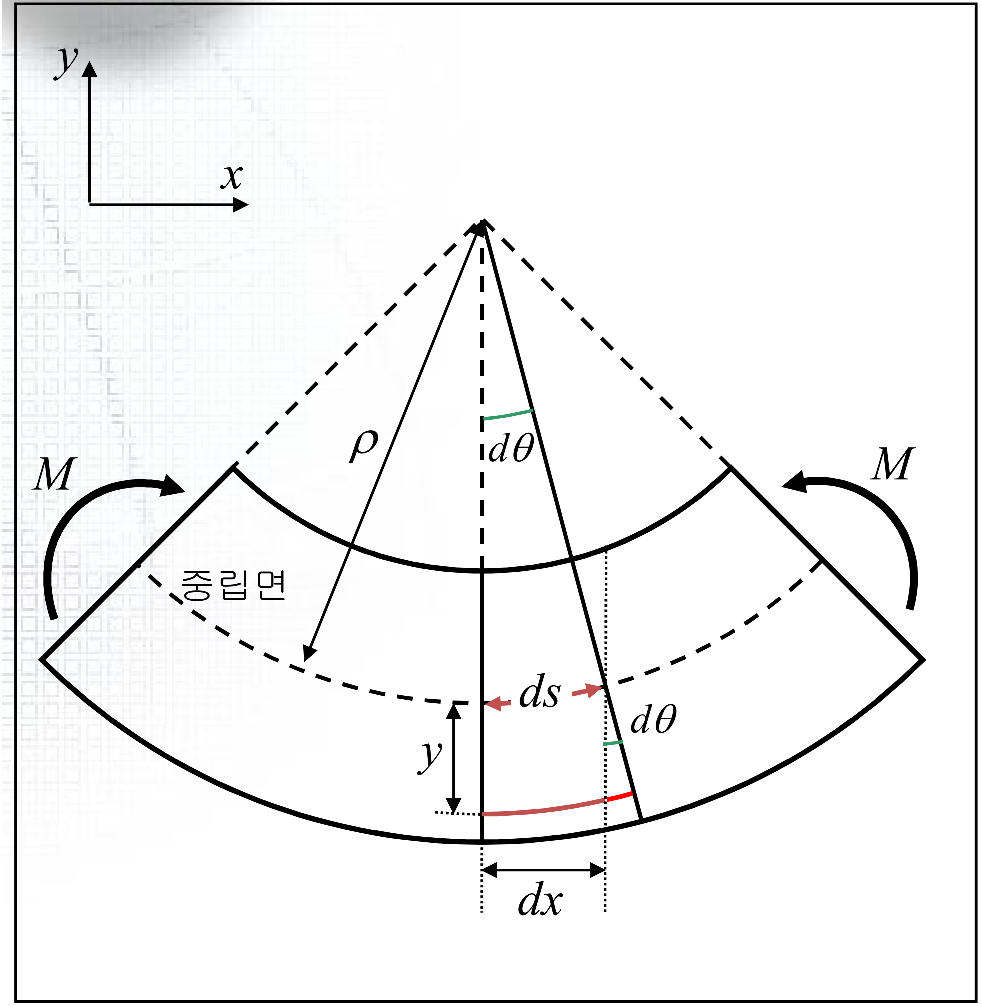
$$\boxed{\frac{F}{A}} = E \cdot \boxed{\frac{\delta}{L}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\sigma = E\varepsilon}$$

변형율(ε) : 단위길이당 늘어난 길이

압력=응력(σ) : 단위면적당 작용하는 힘

탄성선의 미분방정식 유도 (1)

$$\sigma = E\varepsilon$$



* 중립면 : 보의 볼록 한 쪽의 재료는 늘어나고, 오목한 쪽의 재료는 줄어든다.
이 때, 보의 상면과 하면 사이의 어딘가는 길이가 변하지 않는 재료들의 층이 존재할 것이다.
그와 같은 재료들이 이루는 면을 중립면이라 한다.

① $\rho \cdot d\theta = ds \Rightarrow \dfrac{d\theta}{ds} = \dfrac{1}{\rho}$

② 중립면에서 y만큼 떨어진 곳의 변형율 (ε)

ds : 원래 길이

$y \cdot d\theta$: 늘어난 길이

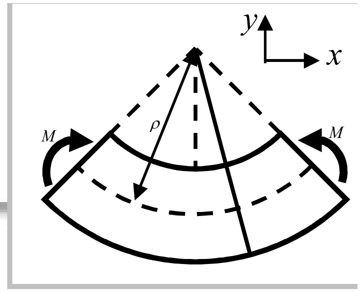
$$\varepsilon = \frac{\text{늘어난길이}}{\text{원래길이}} = \frac{-y \cdot d\theta}{ds} = -\frac{y}{\rho}$$

③ 중립면에서 y만큼 떨어진 곳의 응력(σ)

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = -E \cdot \frac{y}{\rho}$$

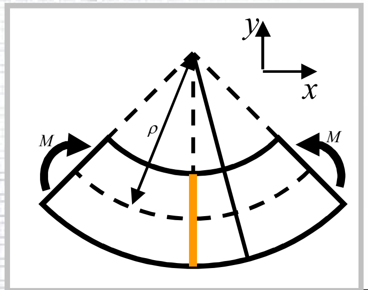
탄성선의 미분방정식 유도 (2)

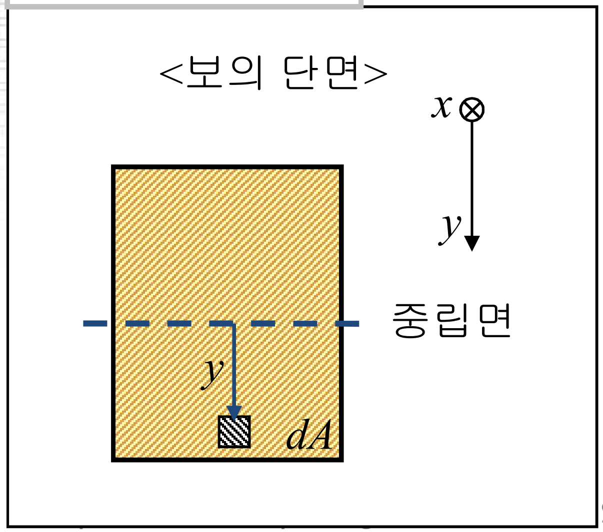
$$\sigma = E\varepsilon = \frac{Ey}{\rho}$$



④ 미소면적에 작용하는 힘 :

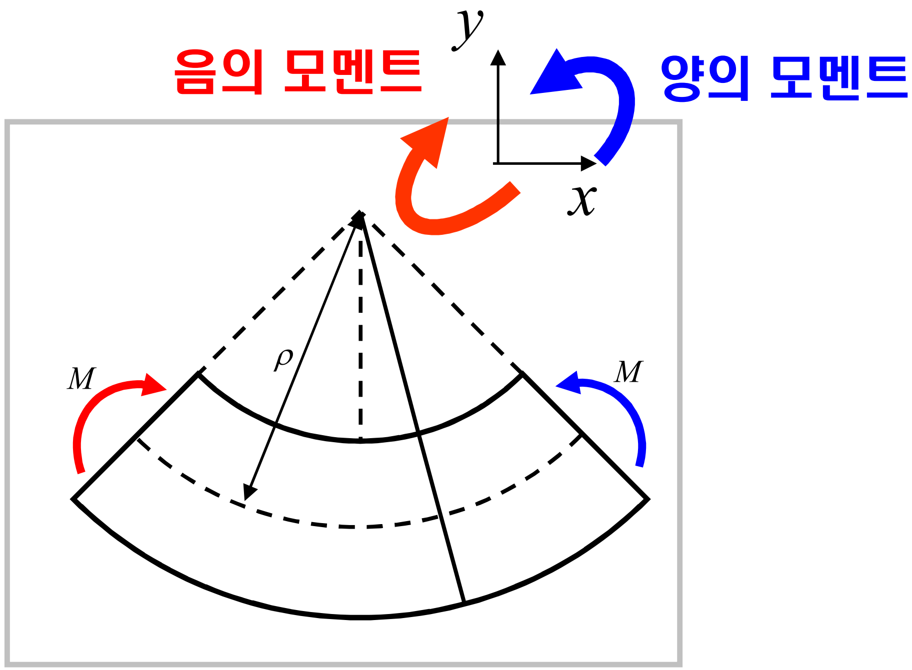
$$dF = \sigma dA = -E \cdot \frac{y}{\rho} dA$$





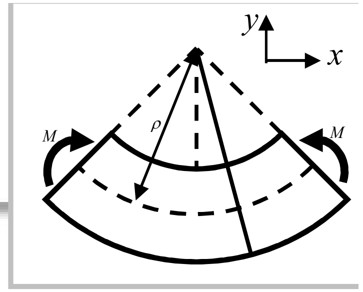
⑤ 미소면적에 작용하는 모멘트

오른손 법칙에 의해 양의 모멘트의 방향이 정의됨



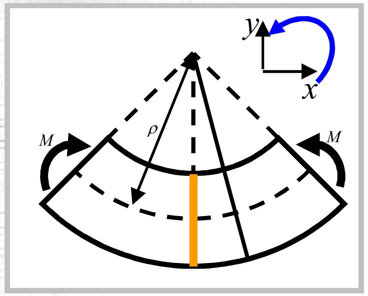
탄성선의 미분방정식 유도 (3)

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{Ey}{\rho}$$

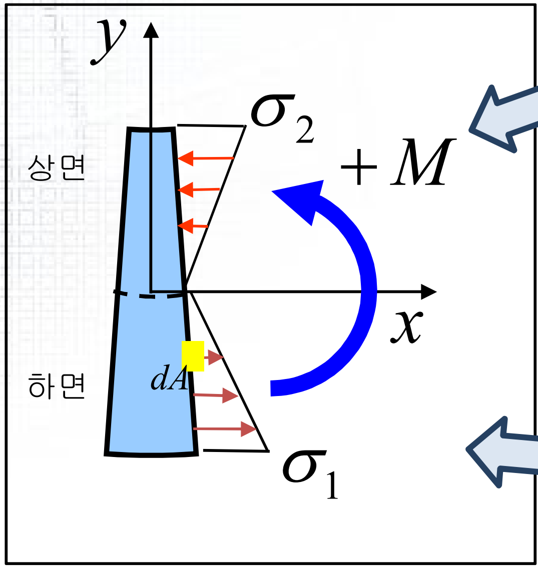


⑤ 미소면적에 작용하는 모멘트

양의 모멘트



오른손 법칙에 의해 양의 모멘트의 방향이 정의됨



•응력이 음인 곳(압축)에서의 모멘트

$$\underset{(>0)}{dM} = -\underset{(>0)}{y}\ \underset{(<0)}{\sigma}\ \underset{(>0)}{dA}$$

•응력이 양인 곳(인장)에서의 모멘트

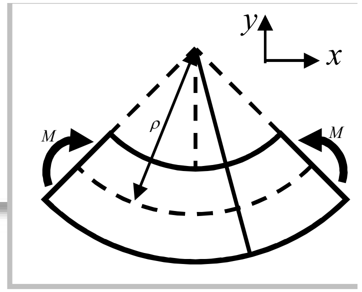
$$\underset{(>0)}{dM} = -\underset{(<0)}{y}\ \underset{(>0)}{\sigma}\ \underset{(>0)}{dA}$$

• 상면이 '압축'이고, 하면이 '인장'인 경우
• 선박의 경우 sagging condition에 해당

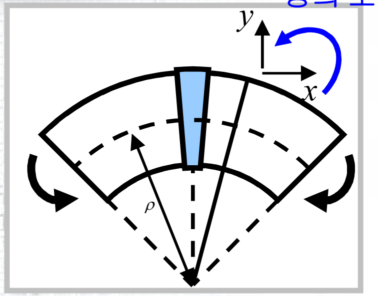
$$\therefore dM = -y\sigma dA$$

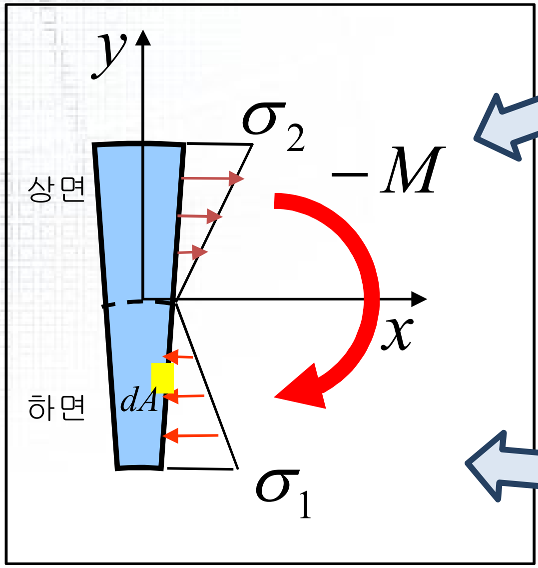
탄성선의 미분방정식 유도 (4)

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{Ey}{\rho}$$



⑤ 미소면적에 작용하는 모멘트





오른손 법칙에 의해 양의 모멘트의 방향이 정의됨

•응력이 양인 곳(인장)에서의 모멘트

$$\underset{(<0)}{dM} = - \underset{(>0)}{y}\ \underset{(>0)}{\sigma}\ \underset{(>0)}{dA}$$

•응력이 음인 곳(압축)에서의 모멘트

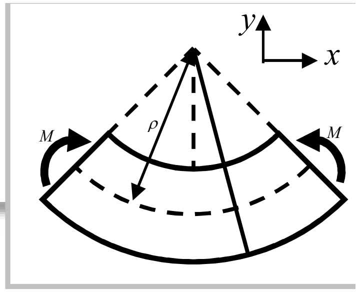
$$\underset{(<0)}{dM} = - \underset{(<0)}{y}\ \underset{(<0)}{\sigma}\ \underset{(>0)}{dA}$$

- 상면이 ‘인장’이고, 하면이 ‘압축’인 경우
- 선박의 경우 hogging condition에 해당

$$\therefore dM = -y\sigma dA$$

탄성선의 미분방정식 유도 (5)

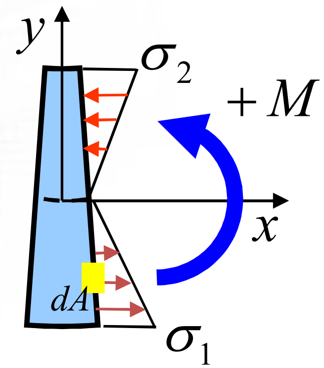
$$\sigma = E\varepsilon = \frac{Ey}{\rho}$$



④ **미소면적에 작용하는 힘 :**

$$dF = \sigma dA = -E \cdot \frac{y}{\rho} dA$$

⑤ **미소면적에 작용하는 모멘트**



$$\therefore dM = -y\sigma dA$$
$$= -ydF$$

⑥ **단면에 작용하는 모멘트 :**
미소면적에 작용하는 모멘트 적분

$$M = \int_A dM$$

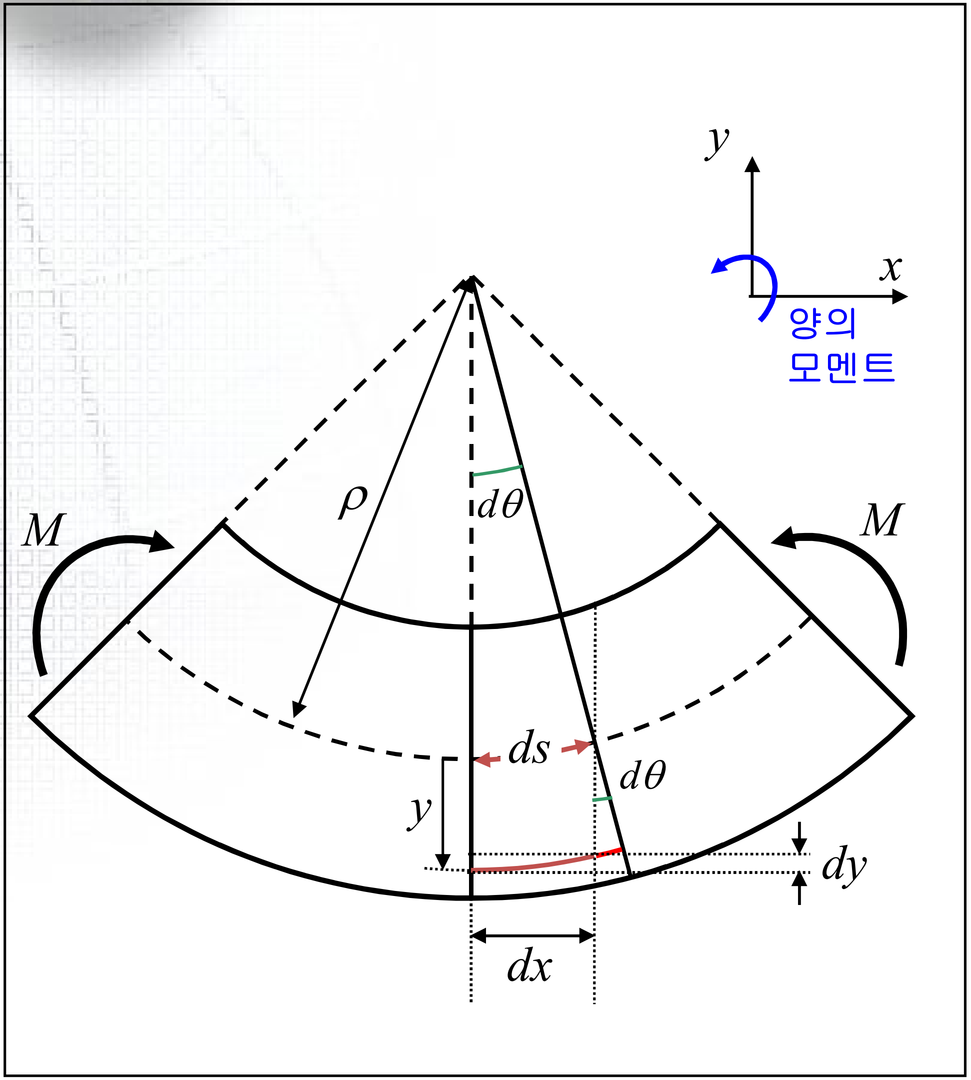
$$= -\int_A ydF = -\int_A y \cdot \left(-E\frac{y}{\rho}\right) dA = \frac{E}{\rho}\int_A y^2 dA$$

Define $I = \int_A y^2 dA$
(moment of inertia)

then, $M = \dfrac{EI}{\rho}$ ⇒ $\boxed{\dfrac{M}{EI} = \dfrac{1}{\rho}}$

탄성선의 미분방정식 유도 (6)

① $\dfrac{d\theta}{ds} = \dfrac{1}{\rho}$ ⑥ $\dfrac{M}{EI} = -\dfrac{1}{\rho}$



⑦ Assume that

$$ds \approx dx,\ \theta \approx \tan(\theta) = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

⑧ $$\therefore \frac{d\theta}{ds} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\rho}$$

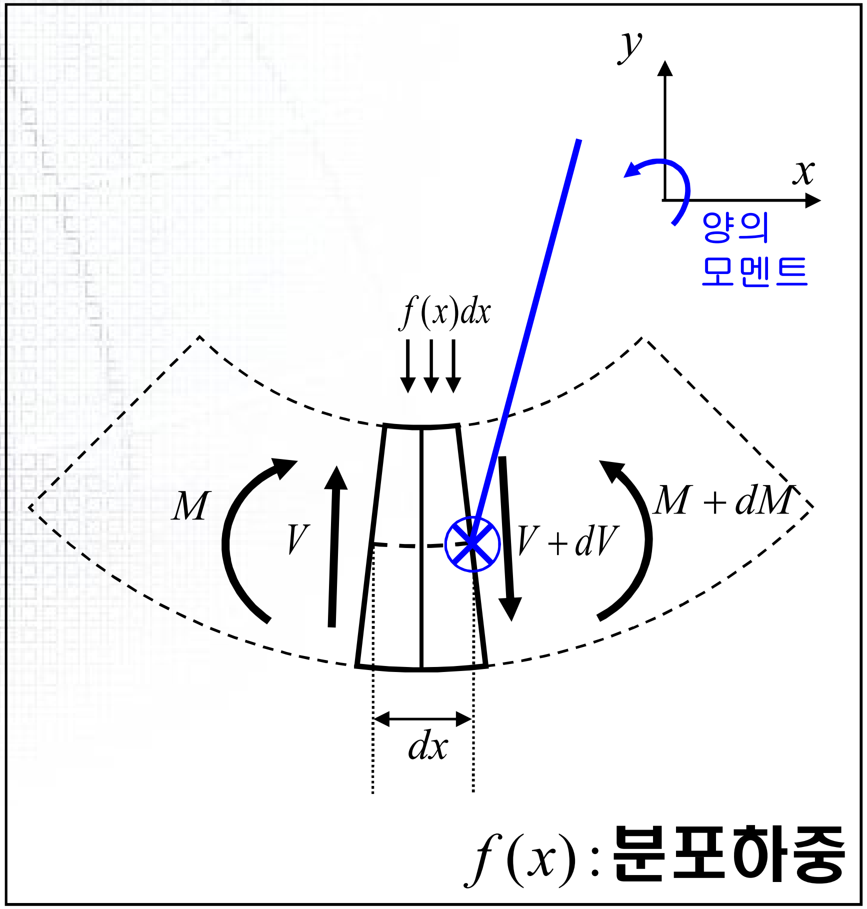
⑨ According to ⑥ and ⑧

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}}$$

: 탄성선의 미분방정식

탄성선의 미분방정식 유도
분포하중이 있을 때의 탄성선의 미분방정식 (1)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{EI}$$



y방향의 합력 :

$$-(V+dV)+V-f(x)dx=0$$

$$\Rightarrow -dV-f(x)dx=0$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dx}=-f(x)$$

모멘트 [파란색 축 기준]:

$$(M+dM)-M-Vdx+\cancel{f(x)dx\cdot\frac{1}{2}dx}=0$$

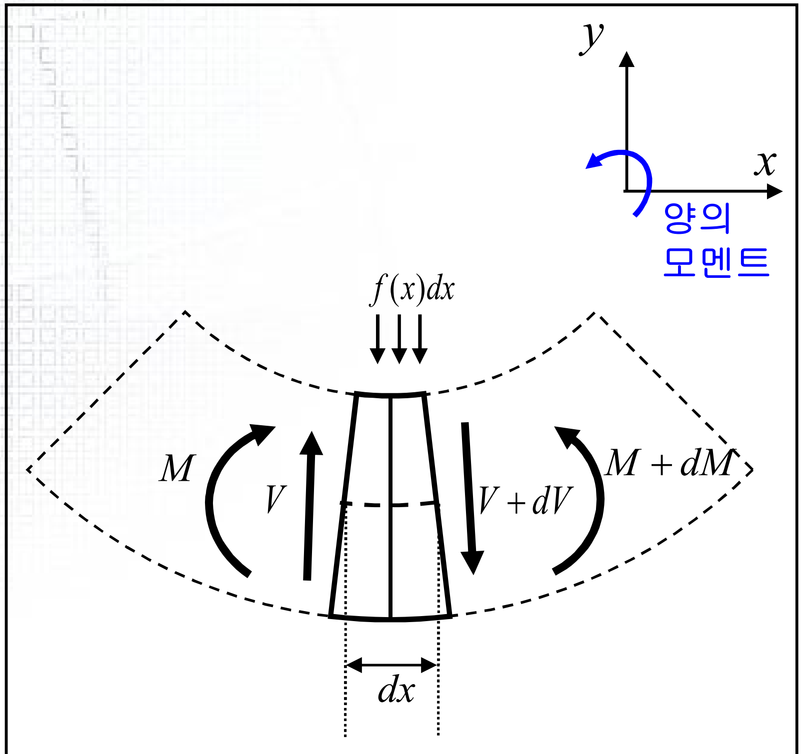
$$\Rightarrow dM-Vdx=0 \quad ,\left(\because (dx)^2\approx 0\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dM}{dx}=V(x)$$

탄성선의 미분방정식 유도
분포하중이 있을 때의 탄성선의 미분방정식 (2)

$$\frac{dM}{dx}=V(x) \qquad \frac{dV}{dx}=-f(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M}{EI}$$: 탄성선의 미분방정식



$f(x)$: 분포하중

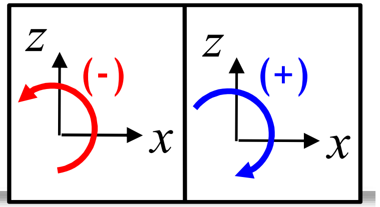
$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{1}{EI}\cdot\frac{dM}{dx}=\frac{1}{EI}\cdot V(x)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=\frac{1}{EI}\cdot\frac{dV}{dx}=-\frac{1}{EI}\cdot f(x)$$

$$\boxed{\therefore EI\frac{d^4y}{dx^4}=-f(x)}$$

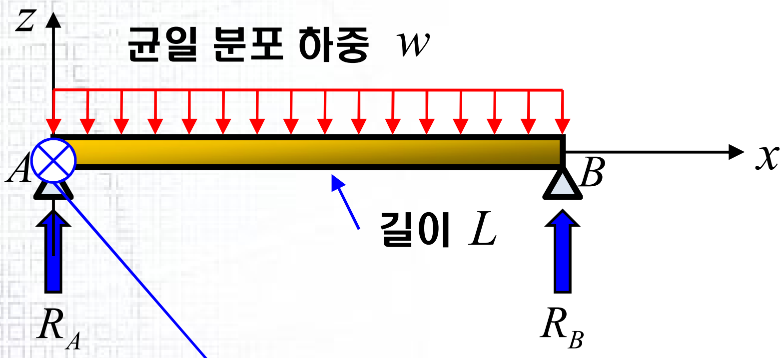
보 속의 전단력(Shear force)
굽힘 응력(Bending moment)

보 속의 전단력(Shear force) 굽힘 응력(Bending moment) (1)



(Review : 재료역학-학부2학년과목)

보에 균일 하중 w가 작용하고 있다.
양끝 지지점에서의 반력 R_A,R_B는?



(A를 지나고 xz 평면에
수직인 축에 대한 모멘트)

① z축 방향 힘 평형

$$\sum F_Z = R_A + R_B - \int_0^L w(x)dx = 0$$

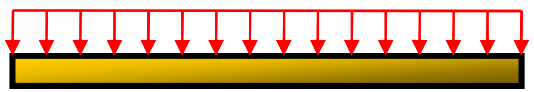
$$R_A + R_B - wL = 0 \Rightarrow R_A = -R_B + wL = \frac{wL}{2}$$

② 모멘트 평형

$$\sum M_A = -R_B L + \int_0^L w(x)xdx = 0$$

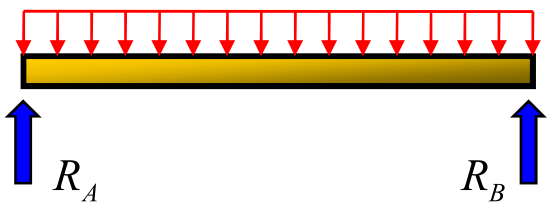
$$-R_B L + w\frac{L^2}{2} = 0 \Rightarrow R_B = \frac{wL}{2}$$

만약 지지점이 없다면?



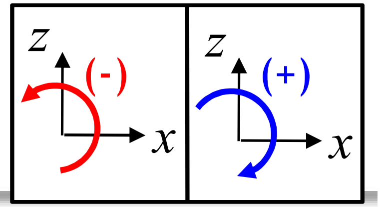
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \sum F_Z \neq 0 \\ \sum M_A \neq 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ 가속도 운동

힘과 모멘트 평형을 위해 외력(R_A,R_B)을 추가함



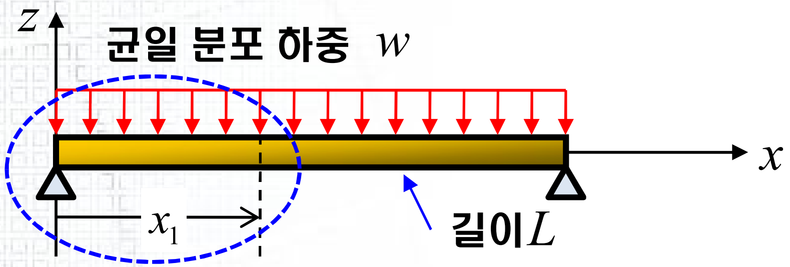
⇒ 평형 상태 (가속도 = 0)

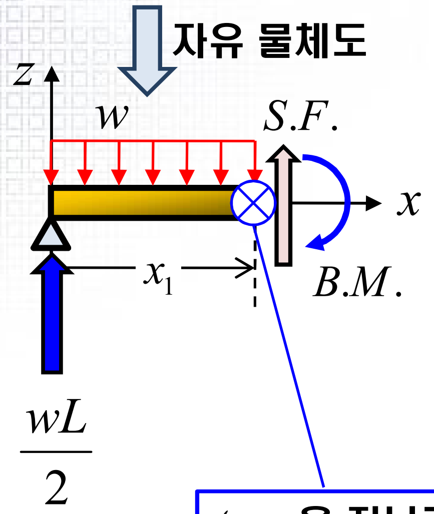
보 속의 전단력(Shear force) 굽힘 응력(Bending moment) (2)



(Review : **재료역학**-학부2학년과목)

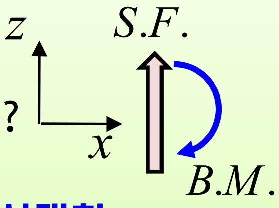
보에 균일 하중 w가 작용하고 있다.
왼쪽 끝(x=0)에서 x_1만큼 떨어진 지점에서의
S.F.(Shear Force)와 B.M.(Bending Moment)는?





(x=x_1을 지나고 xz 평면에 수직인 축에 대한 모멘트)

B.M.과 S.F.의 방향을 이와 같이 선택한 이유?



좌표축의 양의 방향으로 선택함
(다르게 선택해도 무방하나
힘과 모멘트 평형 조건을 사용할 때,
부호를 고려해 주어야 함)

✓ z축 방향 힘의 평형 조건

$$\sum F_Z = S.F. + \frac{wL}{2} - \int_0^{x_1} w\,dx = 0 \Rightarrow S.F.(x_1) = -\frac{wL}{2} + \int_0^{x_1} w\,dx$$

➔ x_1이전까지 작용한 힘의 합

✓ 모멘트의 평형 조건(x=x_1기준)

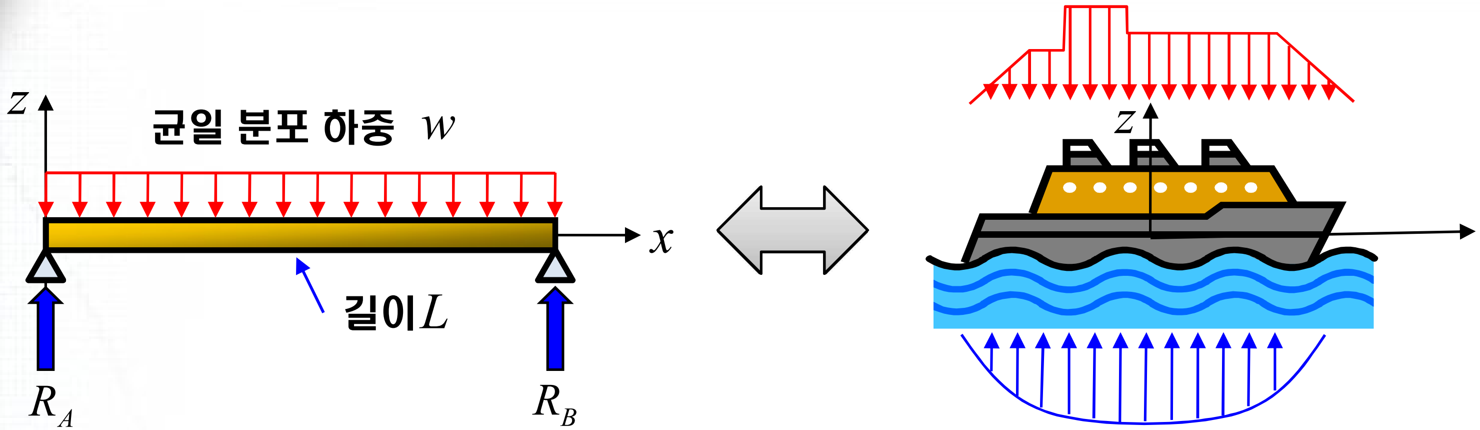
$$\sum M_{x=x_1} = B.M. - \frac{wL}{2}x_1 + \int_0^{x_1} w(x_1 - x)\,dx = 0$$

$$\Rightarrow B.M.(x_1) = \frac{wL}{2}x_1 - \int_0^{x_1} w(x_1 - x)\,dx$$

➔ x_1이전까지 작용한 모멘트의 합

선박의 하중 곡선(Load curve), 전단력(Shear force), 굽힘 응력(Bending moment)

선박의 하중 곡선(Load curve), 전단력(Shear force),굽힘 응력(Bending moment)



차이점?

➔ 보는 정지 상태이나 선박은 운동 중임

선박을 정지시키려면?

➔ 합력과 방향은 반대이고 크기가 같은 힘을 준다

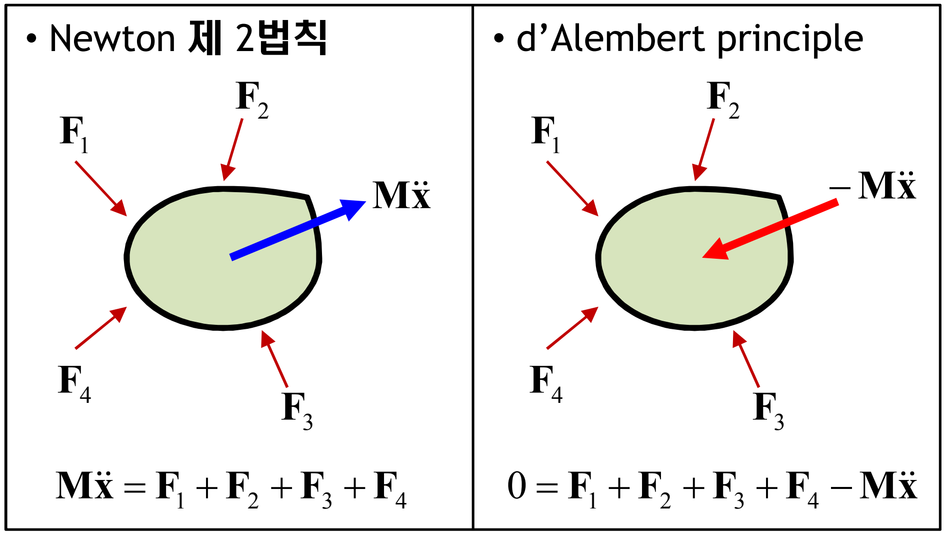
- Newton 제 2법칙 : $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = \sum \mathbf{F}$

이항

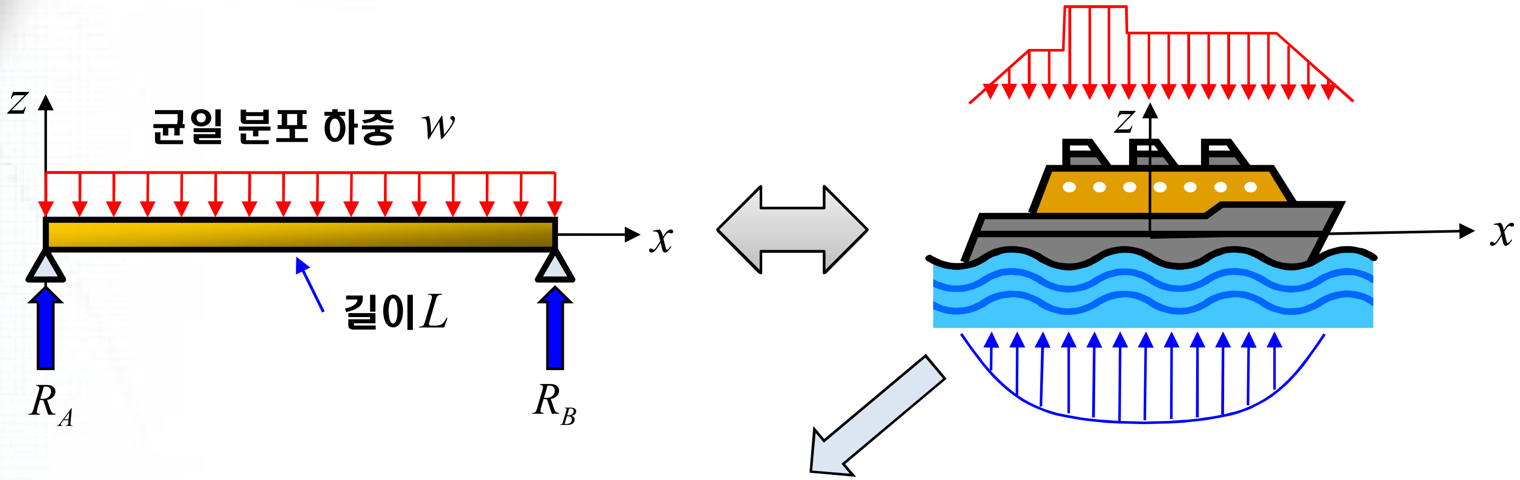
- d'Alembert principle : $\underbrace{\sum \mathbf{F} \underbrace{- \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}}_{\text{관성력 (inertial force)}} = 0}_{\text{동적 평형 상태 (Dynamic equilibrium)}}$

✓ **동적 평형 상태**

가상일 원리(principle of virtual work) 같이 정적 평형 상태에서 적용되는 개념을 동역학에 적용할 수 있음



선박의 하중 곡선(Load curve), 전단력(Shear force),굽힘 응력(Bending moment)



(Review) **선박에 작용하는 힘**

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_{Body} + \mathbf{F}_{Surface}$$

$$= \mathbf{F}_{Gravity} + \mathbf{F}_{static} + \mathbf{F}_{F.K} + \mathbf{F}_{D} + \mathbf{F}_{R} \quad \left(\mathbf{F}_{R} = -\mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}}\right)$$

동적 평형 상태

$$0 = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{F}_{Gravity} + \mathbf{F}_{static} + \mathbf{F}_{F.K.} + \mathbf{F}_{D} - \mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}}$$

수직방향 힘성분 (운동 방정식의 3행 성분)

선박 운동 방정식과 선체 구조와의 관계 (Step1)

Step1. 운동 방정식으로부터 Heave, Pitch의 RAO[1]를 계산

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M & 0 & 0 & 0 & Mz_C & -My_C \\ 0 & M & 0 & -Mz_C & 0 & Mx_C \\ 0 & 0 & M & My_C & -Mx_C & 0 \\ 0 & -Mz_C & My_C & I_{xx} & 0 & -I_{xz} \\ Mz_C & 0 & -Mx_C & 0 & I_{yy} & 0 \\ -My_C & Mx_C & 0 & -I_{zx} & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & B_{13} & 0 & B_{15} & 0 \\ 0 & B_{22} & 0 & B_{24} & 0 & B_{26} \\ B_{31} & 0 & B_{33} & 0 & B_{35} & 0 \\ 0 & B_{42} & 0 & B_{44} & 0 & B_{46} \\ B_{51} & 0 & B_{53} & 0 & B_{55} & 0 \\ 0 & B_{62} & 0 & B_{64} & 0 & B_{66} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \left[\underset{\text{Surge}}{\xi_1}, \underset{\text{Sway}}{\xi_2}, \underset{\text{Heave}}{\xi_3}, \underset{\text{Roll}}{\xi_4}, \underset{\text{Pitch}}{\xi_5}, \underset{\text{Yaw}}{\xi_6} \right]^T$$

운동 방정식 : $(\mathbf{M} + \mathbf{A})\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{F}_{exciting}$

$$\mathbf{F}_{exciting} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & 0 & A_{15} & 0 \\ 0 & A_{22} & 0 & A_{24} & 0 & A_{26} \\ A_{31} & 0 & A_{33} & 0 & A_{35} & 0 \\ 0 & A_{42} & 0 & A_{44} & 0 & A_{46} \\ A_{51} & 0 & A_{53} & 0 & A_{55} & 0 \\ 0 & A_{62} & 0 & A_{64} & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} & 0 & C_{35} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{53} & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\mathbf{F}_3 = \eta_0 \left(\underset{\text{Froude-Krylov force}}{F^A_{F.K,3}} + \underset{\text{Diffraction force}}{F^A_{D,3}} \right) e^{i\omega t} \right]$$

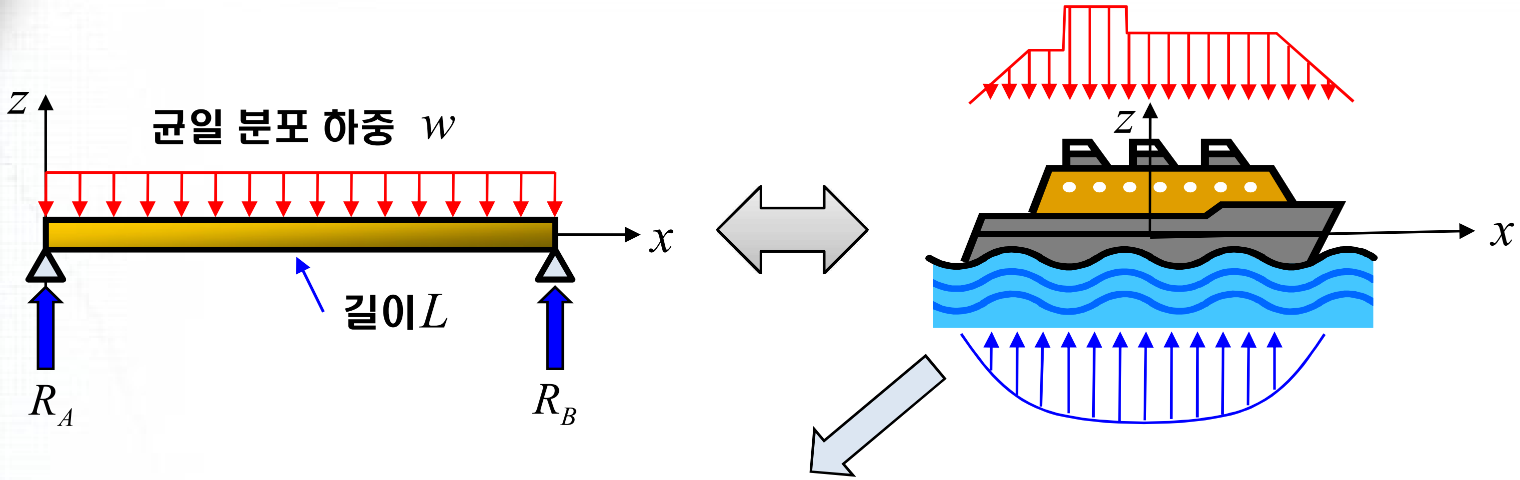
➔ heave-pitch motion of equation :

$$\begin{bmatrix} M + A_{33} & -Mx_C + A_{35} \\ -Mx_C + A_{53} & A_{55} + I_{xx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\xi}_3 \\ \ddot{\xi}_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{33} & B_{35} \\ B_{53} & B_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_3 \\ \dot{\xi}_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{33} & C_{35} \\ C_{53} & C_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_3 \\ \xi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_3 \\ F_5 \end{bmatrix}$$

($y_c = 0$ 으로 가정)

1) RAO(Response Amplitude Operator) : 1m 파고에 대한 선박의 운동 응답

선박의 하중 곡선(Load curve), 전단력(Shear force),굽힘 응력(Bending moment)



(Review) **선박에 작용하는 힘**

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_{Body} + \mathbf{F}_{Surface}$$

$$= \mathbf{F}_{Gravity} + \mathbf{F}_{static} + \mathbf{F}_{F.K} + \mathbf{F}_{D} + \mathbf{F}_{R} \quad \left(\mathbf{F}_{R} = -\mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}}\right)$$

동적 평형 상태

$$0 = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{F}_{Gravity} + \mathbf{F}_{static} + \mathbf{F}_{F.K.} + \mathbf{F}_{D} - \mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}} - \mathbf{B}\dot{\mathbf{x}}$$

수직방향 힘성분 (운동 방정식의 3행 성분)

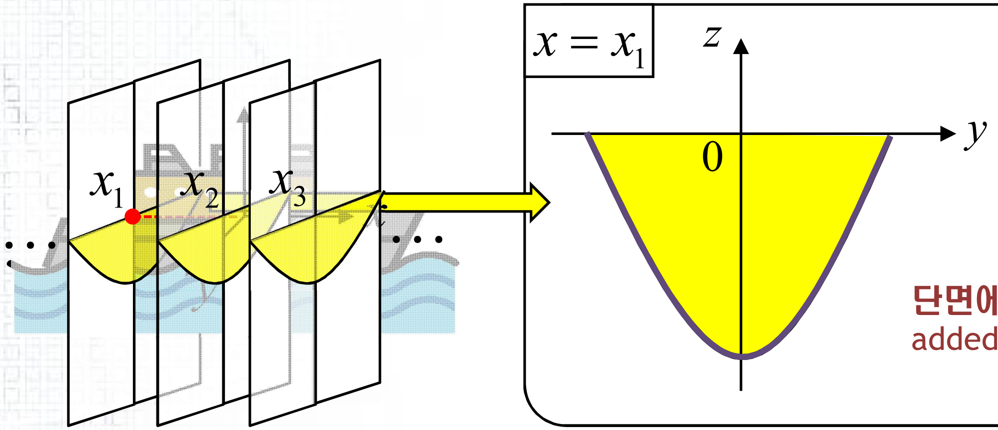
$$0 = -M\left(\ddot{\xi}_3 - x_C\ddot{\xi}_5\right) + F_{Static,3} + F_{Gravity,3} + \eta_0\left(F^{A}_{F.K,3} + F^{A}_{D,3}\right)e^{i\omega t} - A_{33}\ddot{\xi}_3 - A_{35}\ddot{\xi}_5 - B_{33}\dot{\xi}_3 - B_{35}\dot{\xi}_5$$

= 각 단면에 작용하는 힘을 배 길이 전체에 대해 적분한 값

ex) 보 : $F_{load} = \int_0^L w(x)dx$ / ex) 중량 : $F_{static,3} = \int_{-L/2}^{L/2} m(x)gdx$

선박 운동 방정식과 선체 구조와의 관계 (Step5)

✓ **상하동요 운동 방정식에서 각 성분의 의미** (Review : strip theory & 선박 운동 방정식 유도 과정)



단면의 상하 동요로 인한 z방향 added mass : $a_{33}(x_1)$

단면의 상하 동요로 인한 y축 방향 회전 added mass : $a_{35}(x_1) = -x_1 a_{33}$

단면에 작용하는 added mass force : $-a_{33}\ddot{\xi}_3 - a_{35}\ddot{\xi}_5 = -a_{33}\ddot{\xi}_3 + x_1 a_{33}\ddot{\xi}_5 = -a_{33}\left(\ddot{\xi}_3 - x_1\ddot{\xi}_5\right)$

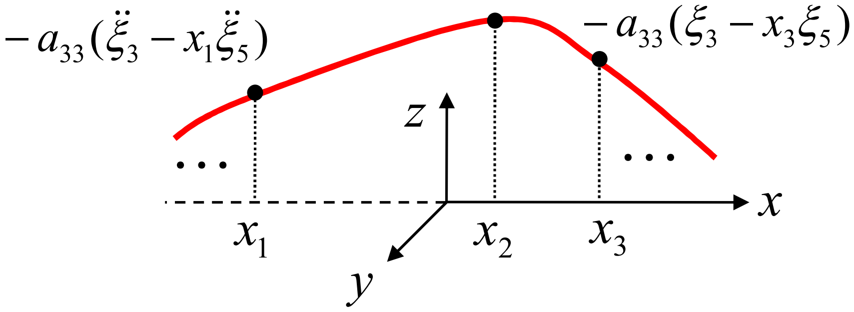
$(a_{35} = -x a_{33})$

$$0 = -M\left(\ddot{\xi}_3 - x_C\ddot{\xi}_5\right) + \eta_0\left(F^A_{F.K,3} + F^A_{D,3}\right)e^{i\omega t} - A_{33}\ddot{\xi}_3 - A_{35}\ddot{\xi}_5 - B_{33}\dot{\xi}_3 - B_{35}\dot{\xi}_5 + F_{Static,3} + F_{Gravity,3}$$

$$A_{33} = \int_{-L/2}^{L/2} a_{33}(x)\,dx$$

$$A_{35} = -\int_{-L/2}^{L/2} x a_{33}(x)\,dx$$

전체 부가 질량 | x위치 단면의 단위 길이당 부가 질량



(Example of added mass force)

선박 운동 방정식과 선체 구조와의 관계 (Step5)

✓ **상하동요 운동 방정식에서 각 성분의 의미** (Review : strip theory & 선박 운동 방정식 유도 과정)

Froude-Krylov force | Diffraction force | x위치 단면의 **단위 길이당** Froude-Krylov force | x위치 단면의 **단위 길이당** Diffraction force

$$F^A_{F.K,3} + F^A_{D,3} = \int_{-L/2}^{L/2} \left(f_3(x) + h_3(x) \right) dx$$

Total buoyancy | Total weight | x위치 단면의 **단위 길이당** buoyancy | x위치 단면의 **단위 길이당** weight

$$F_{Buoyancy,3} + F_{Gravity,3} = \int_{-L/2}^{L/2} \left(b(x) - m(x)g \right) dx$$

$$0 = -M\left(\ddot{\xi}_3 - x_C \ddot{\xi}_5\right) + \eta_0 \left(F^A_{F.K,3} + F^A_{D,3}\right) e^{i\omega t} - A_{33}\ddot{\xi}_3 - A_{35}\ddot{\xi}_5 - B_{33}\dot{\xi}_3 - B_{35}\dot{\xi}_5 + F_{Static,3} + F_{Gravity,3}$$

$$M = \int_{-L/2}^{L/2} m(x)\,dx$$

전체 질량 | x위치에서의 **단위 길이당** 질량

$$A_{33} = \int_{-L/2}^{L/2} a_{33}(x)\,dx$$

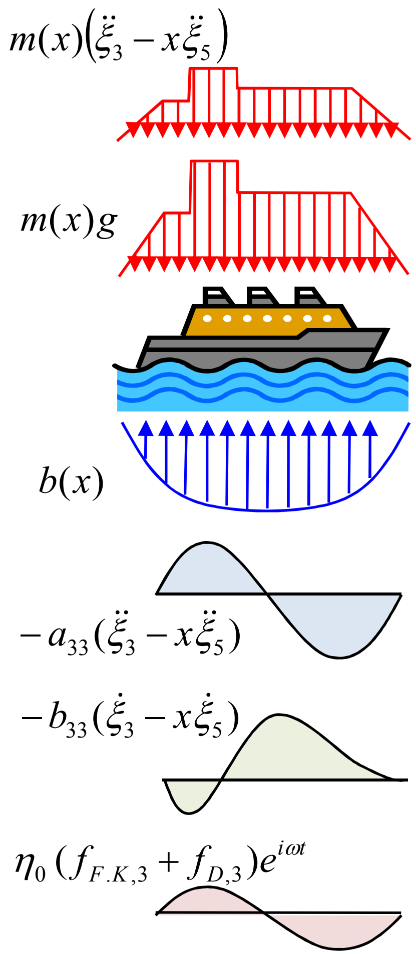
$$A_{35} = -\int_{-L/2}^{L/2} x a_{33}(x)\,dx$$

전체 부가 질량 | x위치 단면의 **단위 길이당** 부가 질량

$$B_{33} = \int_{-L/2}^{L/2} b_{33}(x)\,dx$$

$$B_{35} = -\int_{-L/2}^{L/2} x b_{33}(x)\,dx$$

전체 감쇠 계수 | x위치 단면의 **단위 길이당** 감쇠 계수

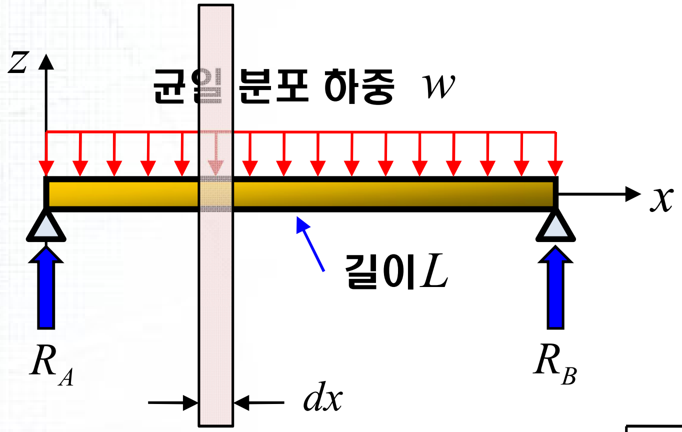


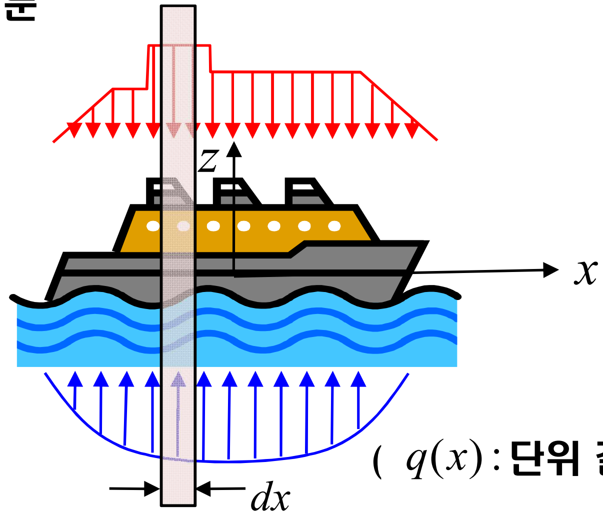
선박의 하중 곡선(Load curve), 전단력(Shear force),굽힘 응력(Bending moment)

$$0 = -M\left(\ddot{\xi}_3 - x_C\ddot{\xi}_5\right) + F_{Static,3} + F_{Gravity,3} + \eta_0\left(F^A_{F.K,3} + F^A_{D,3}\right)e^{i\omega t} - A_{33}\ddot{\xi}_3 - A_{35}\ddot{\xi}_5 - B_{33}\dot{\xi}_3 - B_{35}\dot{\xi}_5$$

하중(Load) ?

➔ 임의의 x위치에서 단위 길이에 작용하는 수직 방향 힘 성분





($q(x)$: 단위 길이당 하중)

$$q(x) = w$$

$$q(x) = -m(x)\left(\ddot{\xi}_3 - x\ddot{\xi}_5\right)$$ ➔ Mass inertia

$$+\eta_0\left(f_3(x) + h_3(x)\right)e^{i\omega t}$$ ➔ Froude-Krylov + Diffraction

$$-a_{33}(x)\left(\ddot{\xi}_3 - x\ddot{\xi}_5\right)$$ ➔ Added mass force

$$-b_{33}(x)\left(\dot{\xi}_3 - x\dot{\xi}_5\right)$$ ➔ Potential damping

$$+\left(b(x) - m(x)g\right)$$ ➔Hydrostatic force + Structural weight

Heave,Pitch 가속도와 속도는 운동 방정식으로부터 계산됨

선박의 하중 곡선(Load curve), 전단력(Shear force),굽힘 응력(Bending moment)

✓ Given : heave-pitch motion of equation

파고 (real)   Wave exciting force amplitude (complex) ω : Wave frequency

$$\begin{bmatrix} M+A_{33} & -Mx_C+A_{35} \\ -Mx_C+A_{53} & A_{55}+I_{xx} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\xi}_3 \\ \ddot{\xi}_5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} B_{33} & B_{35} \\ B_{53} & B_{55} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\xi}_3 \\ \dot{\xi}_5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} C_{33} & C_{35} \\ C_{53} & C_{55} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_3 \\ \xi_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} F_{ext,3} \\ F_{ext,5} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \eta_0 F_3^A e^{i\omega t} \\ \eta_0 F_5^A e^{i\omega t} \end{bmatrix}$$

✓ Find : 1m **파고에 대한** heave, pitch **운동 변위, 속도, 가속도**

Motion amplitude(complex)

$$\xi_3(t)=\xi_3^A e^{i\omega t} \qquad \dot{\xi}_3(t)=i\omega\xi_3^A e^{i\omega t},\ \ddot{\xi}_3(t)=-\omega^2\xi_3^A e^{i\omega t}$$

$$\xi_5(t)=\xi_5^A e^{i\omega t} \qquad \dot{\xi}_5(t)=i\omega\xi_5^A e^{i\omega t},\ \ddot{\xi}_5(t)=-\omega^2\xi_5^A e^{i\omega t}$$

$\Rightarrow$ ξ_3^A, ξ_5^A **만 구하면 됨**

① 운동 방정식에 변위,속도,가속도 대입

$$\begin{bmatrix} M+A_{33} & -Mx_C+A_{35} \\ -Mx_C+A_{53} & A_{55}+I_{xx} \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} -\omega^2\xi_3^A e^{i\omega t} \\ -\omega^2\xi_5^A e^{i\omega t} \end{bmatrix}}_{\text{(가속도)}}+\begin{bmatrix} B_{33} & B_{35} \\ B_{53} & B_{55} \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} i\omega\xi_3^A e^{i\omega t} \\ i\omega\xi_5^A e^{i\omega t} \end{bmatrix}}_{\text{(속도)}}+\begin{bmatrix} C_{33} & C_{35} \\ C_{53} & C_{55} \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} \xi_3^A e^{i\omega t} \\ \xi_3^A e^{i\omega t} \end{bmatrix}}_{\text{(변위)}}=\begin{bmatrix} \eta_0 F_3^A e^{i\omega t} \\ \eta_0 F_5^A e^{i\omega t} \end{bmatrix}$$

선박의 하중 곡선(Load curve), 전단력(Shear force),굽힘 응력(Bending moment)

(continue)

① 운동 방정식에 변위,속도,가속도 대입

$$\begin{bmatrix} M+A_{33} & -Mx_C+A_{35} \\ -Mx_C+A_{53} & A_{55}+I_{xx} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\omega^2\xi_3^A \cancel{e^{i\omega t}} \\ -\omega^2\xi_5^A \cancel{e^{i\omega t}} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} B_{33} & B_{35} \\ B_{53} & B_{55} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i\omega\xi_3^A \cancel{e^{i\omega t}} \\ i\omega\xi_5^A \cancel{e^{i\omega t}} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} C_{33} & C_{35} \\ C_{53} & C_{55} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_3^A \cancel{e^{i\omega t}} \\ \xi_3^A \cancel{e^{i\omega t}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \eta_0 F_3^A \cancel{e^{i\omega t}} \\ \eta_0 F_5^A \cancel{e^{i\omega t}} \end{bmatrix}$$

② 양변을 $e^{i\omega t}$ 로 나눔

$$-\omega^2\begin{bmatrix} M+A_{33} & -Mx_C+A_{35} \\ -Mx_C+A_{53} & A_{55}+I_{xx} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_3^A \\ \xi_5^A \end{bmatrix}+i\omega\begin{bmatrix} B_{33} & B_{35} \\ B_{53} & B_{55} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_3^A \\ \xi_5^A \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} C_{33} & C_{35} \\ C_{53} & C_{55} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_3^A \\ \xi_3^A \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \eta_0 F_3^A \\ \eta_0 F_5^A \end{bmatrix}$$

③ $\begin{bmatrix} \xi_3^A \\ \xi_3^A \end{bmatrix}$ 로 묶어서 정리

$$\left(-\omega^2\begin{bmatrix} M+A_{33} & -Mx_C+A_{35} \\ -Mx_C+A_{53} & A_{55}+I_{xx} \end{bmatrix}+i\omega\begin{bmatrix} B_{33} & B_{35} \\ B_{53} & B_{55} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} C_{33} & C_{35} \\ C_{53} & C_{55} \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} \xi_3^A \\ \xi_3^A \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \eta_0 F_3^A \\ \eta_0 F_5^A \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} -\omega^2(M+A_{33})+i\omega B_{33}+C_{33} & -\omega^2(-Mx_C+A_{35})+i\omega B_{35}+C_{35} \\ -\omega^2(-Mx_C+A_{53})+i\omega B_{53}+C_{53} & -\omega^2(A_{55}+I_{xx})+i\omega B_{55}+C_{55} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_3^A \\ \xi_3^A \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \eta_0 F_3^A \\ \eta_0 F_5^A \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_3^A \\ \xi_3^A \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \eta_0 F_3^A \\ \eta_0 F_5^A \end{bmatrix} \qquad \left(\begin{aligned} P&=-\omega^2(M+A_{33})+i\omega B_{33}+C_{33} \\ Q&=-\omega^2(-Mx_C+A_{35})+i\omega B_{35}+C_{35} \\ R&=-\omega^2(-Mx_C+A_{53})+i\omega B_{53}+C_{53} \\ S&=-\omega^2(I_{yy}+A_{55})+i\omega B_{55}+C_{55} \end{aligned}\right)$$

선박의 하중 곡선(Load curve), 전단력(Shear force),굽힘 응력(Bending moment)

(continue)

③ $\begin{bmatrix} \xi_3^A \\ \xi_3^A \end{bmatrix}$ 로 묶어서 정리

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_3^A \\ \xi_3^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_0 F_3^A \\ \eta_0 F_5^A \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{aligned} P &= -\omega^2 (M + A_{33}) + i\omega B_{33} + C_{33} \\ Q &= -\omega^2 (-Mx_C + A_{35}) + i\omega B_{35} + C_{35} \\ R &= -\omega^2 (-Mx_C + A_{53}) + i\omega B_{53} + C_{53} \\ S &= -\omega^2 (I_{yy} + A_{55}) + i\omega B_{55} + C_{55} \end{aligned} \right)$$

④ 역행렬을 곱하여 변위 를 ξ_3^A, ξ_5^A 구함

$$\begin{bmatrix} \xi_3^A \\ \xi_3^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \eta_0 F_3^A \\ \eta_0 F_5^A \end{bmatrix} = \frac{1}{PS - QR} \begin{bmatrix} S & -Q \\ -R & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_0 F_3^A \\ \eta_0 F_5^A \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{PS - QR} \begin{bmatrix} \eta_0 \left(F_3^A S - F_5^A Q \right) \\ \eta_0 \left(-F_3^A R + F_5^A P \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta_0 \dfrac{F_3^A S - F_5^A Q}{PS - QR} \\ \eta_0 \dfrac{F_5^A P - F_3^A R}{PS - QR} \end{bmatrix}$$

⑤ 1m 파고에 대한 운동 변위(RAO[1])

$$\therefore \frac{\xi_3^A}{\eta_0} = \frac{F_3^A S - F_5^A Q}{PS - QR}$$

$$\frac{\xi_5^A}{\eta_0} = \frac{F_5^A P - F_3^A R}{PS - QR}$$

선박의 하중 곡선(Load curve), 전단력(Shear force),굽힘 응력(Bending moment)

✓ 선박의 heave 및 pitch 변위, 속도, 가속도 (파고 η_0는 주어지는 값)

< Amplitude >

$$\xi_3^A = \eta_0 \frac{F_3^A S - F_5^A Q}{PS - QR}$$

$$\xi_5^A = \eta_0 \frac{F_5^A P - F_3^A R}{PS - QR}$$

대입 →

< 변위 >

$$\xi_3(t) = \xi_3^A e^{i\omega t}$$

$$\xi_5(t) = \xi_5^A e^{i\omega t}$$

미분 →

< 속도 >

$$\dot{\xi}_3(t) = i\omega \xi_3^A e^{i\omega t}$$

$$\dot{\xi}_5(t) = i\omega \xi_5^A e^{i\omega t}$$

미분 →

< 가속도 >

$$\ddot{\xi}_3(t) = -\omega^2 \xi_3^A e^{i\omega t}$$

$$\ddot{\xi}_5(t) = -\omega^2 \xi_5^A e^{i\omega t}$$

✓ 속도, 가속도를 대입한 단위 길이당 수직 하중

$$q(x) = -m(x)\left(\ddot{\xi}_3 - x\ddot{\xi}_5\right) + \eta_0\left(f_3(x) + h_3(x)\right)e^{i\omega t} - a_{33}\left(\ddot{\xi}_3 - x\ddot{\xi}_5\right) - b_{33}\left(\dot{\xi}_3 - x\dot{\xi}_5\right) + \left(b(x) - m(x)g\right)$$

$$= m(x)\omega^2\left(\xi_3^A - x\xi_5^A\right)e^{i\omega t} + \eta_0\left(f_3(x) + h_3(x)\right)e^{i\omega t} + a_{33}\omega^2\left(\xi_3^A - x\xi_5^A\right)e^{i\omega t} - b_{33}i\omega\left(\xi_3^A - x\xi_5^A\right)e^{i\omega t} + \left(b(x) - m(x)g\right)$$

$$= \left[m(x)\omega^2\left(\xi_3^A - x\xi_5^A\right) + \eta_0\left(f_3(x) + h_3(x)\right) + a_{33}\omega^2\left(\xi_3^A - x\xi_5^A\right) - b_{33}i\omega\left(\xi_3^A - x\xi_5^A\right)\right]e^{i\omega t} + \left(b(x) - m(x)g\right)$$

선박의 하중 곡선(Load curve), 전단력(Shear force),굽힘 응력(Bending moment)

✓ 단위 길이당 수직 하중

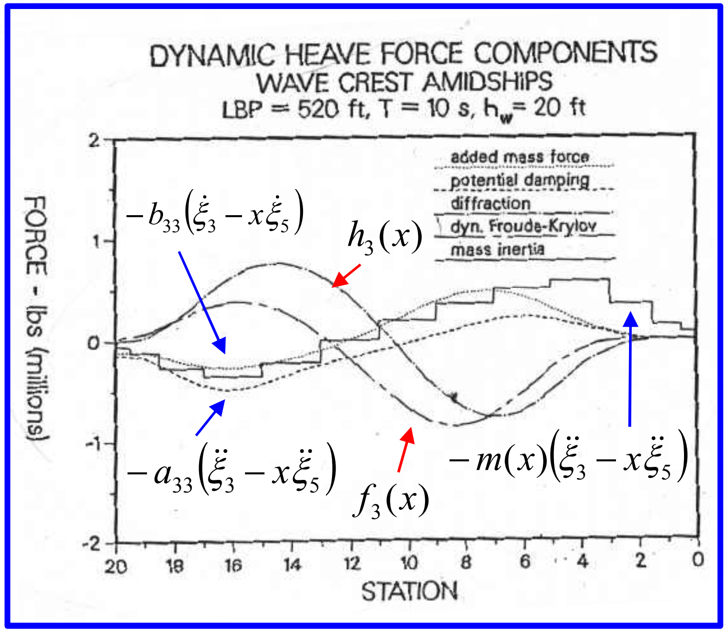
Wave에 의한 힘 및 선박의 운동과 관련 (Wave load)

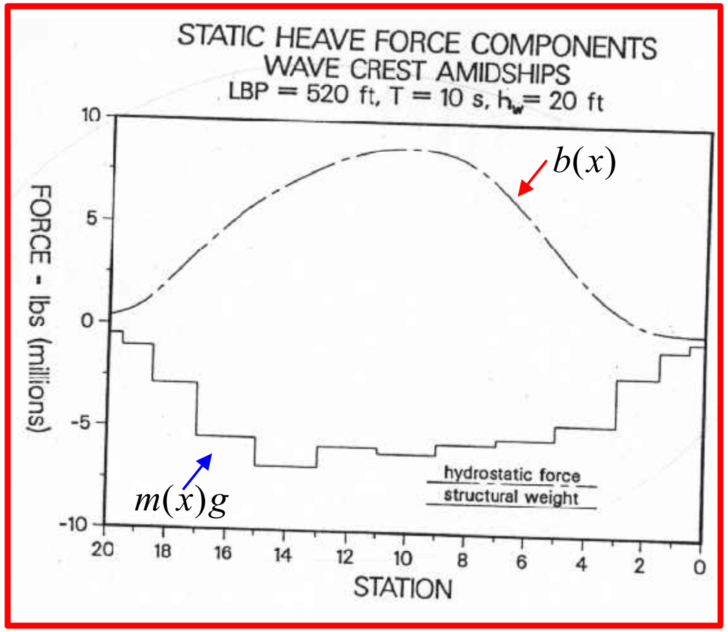
질량과 물에 잠긴 형상에 관련 (Still water load)

$$q(x)=\Big[\underbrace{m(x)\omega^2\left(\xi_3^A-x\xi_5^A\right)}_{\text{Mass inertia}}+\eta_0\Big(\underbrace{f_3(x)}_{\text{Froude-Krylov}}+\underbrace{h_3(x)}_{\text{Diffraction}}\Big)+\underbrace{a_{33}\omega^2\left(\xi_3^A-x\xi_5^A\right)}_{\text{Added mass force}}-\underbrace{b_{33}i\omega\left(\xi_3^A-x\xi_5^A\right)}_{\text{Potential damping}}\Big]e^{i\omega t}+\Big(\underbrace{b(x)}_{\text{Hydrostatic force}}-\underbrace{m(x)g}_{\text{Structural weight}}\Big)$$

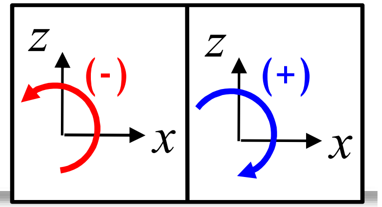
$ex)\ t=0$

(본래는 시간에 따라 변함: $e^{i\omega t}$)





선박의 하중 곡선(Load curve), 전단력(Shear force),굽힘 응력(Bending moment)



✓ 단위 길이당 수직 하중

Wave에 의한 힘 및 선박의 운동과 관련 (Wave load)

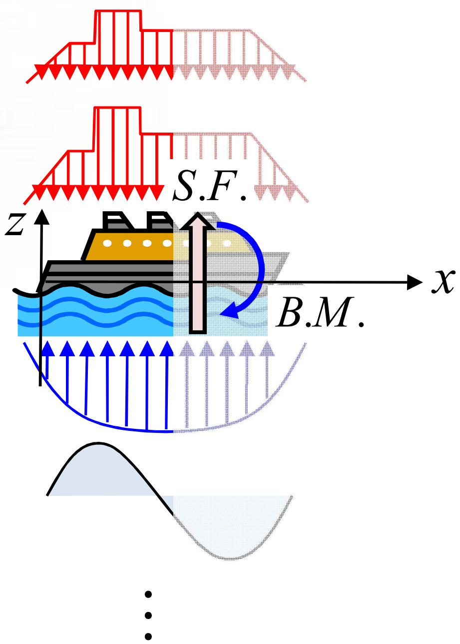
질량과 물에 잠긴 형상에 관련 (Still water load)

$$q(x)=\left[m(x)\omega^2\left(\xi_3^A - x\xi_5^A\right)+\eta_0\left(f_3(x)+h_3(x)\right)+a_{33}\omega^2\left(\xi_3^A - x\xi_5^A\right)-b_{33}i\omega\left(\xi_3^A - x\xi_5^A\right)\right]e^{i\omega t}+\left(b(x)-m(x)g\right)$$

Mass inertia	Froude-Krylov	Diffraction	Added mass force	Potential damping	Hydrostatic force	Structural weight

Mass inertia

Structural weight



Hydrostatic force

Froude-Krylov

Diffraction

Added mass force

Potential damping

✓ z축 방향 힘의 평형 조건

$$\sum F_Z = S.F. - \int_0^{x_1} q(x)dx = 0$$

$$\Rightarrow\ S.F.(x_1) = \int_0^{x_1} q(x)dx = 0$$

✓ 모멘트의 평형 조건(x=x_1기준)

$$\sum M_{x=x_1} = B.M. - \int_0^{x_1} S.F.(x)dx = 0$$

$$\Rightarrow\ B.M.(x_1) = \int_0^{x_1} S.F.(x)dx$$

선박의 하중 곡선(Load curve), 전단력(Shear force),굽힘 응력(Bending moment)

✓ 단위 길이당 수직 하중

$$q(x)=\Big[\underbrace{m(x)\omega^2\left(\xi_3^A-x\xi_5^A\right)+\eta_0\left(f_3(x)+h_3(x)\right)+a_{33}\omega^2\left(\xi_3^A-x\xi_5^A\right)-b_{33}i\omega\left(\xi_3^A-x\xi_5^A\right)}_{\text{Wave에 의한 힘 및 선박의 운동과 관련 (Wave load)}}\Big]e^{i\omega t}+\underbrace{\left(b(x)-m(x)g\right)}_{\text{질량과 물에 잠긴 형상에 관련 (Still water load)}}$$

$$=q_{dynamic}(x)+q_{static}(x)$$

적분

$$S.F.(x_1)=\int_{A.P.}^{x_1}q(x)dx=\int_{A.P.}^{x_1}q_{dynamic}(x)dx+\int_{A.P.}^{x_1}q_{static}(x)dx$$

적분

(x대신 적분 변수를 v로 둠)

$$B.M.(x_1)=\int_{A.P.}^{x_1}S.F.(x)dx=\underbrace{\int_{A.P.}^{x_1}\left(\int_{A.P.}^{x}q_{dynamic}(v)dv\right)dx}_{\text{VWBM (Vertical Wave Bending Moment)}}+\underbrace{\int_{A.P.}^{x_1}\left(\int_{A.P.}^{x}q_{static}(v)dv\right)dx}_{\text{SWBM (Still Water Bending Moment)}}$$