[2008][10-2]

Computer aided ship design

Part 3. Optimization Methods

November 2008

Prof. Kyu-Yeul Lee

Department of Naval Architecture and Ocean Engineering,
Seoul National University of College of Engineering

Advanced Ship Design Automation Laboratory

Ch4. 쿤-터커(Kuhn-Tucker) 정리를 이용한 최적성 조건

4.1 최적성 조건을 이용한 최적해의 도출

4.2 라그란지 승수(Lagrange multiplier)를 도입한 최적화 기법

Advanced
Ship
Design
Automation
Laboratory

Lagrange Multiplier를 이용한 제약 비선형 최적화 기법 - 2차 계획 문제

2차 계획 문제
- 목적 함수: 2차 형식
- 제약 조건: 1차 형식

Original Problem

Minimize $f(x_1, x_2) = (x_1 - 1.5)^2 + (x_2 - 1.5)^2$

Subject to $h(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 2 = 0$

Lagrange Function

Minimize $L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda h(x_1, x_2)$

$$= (x_1 - 1.5)^2 + (x_2 - 1.5)^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 2)$$

Necessary Condition: $\nabla L(x_1, x_1, \lambda) = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2(x_1 - 1.5) + \lambda = 0$$

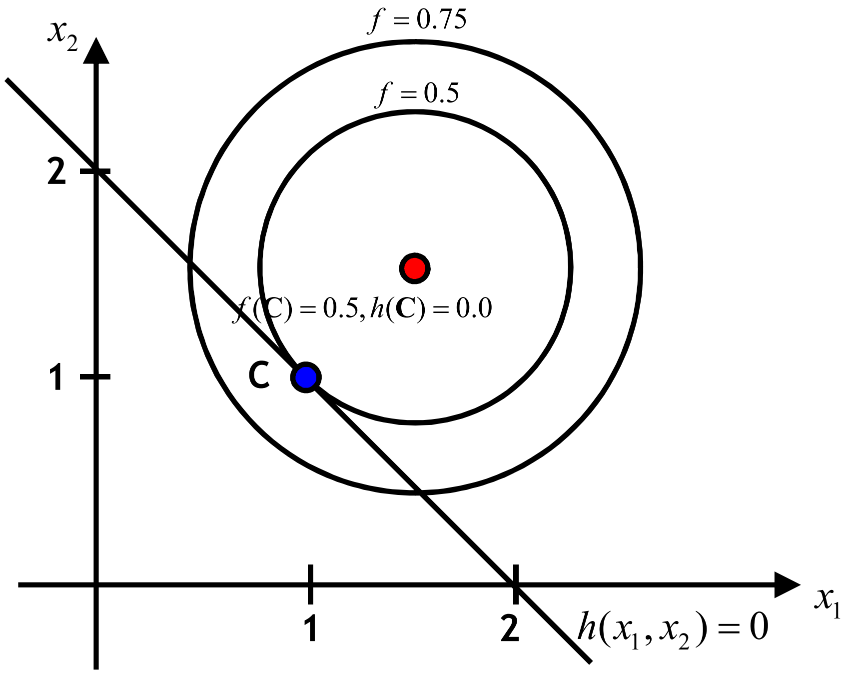
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2(x_2 - 1.5) + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 2 = 0$$

$\Rightarrow x_1^* = x_2^* = 1, \lambda^* = 1$ (점 C가 상점이 된다.)

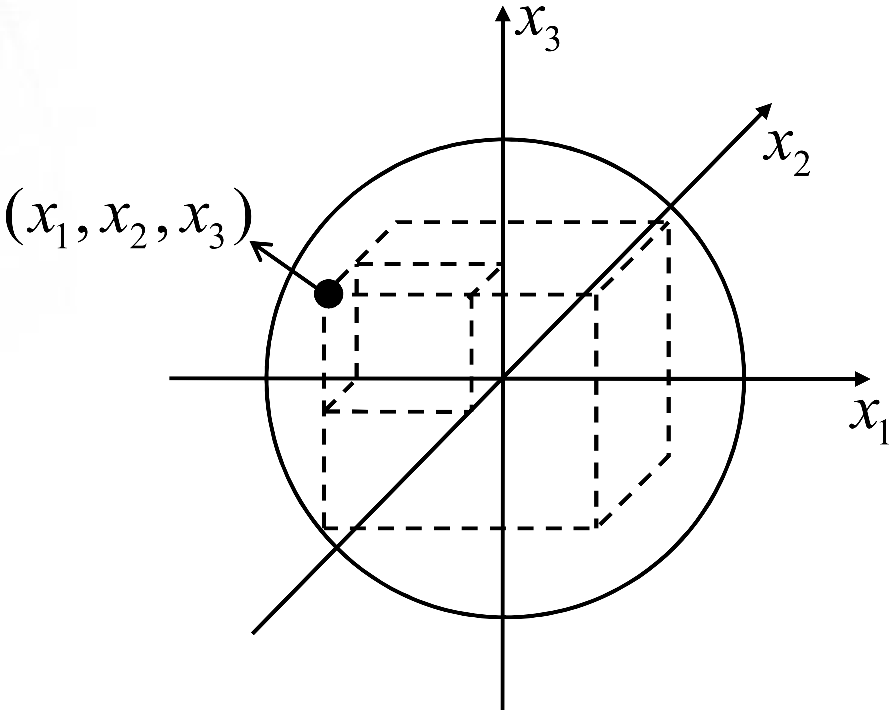
$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = f(x_1, x_2, x_3) + \lambda h(x_1, x_2, x_3)$$

$$\nabla L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 0$$



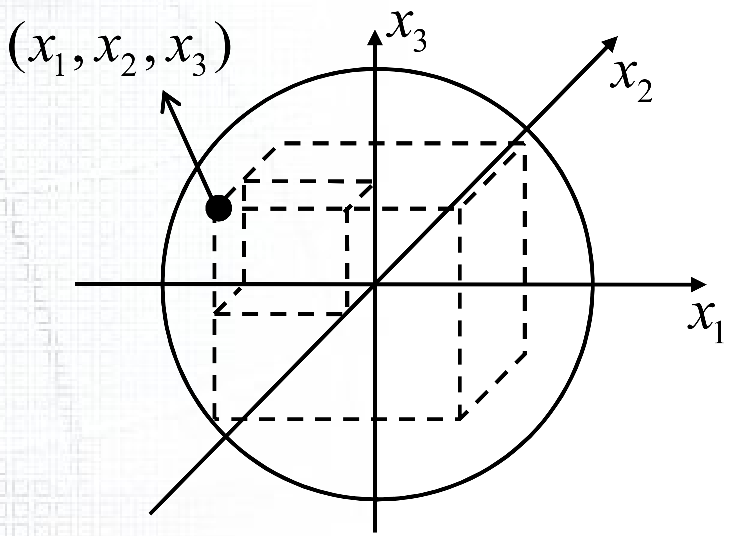
Lagrange Multiplier를 이용한 제약 비선형 최적화 기법

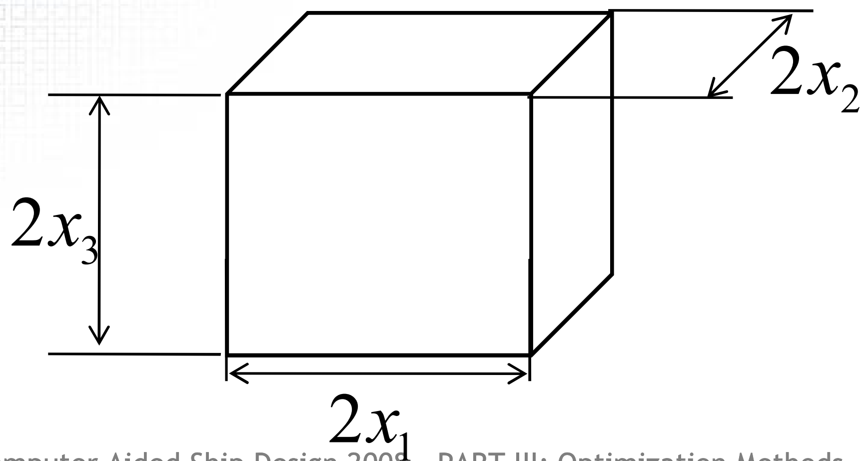
- 중심이 (0,0,0)이고 반지름이 c인 구가 있다.
- 각 꼭지점이 구에 접하는 직육면체의 최대 부피를 구하시오



Lagrange Multiplier를 이용한 제약 비선형 최적화 기법

- 풀이 – Mathematical Modeling





직육면체의 부피 f는

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 \cdot 2x_2 \cdot 2x_3$$

직육면체의 꼭지점이 구 상의 점이므로

$$h(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 = 0$$

$$maximize : f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 \cdot 2x_2 \cdot 2x_3$$
$$= 8x_1 x_2 x_3$$

$constraint :$

$$h(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 = 0$$

$$minimize : f(x_1, x_2, x_3) = -8x_1 x_2 x_3$$

$constraint :$

$$h(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 = 0$$

Lagrange Multiplier를 이용한 제약 비선형 최적화 기법

- 풀이 - Solution(1/2)

$$minimize: f(x_1, x_2, x_3) = -8x_1x_2x_3$$
$$constraint:$$
$$h(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 = 0$$

Lagrange 함수 구성

$$L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = f(x_1, x_2, x_3) + \lambda h(x_1, x_2, x_3)$$
$$= -8x_1x_2x_3 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2)$$

$$\nabla L(x_1, x_2, x_3, \lambda) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -8x_2x_3 + \lambda 2x_1 = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2} = -8x_1x_3 + \lambda 2x_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = -8x_1x_2 + \lambda 2x_3 = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 = 0$$

Lagrange Multiplier를 이용한 제약 비선형 최적화 기법

■ 풀이 - Solution(2/2)

$-8x_2x_3 + \lambda 2x_1 = 0$ -------- ① → 식 ① X x_1 → $-8x_1x_2x_3 + \lambda 2x_1^2 = 0$ → $x_1^2 = \dfrac{4x_1x_2x_3}{\lambda}$

$-8x_1x_3 + \lambda 2x_2 = 0$ -------- ② → 식 ② X x_2 → $-8x_1x_2x_3 + \lambda 2x_2^2 = 0$ → $x_2^2 = \dfrac{4x_1x_2x_3}{\lambda}$

$-8x_1x_2 + \lambda 2x_3 = 0$ -------- ③ → 식 ③ X x_3 → $-8x_1x_2x_3 + \lambda 2x_2^2 = 0$ → $x_3^2 = \dfrac{4x_1x_2x_3}{\lambda}$

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 = 0$ -------- ④ ← 식 ④에 대입

$$\frac{4x_1x_2x_3}{\lambda} + \frac{4x_1x_2x_3}{\lambda} + \frac{4x_1x_2x_3}{\lambda} - c^2 = 0$$

$$\frac{12x_1x_2x_3}{\lambda} = c^2$$

$$\frac{12x_1x_2x_3}{c^2} = \lambda \quad \text{-------- ⑤}$$

식 ⑤를 식①에 대입

$$-8x_2x_3 + \frac{12x_1x_2x_3}{c^2}2x_1 = 0$$

$$-8x_2x_3 + \frac{24x_1^2x_2x_3}{c^2} = 0$$

$$-8x_2x_3\left(1 - \frac{3x_1^2}{c^2}\right) = 0$$

x_2, x_3가 0이면 부피가 0이므로 안된다.

$$1 - \frac{3x_1^2}{c^2} = 0$$

$$\frac{3x_1^2}{c^2} = 1$$

$$x_1^2 = \frac{c^2}{3}$$

$$x_1 = \pm\frac{c}{\sqrt{3}}$$

x_1은 길이이므로 양수이다.
x_2, x_3도 이와 같은 방법으로 구하면

$$x_1 = \frac{c}{\sqrt{3}},\quad x_2 = \frac{c}{\sqrt{3}},\quad x_3 = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

따라서 최대의 부피는

$$8x_1x_2x_3 = \frac{8c^3}{3\sqrt{3}}$$

(참고) 소거법을 이용한 제약 비선형 최적화 기법
- 2차 계획 문제

2차 계획 문제
- 목적 함수: 2차 형식
- 제약 조건: 1차 형식

Given: $$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

$$h(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3 + 1 = 0$$

Find: **상점** (x_1^*, x_2^*, x_3^*)

함수 h (제약조건)를 x_1에 대해서 정리

$$x_1 = -x_2 - x_3 - 1$$

함수 f에 x_1 대입

$$f = (-x_2 - x_3 - 1)^2 + x_2^2 + x_3^2$$
$$= (x_2^2 + x_3^2 + 1 + 2x_2x_3 + 2x_2 + 2x_3) + x_2^2 + x_3^2$$
$$= 2x_2^2 + 2x_3^2 + 1 + 2x_2x_3 + 2x_2 + 2x_3$$

부가조건이 없는 함수의 상점 구하기

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 4x_2 + 2x_3 + 2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = 4x_3 + 2x_2 + 2 = 0$$

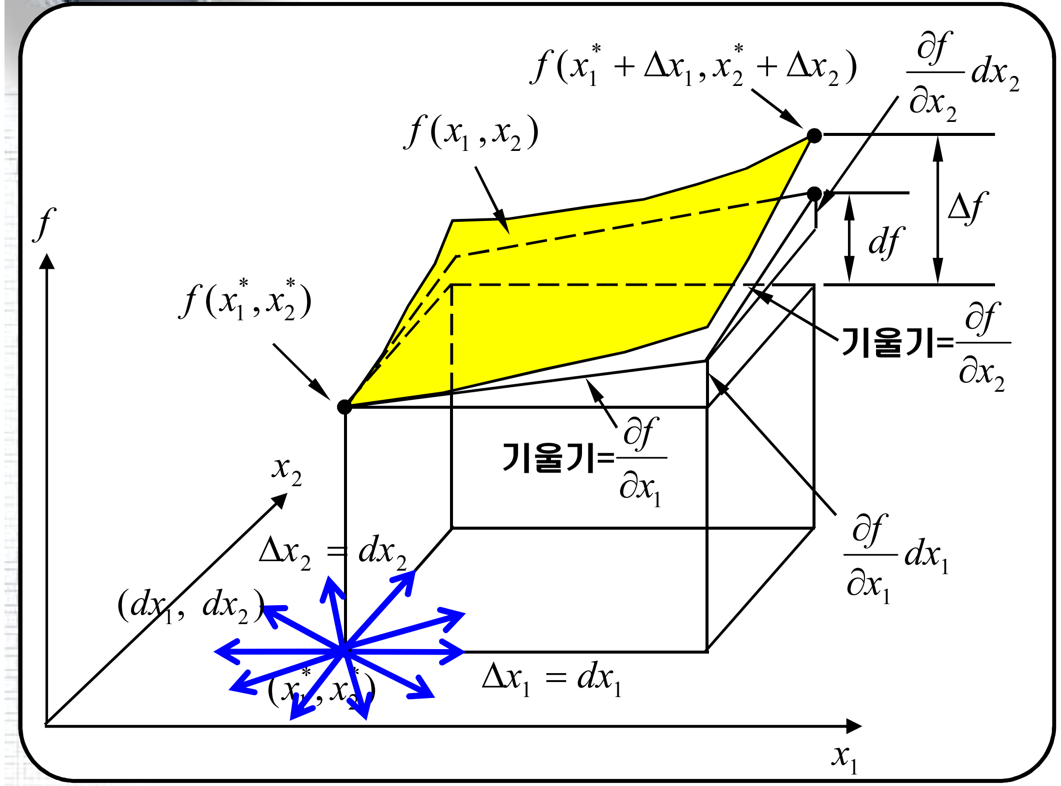
위 식을 연립하여 풀면, $x_2 = -\frac{1}{3}$,

$x_3 = -\frac{1}{3}$ **이고, 이를 함수 f에 대입하면,**

$x_1 = -\frac{1}{3}$ **이다.**

따라서 상점은 $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ **이다.**

(참고)2변수 함수의 전미분
함수의 상점(Stationary Point)을 찾는 방법



- 상점(x_1*, x_2*)에서는 **모든 방향**으로 함수값의 변화율이 0인 특성이 있음

- 현재 위치가 상점인지 판단하기 위해서는 **임의의 방향으로의 함수값 변화량**을 계산 해야 함

- x_1, x_2 Coordinate 상에서 **임의의 방향으로 dx_1, dx_2 만큼 변화**시켰을 때 **함수값의 변화량 df 는 0**이 되어야 함

주어진 것: $(x_1^*, x_2^*), f(x_1^*, x_2^*)$

실제 구해야 하는 것:

$$f(x_1^* + \Delta x_1, x_2^* + \Delta x_2) = f(x_1^*, x_2^*) + \Delta f$$

근사적으로 구할 수 있는 것:

$$f(x_1^*, x_2^*) + df$$

Δx_1, Δx_2 가 아주 작다면

$\Delta f \cong df$ 라 볼 수 있음

x_2 방향의 변화량

$$df = \boxed{\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1} + \boxed{\frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2}$$

x_1 방향의 변화량

Lagrange Multiplier를 이용한 제약 비선형 최적화 기법 - 2차 계획 문제

2차 계획 문제
- 목적 함수: 2차 형식
- 제약 조건: 1차 형식

Original Problem

Minimize $f(\mathbf{x}) = (x_1 - 1.5)^2 + (x_2 - 1.5)^2$

Subject to $h(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 - 2 = 0$

Lagrange Function

Minimize $L(\mathbf{x}, v) = f(\mathbf{x}) + vh(\mathbf{x})$

$$= (x_1 - 1.5)^2 + (x_2 - 1.5)^2 + v(x_1 + x_2 - 2)$$

Necessary Condition: $\nabla L(\mathbf{x}^*, v^*) = 0$

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + v^* \nabla h(\mathbf{x}^*) = 0$$

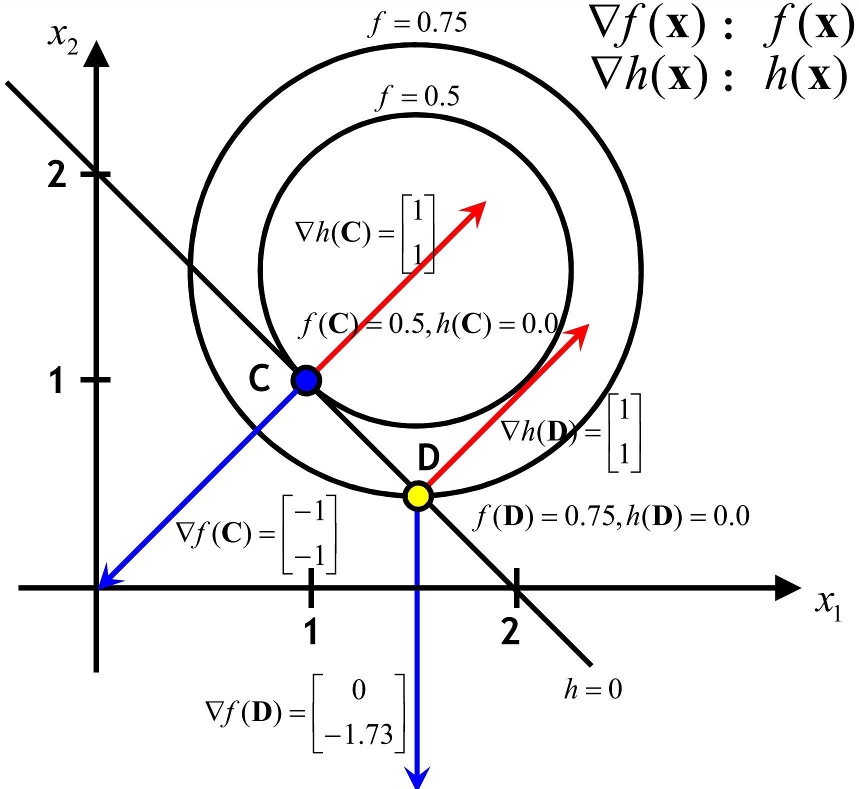
$$\therefore -\nabla f(\mathbf{x}^*) = v^* \nabla h(\mathbf{x}^*)$$

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2(x_1 - 1.5) \\ 2(x_2 - 1.5) \end{bmatrix}, \quad \nabla h(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$-2(x_1^* - 1.5) = v^*, \quad -2(x_2^* - 1.5) = v^*$$

$$x_1^* + x_2^* - 2 = 0$$

$\Rightarrow x_1^* = x_2^* = 1, v^* = 1$ (점 C)



$\nabla f(\mathbf{x})$: $f(\mathbf{x})$ 의 증가 방향

$\nabla h(\mathbf{x})$: $h(\mathbf{x})$ 의 증가 방향

후보 최적점 C에서 $-\nabla f(\mathbf{x}^*) = v^* \nabla h(\mathbf{x}^*)$ 의 의미를 살펴 보면,

목적 함수 및 제약 함수의 Gradient 벡터는 동일 작용선 상에 있고, 서로 비례하며 이때 Lagrange multiplier v^*가 비례 상수임

$$\nabla f(\mathbf{C}) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \nabla h(\mathbf{C}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v^* = 1$$

그러나 점 D에서는 위 식을 만족하지 않으므로 후보 최적점이 아님

Lagrange 함수의 정의
- 등호 제약 조건이 있는 최적화 문제(요약)

■ 등호 제약 조건이 있는 최적화 문제

$$\text{Minimize} \quad f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ \dots \ , x_n)$$

$$\text{Subject to} \quad h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \ \dots \ , p$$

■ Lagrange 함수(L)의 정의

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{p} v_i h_i(\mathbf{x})$$

$$= f(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^T \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

v_i = 등호 제약 조건에 대한 Lagrange multiplier로서 부호에 제한이 없음

<이유> 원래의 등호 제약 조건("등식")의 양변에 -를 곱해도 주어진 문제의 해는 변하지 않으므로

Lagrange Multiplier를 이용한 제약 비선형 최적화 기법
- 부등호 제약 조건을 포함한 2차 계획 문제

2차 계획 문제
- 목적 함수: 2차 형식
- 제약 조건: 1차 형식

Original Problem

부등호 제약 조건을 등호 제약 조건으로 변환하기 위해 도입한 완화 변수(slack variable)

Minimize $f(\mathbf{x}) = (x_1 - 1.5)^2 + (x_2 - 1.5)^2$

Subject to $g(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 - 2 \le 0$

$\Rightarrow g(\mathbf{x}) + s^2 = x_1 + x_2 - 2 + \boxed{s^2} = 0$

Lagrange Function

Minimize $L(\mathbf{x},\ u,\ s) = f(\mathbf{x}) + u\left[g(\mathbf{x}) + s^2\right]$

$= (x_1 - 1.5)^2 + (x_2 - 1.5)^2$

$+ u(x_1 + x_2 - 2 + s^2)$

Necessary Condition: $\nabla L(\mathbf{x}^*,\ u^*,\ s^*) = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2(x_1 - 1.5) + u = 0,\quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = 2(x_2 - 1.5) + u = 0$$

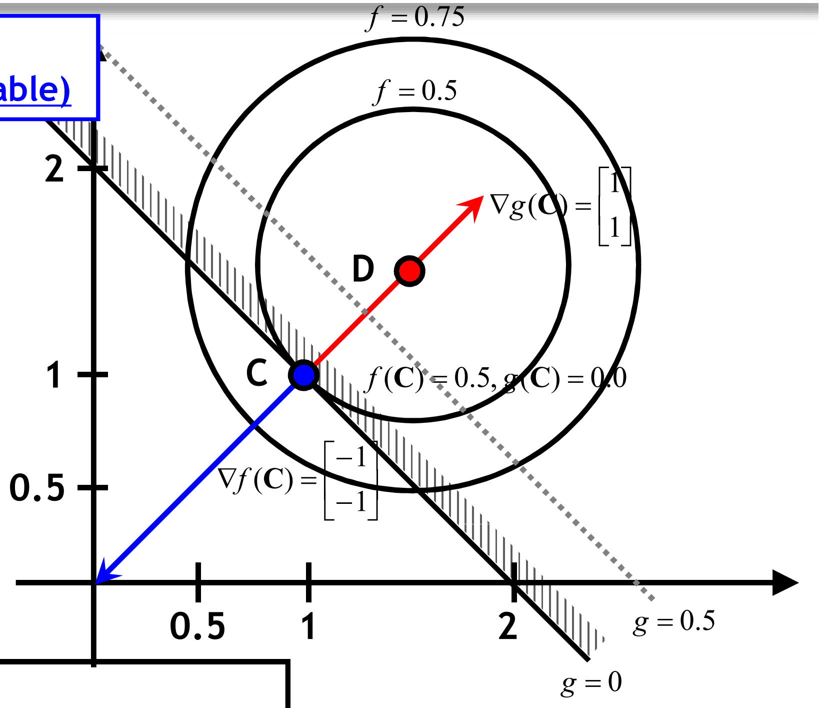
$$\frac{\partial L}{\partial u} = x_1 + x_2 - 2 + s^2 = 0,\quad \frac{\partial L}{\partial s} = 2us = 0$$ 단, $u \ge 0$

(1) s = 0일 때(부등호 제약 조건이 등호 제약 조건으로 변환)

$x_1^* = x_2^* = 1, u^* = 1$ ➡ 후보 최적점(점 C)

(2) u = 0일 때(부등호 제약 조건을 만족함, 즉 부등호 제약 조건이 없는 문제임)

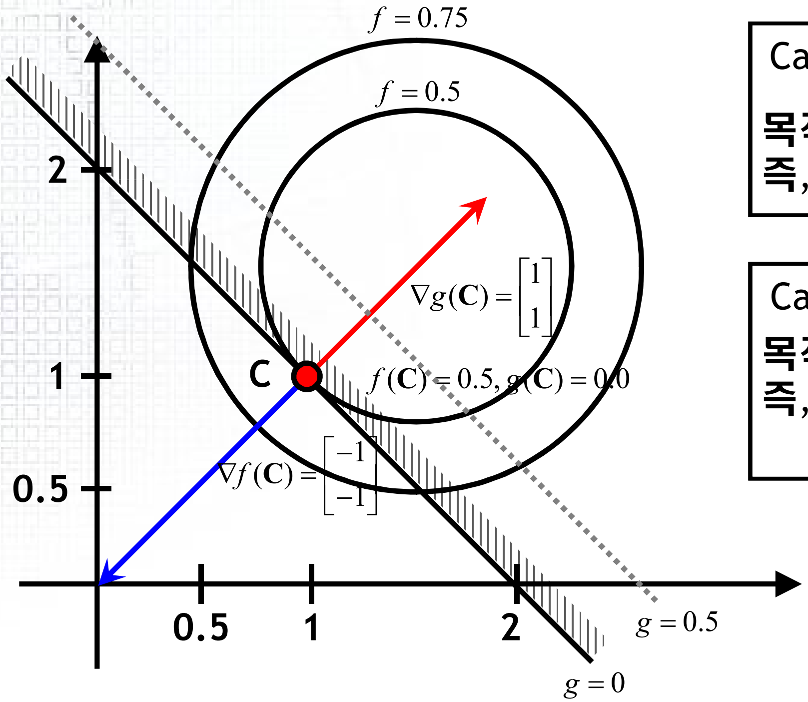
$x_1^* = x_2^* = 1.5, u^* = 0, s^2 = -1$ (점 D: 제약 조건을 위배)



부등호 제약 조건에 대한 Lagrange multiplier의 부호가 양이어야 하는 이유

Original Problem

$$\text{Minimize} \quad f(\mathbf{x}) = (x_1 - 1.5)^2 + (x_2 - 1.5)^2$$
$$\text{Subject to} \quad g(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 - 2 \le 0$$



$-\nabla f$	∇g
목적 함수 값이 감소하는 방향	제약 조건이 완화되는[1] 방향

Case #1 $\quad -\nabla f = \nabla g$

목적 함수 값이 감소하는 방향이 제약 조건이 완화되는 방향과 같다.
즉, 제약 조건이 완화되면 목적 함수 값이 더 작아질 수 있다.

Case #2 $\quad -\nabla f = -\nabla g$

목적 함수 값이 감소하는 방향이 제약 조건이 강화되는 방향과 같다.
즉, **제약 조건이 강화되면 목적 함수 값이 더 작아질 수 있다.**
모순!

Kuhn-Tucker Necessary Condition으로부터

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) + u^* \nabla g(\mathbf{x}^*) = 0$$

$$-\nabla f(\mathbf{x}^*) = u^* \nabla g(\mathbf{x}^*)$$

Case #1, Case #2로부터

$$u^* \ge 0$$

1) 제약 조건 완화됨: 가능해 영역의 범위가 넓어짐

부등호 제약 조건이 있는 문제의 후보 최적성 필요 조건(1)

[참고] 등호 제약 조건이 있는 문제의 Lagrange 함수

$$L(\mathbf{x},\mathbf{v}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{p} v_i h(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^T \mathbf{h}(\mathbf{x})$$

v_i : 등호 제약 조건에 대한 Lagrange multiplier로서 부호에 제한이 없음

부등호 제약 조건

$$g_i(\mathbf{x}) \le 0, \quad i = 1, \ \dots \ , m$$

부등호 제약 조건을 등호 제약 조건으로 변경하기 위해서 완화 변수(slack variable) s_i^2 을 도입하면,

$$g_i(\mathbf{x}) + s_i^2 = 0, \quad i = 1, \ \dots \ , m$$

부등호 제약 조건이 있는 문제의 Lagrange 함수

원래의 부등호 제약 조건이 완화 변수의 도입을 통해 등호 제약 조건으로 변경되었기 때문에 Lagrange 함수에 대입하여 정리하면

$$L(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{s}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i (g_i(\mathbf{x}) + s_i^2) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^T (\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}^2) \quad \text{단, } u_i \ge 0$$

u_i : 부등호 제약 조건에 대한 Lagrange multiplier로서 0보다 크거나 같아야 함

s_i : 부등호 제약 조건을 등호 제약 조건으로 변환하기 위한 완화 변수

부등호 제약 조건이 있는 문제의 후보 최적성 필요 조건(2)

부등호 제약 조건이 있는 문제의 Lagrange 함수

$$L(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{s}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i (g_i(\mathbf{x}) + s_i^2) = f(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^T(\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}^2)$$

u_i : 부등호 제약 조건에 대한 Lagrange multiplier로서 0보다 크거나 같아야 함

s_i : 부등호 제약 조건을 등호 제약 조건으로 변환하기 위한 완화 변수

부등호 제약 조건이 있는 문제의 후보 최적성 필요 조건

$$\nabla L(\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*,\mathbf{s}^*) = \mathbf{0}$$

⬇

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} \equiv \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} u_i^* \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \quad j = 1, \ldots, n$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} \equiv g_i(\mathbf{x}^*) + s_i^{*2} = 0, \quad i = 1, \ldots, \mathrm{m}$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_i} \equiv u_i^* s_i^* = 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$u_i^* \geq 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

등호 및 부등호 제약 조건이 있는 문제의 후보 최적성 필요 조건 - 쿤-터커(Kuhn-Tucker) 필요 조건

최적화 문제

$$\textit{Minimize} \quad f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$\textit{Subject to} \quad h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1,\dots,p \quad \text{등호 제약 조건}$$

$$g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1,\dots,m \quad \text{부등호 제약 조건}$$

Lagrange 함수의 정의

$$L(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{s}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{p} v_i h_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i (g_i(\mathbf{x}) + s_i^2)$$

$$= f(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^T \mathbf{h}(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^T (\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{s}^2)$$

v_i : 등호 제약 조건에 대한 Lagrange multiplier로서 부호에 제한이 없음

u_i : 부등호 제약 조건에 대한 Lagrange multiplier로서 0보다 크거나 같아야 함

s_i : 부등호 제약 조건을 등호 제약 조건으로 변환하기 위한 완화 변수

Kuhn-Tucker 필요 조건: $\nabla L(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{s}) = \mathbf{0}$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} \equiv \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{p} v_i^* \frac{\partial h_i}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} u_i^* \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \qquad j = 1, \ \dots \ , n$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} \equiv h_i(\mathbf{x}^*) = 0, \qquad i = 1, \ \dots \ , p$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} \equiv g_i(\mathbf{x}^*) + s_i^{*2} = 0, \qquad i = 1, \ \dots \ , \mathrm{m}$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_i} \equiv u_i^* s_i^* = 0, \qquad i = 1, \ \dots \ , m$$

$$u_i^* \geq 0, \qquad i = 1, \ \dots \ , m$$

여기서, 모든 함수 값 및 경사도(Gradient)는 점 $\mathbf{x}^*$에서 계산한다.

> x*가 국부적 후보 최적해라면 반드시 이 조건을 만족해야 함
>
> 즉, Kuhn-Tucker 필요 조건은 x*가 국부적 후보 최적해이기 위한 필요 조건임
>
> 따라서 등호 제약 조건 및 부등호 제약 조건을 가진 최적화 문제에 대해, 국부적 후보 최적점을 구하기 위한 조건으로 사용할 수 있음

[복습] Lagrange Multiplier, Kuhn-Tucker 필요조건 2차 계획 문제

Given: $f(x_1, x_2)$

$h(x_1, x_2) = 0$

Find: 상점 (x_1^*, x_2^*)

- 소거법을 이용한 제약 비선형 최적화 기법
- Lagrange Multiplier를 이용하는 방법

Lagrange 함수(L)를 정의 하고 L의 상점을 구함

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda h(x_1, x_2)$$

$$\nabla L(x_1, x_2, \lambda) = 0$$

Given: $f(x_1, x_2)$

$g(x_1, x_2) \le 0$

Find: 상점 (x_1^*, x_2^*)

- Kuhn-Tucker 필요 조건을 이용하는 방법

$$f(x_1, x_2)$$

$$g(x_1, x_2) + s^2 = 0$$

$$L(x_1, x_2, u, s) = f(x_1, x_2) + u\{g(x_1, x_2) + s^2\}$$

$\nabla L(x_1, x_2, u, s) = \mathbf{0}$ ➡ 예시) $\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 3x_2 + 2ux_1 = 0,\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 3x_1 + 2ux_2 = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = x_1^2 + x_2^2 - 6 + s^2 = 0,\ \frac{\partial L}{\partial s} = 2us = 0,\ u \ge 0$$

2차 계획 문제

Given: $f(x_1, x_2)$ ← 2차식

$g(x_1, x_2) \le 0$ ← 1차식

Find: 상점 (x_1^*, x_2^*)

- Kuhn-Tucker 필요 조건을 이용하는 방법

$\nabla L(x_1, x_2, u, s) = \mathbf{0}$ ➡ 예시) $\dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2(x_1 - 1.5) + u = 0,\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 2(x_2 - 1.5) + u = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = x_1 + x_2 - 2 + s^2 = 0,\quad \frac{\partial L}{\partial s} = 2us = 0$$

선형 부정 방정식 → Simplex 방법을 이용하여 해를 구함

비선형 부정 방정식 → 구한 해 중 비선형 부정 방정식을 만족하는지를 확인하여 해를 확정함

제약 비선형 최적화 문제의 풀이 방법 비교

최적화 문제

$$\textit{Minimize} \quad f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$\textit{Subject to} \quad h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1,\dots,p$$ 등호 제약 조건

$$g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1,\dots,m$$ 부등호 제약 조건

Lagrange 함수의 정의

$$L(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{s}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{p} v_i h_i(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i (g_i(\mathbf{x}) + s_i^2)$$

v_i : 등호 제약 조건에 대한 Lagrange multiplier로서 부호에 제한이 없음

u_i : 부등호 제약 조건에 대한 Lagrange multiplier로서 0보다 크거나 같아야 함

s_i : 부등호 제약 조건을 등호 제약 조건으로 변환하기 위한 완화 변수

Kuhn-Tucker 필요 조건: $\nabla L(\mathbf{x},\mathbf{v},\mathbf{u},\mathbf{s}) = \mathbf{0}$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{p} v_i^* \frac{\partial h_i}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} u_i^* \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0, \qquad j = 1, \ \dots \ , n$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_i} = h_i(\mathbf{x}^*) = 0, \qquad i = 1, \ \dots \ , p$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} = g_i(\mathbf{x}^*) + s_i^{*2} = 0, \qquad i = 1, \ \dots \ , \mathrm{m}$$

선형 부정 방정식

$$\frac{\partial L}{\partial s_i} = u_i^* s_i^* = 0, \qquad i = 1, \ \dots \ , m$$

비선형 부정 방정식

$$u_i^* \ge 0, \qquad i = 1, \ \dots \ , m$$

방법 1.
- 비선형 부정 방정식을 만족하는 해를 먼저 구함
- 각 해에 대해 선형 부정 방정식을 만족하는지를 확인하여 해를 확정하는 방법
- 이 방법을 이용할 경우 사람은 비교적 간단하게 해를 구할 수 있음

방법 2.
- Simplex 방법을 사용하여 선형 부정 방정식을 만족하는 해를 먼저 구함
- 각 해에 대해 비선형 부정 방정식을 만족하는지를 확인하여 해를 확정하는 방법
- 이 방법은 체계적으로 알고리즘화 된 방법이므로 컴퓨터로 구현할 때 유리함

제약 비선형 최적화 문제
- Kuhn-Tucker 필요 조건을 이용한 국부적 후보 최적해 도출

①

$$Minimize\ \ f(\mathbf{x}) = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} - 3x_1x_2$$

$$g(\mathbf{x}) = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} - 6 \le 0$$

②

$$L(\mathbf{x}, u, s) = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} - 3x_1x_2 + u(x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} - 6 + s^2)$$

③

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 3x_2 + 2ux_1 = 0 \text{ ------- ①}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 3x_1 + 2ux_2 = 0 \text{ ------- ②}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} - 6 + s^2 = 0,\ s^2 \ge 0,\ u \ge 0 \text{ ------- ③}$$

$$\frac{\partial L}{\partial s} = \boxed{2us = 0}$$ ➡ 두가지 경우가 나옴

CASE #1 : $u = 0$ **(제약 조건을 고려하지 않아도 되는 경우)**

$$2x_1 - 3x_2 = 0$$

$$-3x_1 + 2x_2 = 0$$

➡ **점 A:** $x_1^* = 0,\ x_2^* = 0,\ f(x_1^*, x_2^*) = 0$

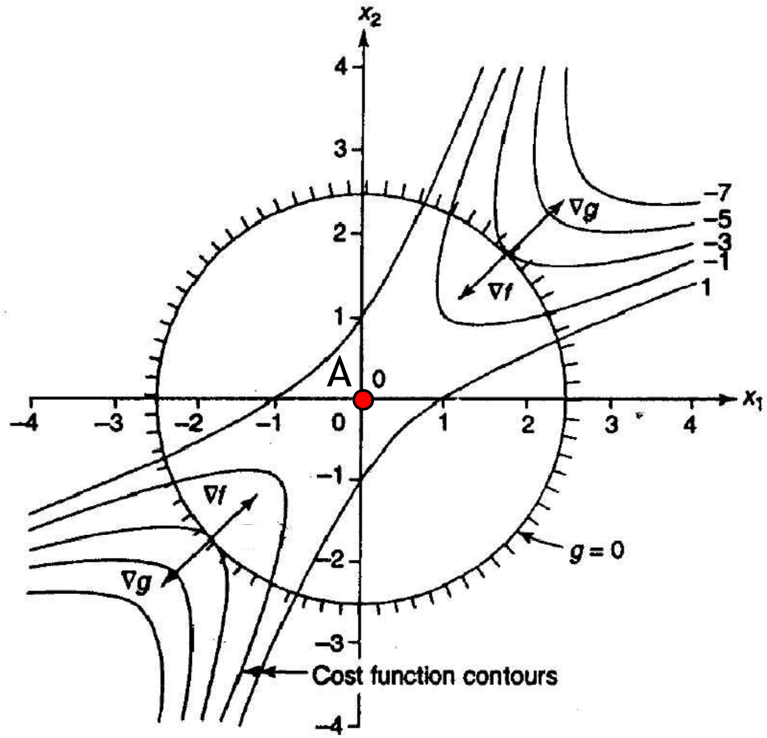
CASE #2 : $s = 0$ **(제약 조건의 경계 상에 해가 있는 경우)**

식①을 정리 $2x_1 - 3x_2 + 2ux_1 = 0,\ \ u = -1 + \dfrac{3}{2}\dfrac{x_2}{x_1}$

식②에 대입 $2x_2 - 3x_1 + 2(-1 + \dfrac{3}{2}\dfrac{x_2}{x_1})x_2 = 0$

$$2x_2 - 3x_1 - 2x_2 + 3\frac{x_2^2}{x_1} = 0,\ \ 3\frac{x_2^2}{x_1} = 3x_1,\ \ x_2^2 = x_1^2$$

식③에 대입 $2x_1^{\ 2} = 6,\ \ \ x_1 = \pm\sqrt{3}$



제약 비선형 최적화 문제
- Kuhn-Tucker 필요 조건을 이용한 국부적 후보 최적해 도출

①

$$Minimize\ \ f(\mathbf{x}) = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} - 3x_1x_2$$

$$g(\mathbf{x}) = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} - 6 \le 0$$

②

$$L(\mathbf{x}, u, s) = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} - 3x_1x_2 + u(x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} - 6 + s^2)$$

③

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 3x_2 + 2ux_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 3x_1 + 2ux_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u} = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} - 6 + s^2 = 0,\ s^2 \ge 0,\ u \ge 0$$

$\frac{\partial L}{\partial s} = \boxed{2us = 0}$ ➡ 두가지 경우가 나옴

CASE #1 : $u = 0$ **(제약 조건을 고려하지 않아도 되는 경우)**

$$2x_1 - 3x_2 = 0$$
$$-3x_1 + 2x_2 = 0$$

➡ 점 A: $x_1^* = 0,\ x_2^* = 0,\ f(x_1^*, x_2^*) = 0$

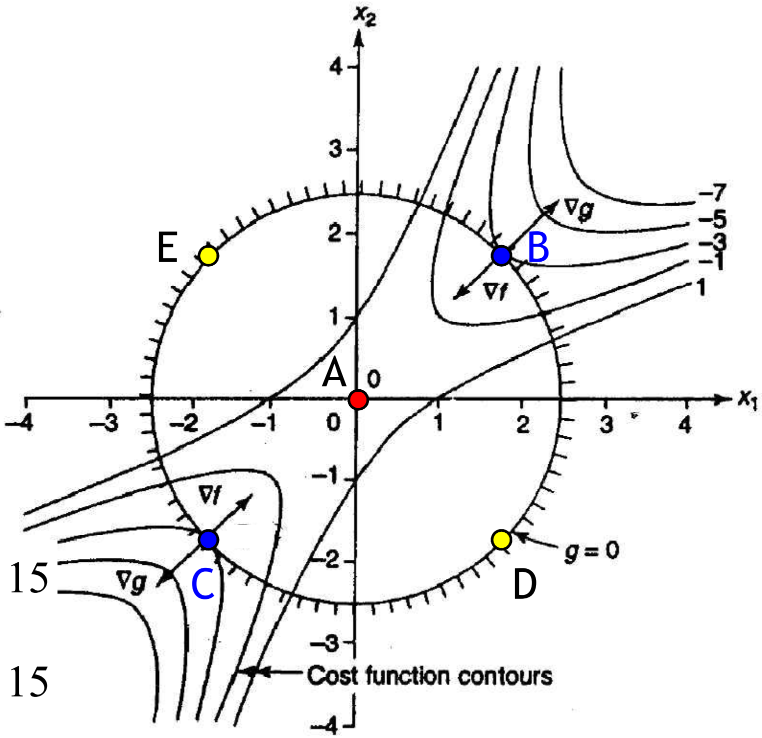
CASE #2 : $s = 0$ **(제약 조건의 경계 상에 해가 있는 경우)**

$x_1 = x_2 = \sqrt{3},\ u = \frac{1}{2}$ ➡ 점 B: $x_1^* = x_2^* = \sqrt{3}, f(x_1^*, x_2^*) = -3$

$x_1 = x_2 = -\sqrt{3},\ u = \frac{1}{2}$ ➡ 점 C: $x_1^* = x_2^* = -\sqrt{3}, f(x_1^*, x_2^*) = -3$

$x_1 = -x_2 = \sqrt{3},\ u = -\frac{5}{2}$ ➡ 점 D: $x_1^* = \sqrt{3}, x_2^* = -\sqrt{3}, f(x_1^*, x_2^*) = 15$

$x_1 = -x_2 = -\sqrt{3},\ u = -\frac{5}{2}$ ➡ 점 E: $x_1^* = -\sqrt{3}, x_2^* = \sqrt{3}, f(x_1^*, x_2^*) = 15$



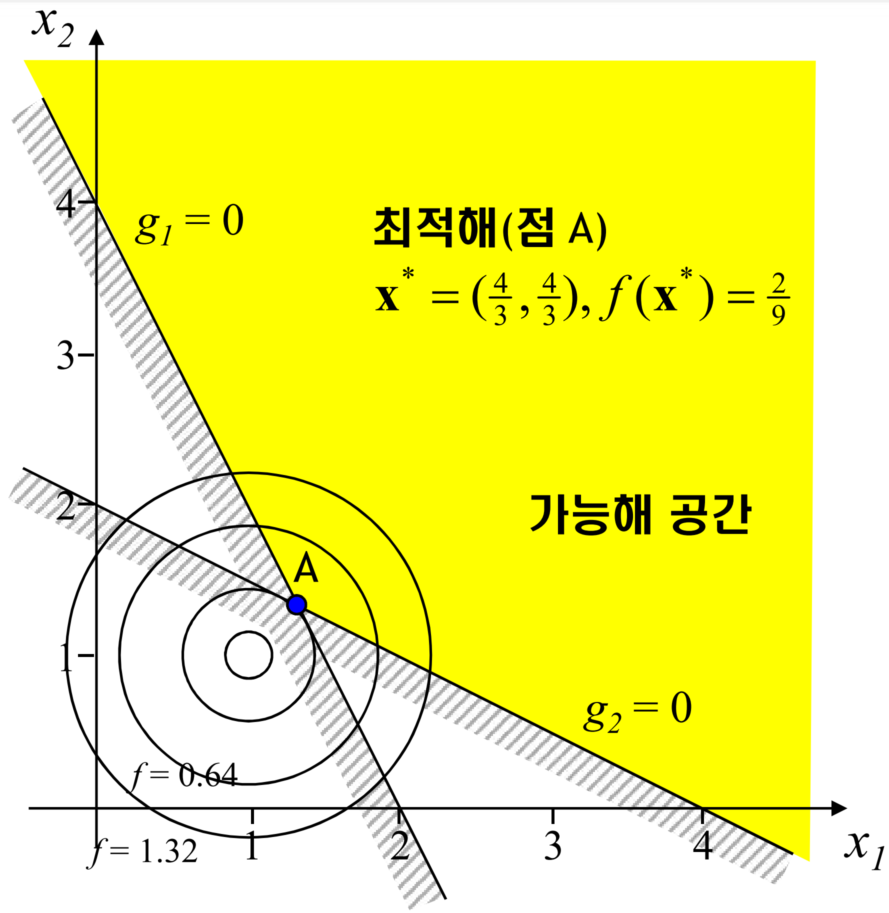
K-T 필요 조건을 이용한 2차 계획 문제 최적해 구하기 - x_i의 부호 제약이 없을 경우(1/3)

2차 계획 문제
- 목적 함수: 2차 형식
- 제약 조건: 1차 형식

Minimize $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 2$

Subject to $g_1(\mathbf{x}) = -2x_1 - x_2 + 4 \le 0$

$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 - 2x_2 + 4 \le 0$



Lagrange 함수

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{s}, \zeta) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 2$$
$$+u_1(-2x_1 - x_2 + 4 + s_1^2)$$
$$+u_2(-x_1 - 2x_2 + 4 + s_2^2)$$

K-T 필요 조건을 이용한 2차 계획 문제 최적해 구하기 - x_i의 부호 제약이 없을 경우(2/3)

2차 계획 문제
- 목적 함수: 2차 형식
- 제약 조건: 1차 형식

Lagrange 함수

$$L(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{s},\zeta) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 2 + u_1(-2x_1 - x_2 + 4 + s_1^2) + u_2(-x_1 - 2x_2 + 4 + s_2^2)$$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 2 \\ g_1(\mathbf{x}) &= -2x_1 - x_2 + 4 \le 0 \\ g_2(\mathbf{x}) &= -x_1 - 2x_2 + 4 \le 0 \end{aligned}$$

Kuhn-Tucker 필요 조건: $\nabla L(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{s},\zeta) = \mathbf{0}$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 2 - 2u_1 - u_2 = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 2 - u_1 - 2u_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = -2x_1 - x_2 + 4 + s_1^2 = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial u_2} = -x_1 - 2x_2 + 4 + s_2^2 = 0$$

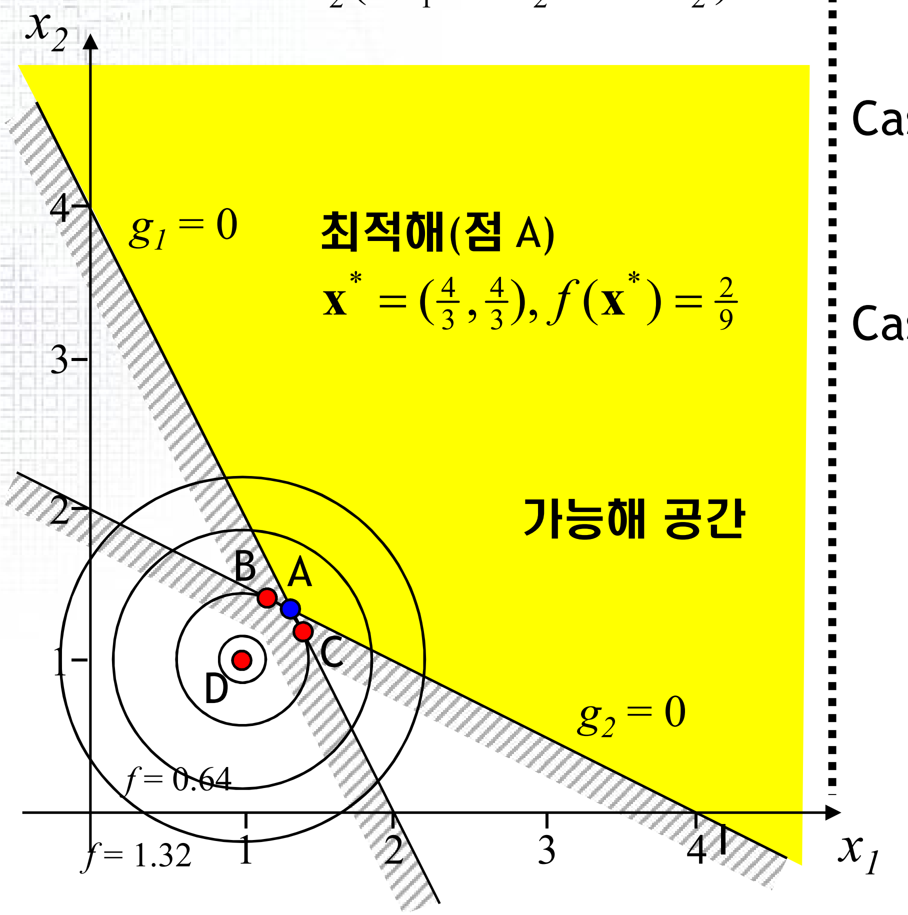
$$\frac{\partial L}{\partial s_1} = 2u_1 s_1 = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial s_2} = 2u_2 s_2 = 0 \qquad u_i \ge 0,\ i = 1, 2$$

K-T 필요 조건을 이용한 2차 계획 문제 최적해 구하기 - x_i의 부호 제약이 없을 경우(3/3)

2차 계획 문제
- 목적 함수: 2차 형식
- 제약 조건: 1차 형식

Lagrange 함수

$$L(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{s},\zeta) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 2$$
$$+u_1(-2x_1 - x_2 + 4 + s_1^2)$$
$$+u_2(-x_1 - 2x_2 + 4 + s_2^2)$$



Case #1: s_1=s_2=0일 때(최적해, 점 A)

$$x_1 = x_2 = \tfrac{4}{3}, u_1 = u_2 = \tfrac{2}{9}$$

Case #2: u_1=s_2=0일 때(점 B)

$$x_1 = \tfrac{6}{5}, x_2 = \tfrac{7}{5}, u_2 = \tfrac{2}{5}, s_1^2 = -\tfrac{1}{5}$$
음수여서 안됨

Case #3: u_2=s_1=0일 때(점 C)

$$x_1 = \tfrac{7}{5}, x_2 = \tfrac{6}{5}, u_1 = \tfrac{2}{5}, s_2^2 = -\tfrac{1}{5}$$
음수여서 안됨

Case #4: u_1=u_2=0일 때(점 D)

$$x_1 = x_2 = 1, s_1^2 = s_2^2 = -1$$
음수여서 안됨

K-T 필요 조건을 이용한 2차 계획 문제 최적해 구하기 - x_i가 음이 아닐 경우(1/4)

2차 계획 문제
- 목적 함수: 2차 형식
- 제약 조건: 1차 형식

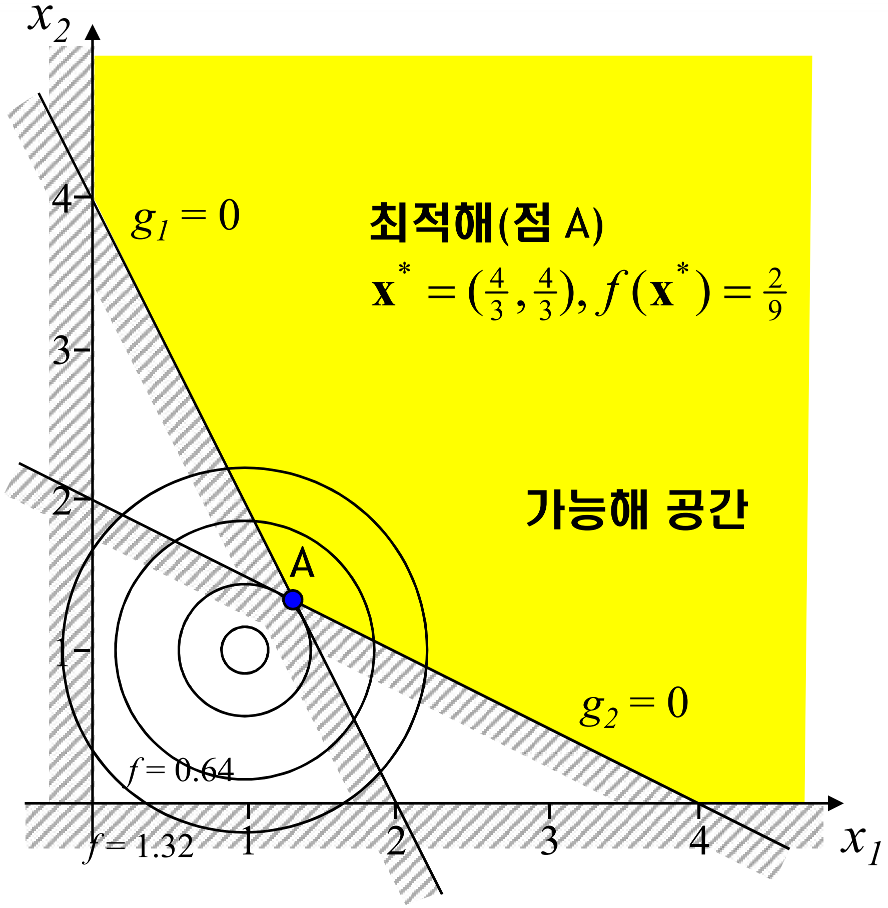
$$\begin{aligned} \textit{Minimize} \quad & f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 2 \\ \textit{Subject to} \quad & g_1(\mathbf{x}) = -2x_1 - x_2 + 4 \le 0 \\ & g_2(\mathbf{x}) = -x_1 - 2x_2 + 4 \le 0 \\ & \text{단, } x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

최적해는 $\mathbf{x}^* = (\frac{4}{3}, \frac{4}{3}), f(\mathbf{x}^*) = \frac{2}{9}$

$$\begin{aligned} \textit{Minimize} \quad & f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 2 \\ \textit{Subject to} \quad & g_1(\mathbf{x}) = -2x_1 - x_2 + 4 \le 0 \\ & g_2(\mathbf{x}) = -x_1 - 2x_2 + 4 \le 0 \\ & \text{단, } -x_1 \le 0, -x_2 \le 0 \end{aligned}$$

"≤" 형태의 부등호 제약 조건:
완화 변수(slack variable)의 도입

$$\begin{aligned} \textit{Minimize} \quad & f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 2 \\ \textit{Subject to} \quad & g_1(\mathbf{x}) = -2x_1 - x_2 + 4 + s_1^2 = 0 \\ & g_2(\mathbf{x}) = -x_1 - 2x_2 + 4 + s_2^2 = 0 \\ & -x_1 + \delta_1^2 = 0, -x_2 + \delta_2^2 = 0 \end{aligned}$$



K-T 필요 조건을 이용한 2차 계획 문제 최적해 구하기 - x_i가 음이 아닐 경우(2/4)

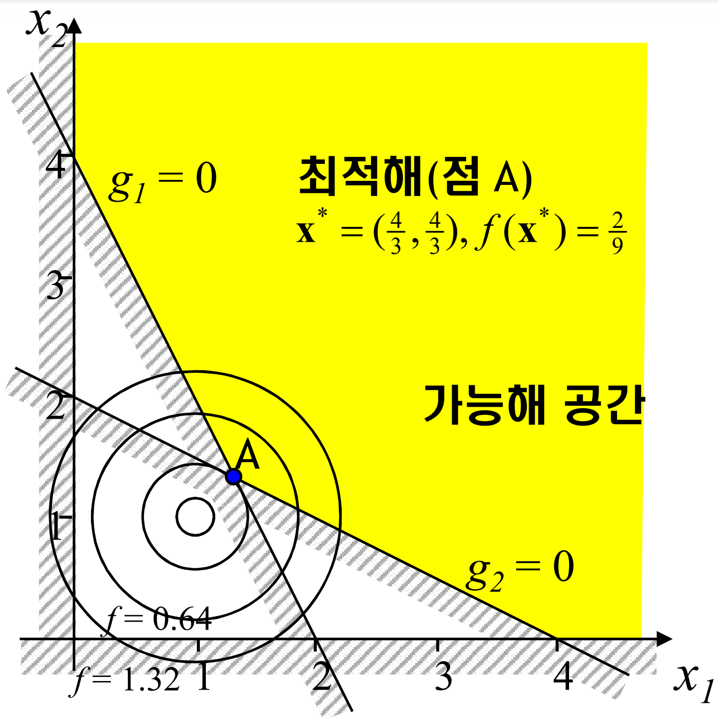
2차 계획 문제
- 목적 함수: 2차 형식
- 제약 조건: 1차 형식

$$\textit{Minimize} \quad f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 2$$

$$\textit{Subject to} \quad g_1(\mathbf{x}) = -2x_1 - x_2 + 4 + s_1^2 = 0$$

$$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 - 2x_2 + 4 + s_2^2 = 0$$

$$-x_1 + \delta_1^2 = 0, -x_2 + \delta_2^2 = 0$$



Lagrange 함수

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{s}, \zeta, \boldsymbol{\delta}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 2$$
$$+u_1(-2x_1 - x_2 + 4 + s_1^2)$$
$$+u_2(-x_1 - 2x_2 + 4 + s_2^2)$$
$$+\zeta_1(-x_1 + \delta_1^2) + \zeta_2(-x_2 + \delta_2^2)$$

Kuhn-Tucker 필요 조건: $\nabla L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{s}, \zeta, \boldsymbol{\delta}) = \mathbf{0}$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 - 2 - 2u_1 - u_2 - \zeta_1 = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 2 - u_1 - 2u_2 - \zeta_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = -2x_1 - x_2 + 4 + s_1^2 = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial u_2} = -x_1 - 2x_2 + 4 + s_1^2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_1} = 2u_1 s_1 = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial s_2} = 2u_2 s_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \zeta_1} = \delta_1^2 - x_1 = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \zeta_2} = \delta_2^2 - x_2 = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \delta_1} = 2\zeta_1 \delta_1 = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \delta_1} = 2\zeta_1 \delta_1 = 0$$

K-T 필요 조건을 이용한 2차 계획 문제 최적해 구하기 - x_i가 음이 아닐 경우(3/4)

2차 계획 문제
- 목적 함수: 2차 형식
- 제약 조건: 1차 형식

Kuhn-Tucker 필요 조건: $\nabla L(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{s},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\delta})=\mathbf{0}$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=2x_1-2-2u_1-u_2-\zeta_1=0 \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2}=2x_2-2-u_1-2u_2-\zeta_2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_1}=-2x_1-x_2+4+s_1^2=0 \qquad \frac{\partial L}{\partial u_2}=-x_1-2x_2+4+s_1^2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_1}=2u_1s_1=0 \qquad \frac{\partial L}{\partial s_2}=2u_2s_2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \zeta_1}=\delta_1^2-x_1=0 \rightarrow \delta_1^2=x_1 \qquad \frac{\partial L}{\partial \zeta_2}=\delta_2^2-x_2=0 \rightarrow \delta_2^2=x_2$$

대입

$$\frac{\partial L}{\partial \delta_1}=2\zeta_1\delta_1=0 \rightarrow 2\zeta_1\delta_1^2=0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \delta_1}=2\zeta_1\delta_1=0 \rightarrow 2\zeta_2\delta_2^2=0$$

양변에 δ_1를 곱한다. 양변에 δ_2를 곱한다.

$$u_i,\zeta_i\geq 0,\ i=1,2$$

Kuhn-Tucker 필요 조건: $\nabla L(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{s},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\delta})=\mathbf{0}$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=2x_1-2-2u_1-u_2-\zeta_1=0 \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2}=2x_2-2-u_1-2u_2-\zeta_2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_1}=-2x_1-x_2+4+s_1^2=0 \qquad \frac{\partial L}{\partial u_2}=-x_1-2x_2+4+s_1^2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_1}=2u_1s_1=0 \qquad \frac{\partial L}{\partial s_2}=2u_2s_2=0$$

$$2\zeta_1x_1=0 \qquad 2\zeta_2x_2=0$$

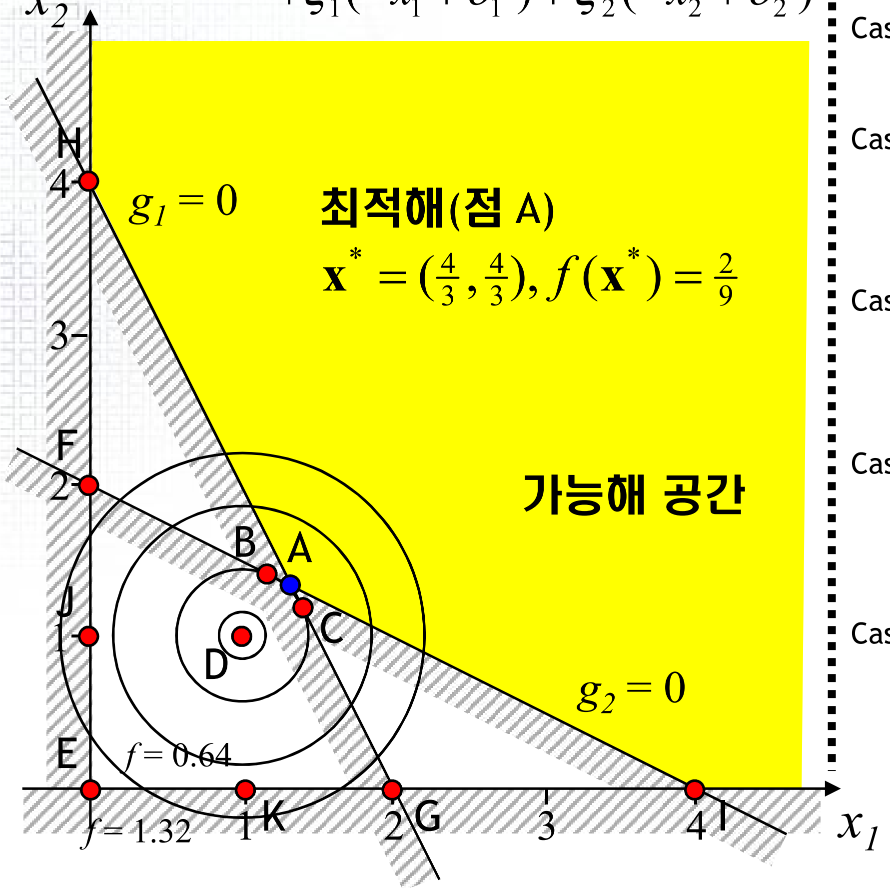
$$u_i,\zeta_i,\delta_i\geq 0,\ i=1,2$$

K-T 필요 조건을 이용한 2차 계획 문제 최적해 구하기 - x_i가 음이 아닐 경우(4/4)

2차 계획 문제
- 목적 함수: 2차 형식
- 제약 조건: 1차 형식

Lagrange 함수

$$L(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{s},\zeta,\boldsymbol{\delta}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 2$$
$$+u_1(-2x_1 - x_2 + 4 + s_1^2)$$
$$+u_2(-x_1 - 2x_2 + 4 + s_2^2)$$
$$+\zeta_1(-x_1 + \delta_1^2) + \zeta_2(-x_2 + \delta_2^2)$$



Case #1: $s_1=s_2=\zeta_1=\zeta_2=0$일 때(점 A)

$x_1 = x_2 = \frac{4}{3}, u_1 = u_2 = \frac{2}{9}$

Case #2: $u_1=s_2=\zeta_1=\zeta_2=0$일 때(점 B)

$x_1 = \frac{6}{5}, x_2 = \frac{7}{5}, u_2 = \frac{2}{5}, s_1^2 = -\frac{1}{5}$ 음수여서 안됨

Case #3: $u_2=s_1=\zeta_1=\zeta_2=0$일 때(점 C)

$x_1 = \frac{7}{5}, x_2 = \frac{6}{5}, u_1 = \frac{2}{5}, s_2^2 = -\frac{1}{5}$ 음수여서 안됨

Case #4: $u_1=u_2=\zeta_1=\zeta_2=0$일 때(점 D)

$x_1 = x_2 = 1, s_1^2 = s_2^2 = -1$ 음수여서 안됨

Case #5: $u_1=u_2=x_1=x_2=0$일 때(점 E)

$x_1 = x_2 = 0, s_1^2 = s_2^2 = -4,$ 음수여서 안됨

$\zeta_1 = \zeta_2 = -2$

Case #6: $u_1=s_2=x_1=x_2=0$일 때(점 E)

$x_1 = x_2 = 0, s_1^2 = -4,$ 음수여서 안됨

$-x_1 - 2x_2 + 4 + s_2^2 \neq 0$ 제약 조건 위배

Case #7: $u_2=s_1=x_1=x_2=0$일 때(점 E)

$x_1 = x_2 = 0, s_2^2 = -4,$ 음수여서 안됨

$-2x_1 - x_2 + 4 + s_1^2 \neq 0$ 제약 조건 위배

Case #8: $s_1=s_2=x_1=x_2=0$일 때(점 E)

$x_1 = x_2 = 0, -2x_1 - x_2 + 4 + s_1^2 \neq 0,$

$-x_1 - 2x_2 + 4 + s_2^2 \neq 0$ 제약 조건 위배

Case #9: $u_1=s_2=\zeta_2=x_1=0$일 때(점 F)

$x_1 = 0, x_2 = 2, u_2 = 1,$

$s_1^2 = -2, \zeta_1 = -3$ 음수여서 안됨

Case #10: $u_2=s_1=\zeta_1=x_2=0$일 때(점 G)

$x_1 = 2, x_2 = 0, u_1 = 1, s_2^2 = -2,$

$\zeta_2 = -3$ 음수여서 안됨

Case #11: $s_1=s_2=\zeta_1=x_2=0$일 때(점 G)

$x_1 = 2, x_2 = 0,$ 제약 조건 위배

$-x_1 - 2x_2 + 4 + s_2^2 \neq 0$

Case #12: $u_2=s_1=\zeta_2=x_1=0$일 때(점 H)

$x_1 = 0, x_2 = 4, u_1 = 6,$

$s_2^2 = 4, \zeta_1 = -14$ 음수여서 안됨

Case #13: $s_1=s_2=\zeta_2=x_1=0$일 때(점 H)

$x_1 = 0, x_2 = 4,$ 제약 조건 위배

$-x_1 - 2x_2 + 4 + s_2^2 \neq 0$

Case #14: $u_1=s_2=\zeta_1=x_2=0$일 때(점 I)

$x_1 = 4, x_2 = 0, u_2 = 6,$

$s_1^2 = 4, \zeta_2 = -14$ 음수여서 안됨

Case #15: $u_1=u_2=\zeta_2=x_1=0$일 때(점 J)

$x_1 = 0, x_2 = 1, s_1^2 = -3,$ 음수여서 안됨

$s_2^2 = -2, \zeta_1 = -2$

Case #16: $u_1=u_2=\zeta_1=x_2=0$일 때(점 K)

$x_1 = 1, x_2 = 0, s_1^2 = -2,$ 음수여서 안됨

$s_2^2 = -3, \zeta_2 = -2$

2차 계획 문제 예제
- Simplex 방법을 이용한 풀이(1)

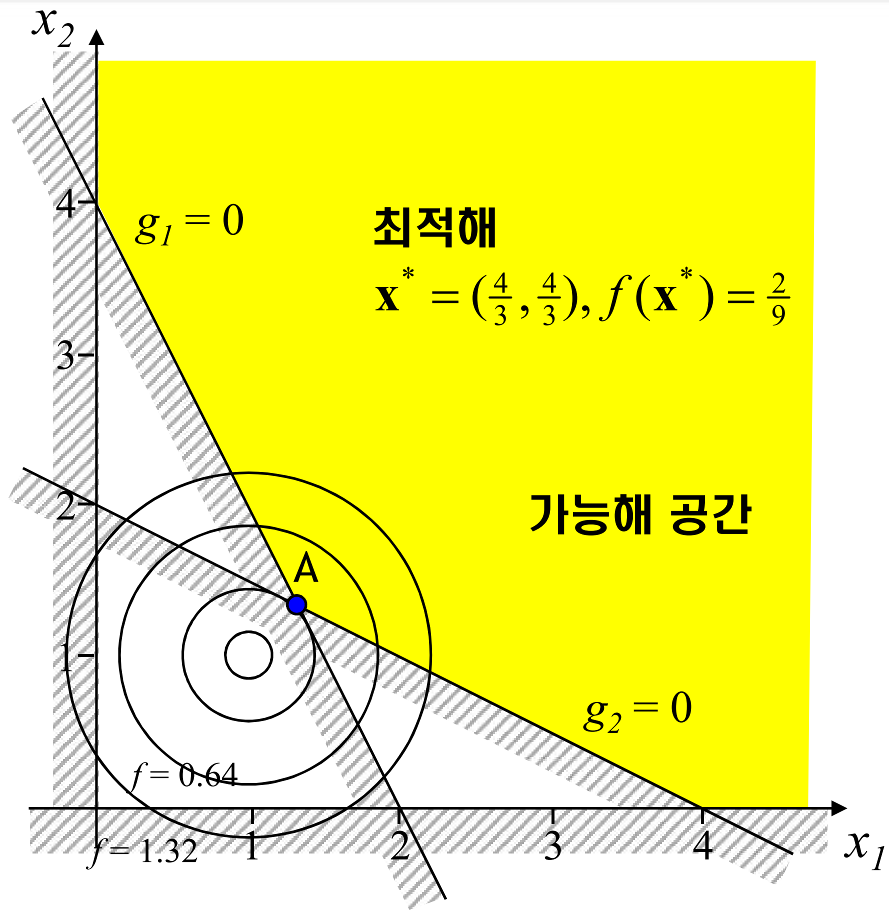
Minimize $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 2$

Subject to $g_1(\mathbf{x}) = -2x_1 - x_2 + 4 \le 0$

$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 - 2x_2 + 4 \le 0$

단, $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

최적해는 $\mathbf{x}^* = (\frac{4}{3}, \frac{4}{3}), f(\mathbf{x}^*) = \frac{2}{9}$



2차 계획 문제 예제
- Simplex 방법을 이용한 풀이(3)

Minimize $f(\mathbf{x}) = -2x_1 - 2x_2 + x_1^2 + x_2^2 + 2$

Subject to

$$-2x_1 - x_2 \le -4 \qquad\qquad -2x_1 - x_2 + 4 + s_1^2 = 0$$
$$-x_1 - 2x_2 \le -4 \quad \Rightarrow \quad -x_1 - 2x_2 + 4 + s_2^2 = 0$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \qquad\qquad -x_1 + \delta_1^2 = 0, \ -x_2 + \delta_2^2 = 0$$

Lagrange 함수

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\delta}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 2$$
$$+u_1(-2x_1 - x_2 + 4 + s_1^2) + u_2(-x_1 - 2x_2 + 4 + s_2^2)$$
$$+\zeta_1(-x_1 + \delta_1^2) + \zeta_2(-x_2 + \delta_2^2) \text{ 단, } u_i, \zeta_i \ge 0$$

Kuhn-Tucker 필요 조건: $\nabla L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\delta}) = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2 + 2x_1 - 2u_1 - u_2 - \zeta_1 = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2} = -2 + 2x_2 - u_1 - 2u_2 - \zeta_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = -2x_1 - x_2 + 4 + s_1^2 = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial u_2} = -x_1 - 2x_2 + 4 + s_2^2 = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial \zeta_1} = -x_1 + \delta_1^2 = 0$$

$$\underbrace{\frac{\partial L}{\partial s_1} = 2u_1 s_1 = 0,}_{\text{식①}} \quad \underbrace{\frac{\partial L}{\partial s_2} = 2u_2 s_2 = 0}_{\text{식②}} \qquad \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \delta_1} = 2\zeta_1\delta_1 = 0,}_{\text{식③}} \quad \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \delta_2} = 2\zeta_2\delta_2 = 0}_{\text{식④}} \qquad \frac{\partial L}{\partial \zeta_2} = -x_2 + \delta_2^2 = 0$$

단, $u_i, \zeta_i \ge 0$

식①, ②의 양변에 각각 s_1, s_2 를 곱한다.

식③, ④의 양변에 각각 δ_1, δ_2를 곱한다.

2차 계획 문제 예제
- Simplex 방법을 이용한 풀이(4)

Kuhn-Tucker 필요 조건: $\nabla L(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{s},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\delta})=0$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=-2+2x_1-2u_1-u_2-\zeta_1=0,\qquad \frac{\partial L}{\partial x_2}=-2+2x_2-u_1-2u_2-\zeta_2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_1}=-2x_1-x_2+4+s_1^2=0,\qquad \frac{\partial L}{\partial u_2}=-x_1-2x_2+4+s_2^2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_1}=2u_1s_1^2=0,\ \frac{\partial L}{\partial s_2}=2u_2s_2^2=0\qquad \frac{\partial L}{\partial \delta_1}=2\zeta_1\delta_1^2=0,\frac{\partial L}{\partial \delta_2}=2\zeta_2\delta_2^2=0$$

대입

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{\partial L}{\partial \zeta_1}=-x_1+\delta_1^2=0\\ \frac{\partial L}{\partial \zeta_2}=-x_2+\delta_2^2=0\end{gathered}}$$

$\mathbf{s}_i^2 \Rightarrow \mathbf{s}_i'$ 치환

단, $u_i,\zeta_i,s_i'\geq 0$

Kuhn-Tucker 필요 조건: $\nabla L(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{s},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\delta})=0$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=-2+2x_1-2u_1-u_2-\zeta_1=0,\qquad \frac{\partial L}{\partial x_2}=-2+2x_2-u_1-2u_2-\zeta_2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_1}=-2x_1-x_2+4+s_1^2=0,\qquad \frac{\partial L}{\partial u_2}=-x_1-2x_2+4+s_2^2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_1}=2u_1s_1'=0,\frac{\partial L}{\partial s_2}=2u_2s_2'=0\qquad \frac{\partial L}{\partial \delta_1}=2\zeta_1x_1=0,\ \frac{\partial L}{\partial \delta_2}=2\zeta_2x_2=0$$

단, $u_i,\zeta_i,s_i',x_i\geq 0$

2차 계획 문제 예제
- Simplex 방법을 이용한 풀이(5)

Kuhn-Tucker 필요 조건: $\nabla L(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{s},\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{\delta})=0$

선형 부정 방정식

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=-2+2x_1-2u_1-u_2-\zeta_1=0,\qquad \frac{\partial L}{\partial x_2}=-2+2x_2-u_1-2u_2-\zeta_2=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_1}=-2x_1-x_2+4+s_1'=0,\qquad \frac{\partial L}{\partial u_2}=-x_1-2x_2+4+s_2'=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial s_1}=2u_1s_1'=0,\ \frac{\partial L}{\partial s_2}=2u_2s_2'=0\qquad \frac{\partial L}{\partial \delta_1}=2\zeta_1x_1=0,\ \frac{\partial L}{\partial \delta_2}=2\zeta_2x_2=0$$

단, $u_i,\zeta_i,s_i',x_i\ge 0$

선형 부정 방정식의 해를 구하기 위해 Simplex방법을 이용한다.

Simplex방법을 적용하기 위해서는 우변의 모든 요소가 음이 아니어야 함

$$\begin{bmatrix}2&0&-2&-1&-1&0&0&0\\0&2&-1&-2&0&-1&0&0\\-2&-1&0&0&0&0&1&0\\-1&-2&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\u_1\\u_2\\\zeta_1\\\zeta_2\\s_1'\\s_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\-4\\-4\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix}2&0&-2&-1&-1&0&0&0\\0&2&-1&-2&0&-1&0&0\\2&1&0&0&0&0&-1&0\\1&2&0&0&0&0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\u_1\\u_2\\\zeta_1\\\zeta_2\\s_1'\\s_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\4\\4\end{bmatrix}$$

양변에 -1을 곱함

2차 계획 문제 예제
- Simplex 방법을 이용한 풀이(8)

Simplex방법을 적용하기 위해 인위 변수 추가

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(=X_1) \\ x_2(=X_2) \\ u_1(=X_3) \\ u_2(=X_4) \\ \zeta_1(=X_5) \\ \zeta_2(=X_6) \\ s_1'(=X_7) \\ s_2'(=X_8) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Simplex방법을 적용하기 위해 인위 목적함수 계산

1, 2, 3, 4행을 모두 더하여 인위 변수의 합($Y_1+Y_2+Y_3+Y_4$)을 최소화 하는 목적 함수 구성

$$5x_1 + 5x_2 - 3u_1 - 3u_2 - \zeta_1 - \zeta_2 - s_1' - s_2' + \underbrace{Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4}_{w} = 12$$

$$-5x_1 - 5x_2 + 3u_1 + 3u_2 + \zeta_1 + \zeta_2 + s_1' + s_2' = w - 12$$: 인위 목적 함수

2차 계획 문제 예제
- Simplex 방법을 이용한 풀이(8)

Simplex방법을 적용하기 위해 인위 변수 추가

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(=X_1) \\ x_2(=X_2) \\ u_1(=X_3) \\ u_2(=X_4) \\ \zeta_1(=X_5) \\ \zeta_2(=X_6) \\ s_1'(=X_7) \\ s_2'(=X_8) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$-5x_1 - 5x_2 + 3u_1 + 3u_2 + \zeta_1 + \zeta_2 + s_1' + s_2' = w - 12$$: 인위 목적 함수

1

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	Y1	Y2	Y3	Y4	bi	bi/ai
Y1	2	0	-2	-1	-1	0	0	0	1	0	0	0	2	1
Y2	0	2	-1	-2	0	-1	0	0	0	1	0	0	2	-
Y3	2	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	4	2
Y4	1	2	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	4	4
A. Obj.	-5	-5	3	3	1	1	1	1	0	0	0	0	w-12	-

2차 계획 문제 예제
- Simplex 방법을 이용한 풀이(9)

2

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	Y1	Y2	Y3	Y4	bi	bi/ai
X1	1	0	-1	-1/2	-1/2	0	0	0	1/2	0	0	0	1	-
Y2	0	**2**	-1	-2	0	-1	0	0	0	1	0	0	2	**1**
Y3	0	1	2	1	1	0	-1	0	-1	0	1	0	2	2
Y4	0	2	1	1/2	1/2	0	0	-1	-1/2	0	0	1	3	3/2
A. Obj.	0	**-5**	-2	1/2	-3/2	1	1	1	5/2	0	0	0	w-7	-

3

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	Y1	Y2	Y3	Y4	bi	bi/ai
X1	1	0	-1	-1/2	-1/2	0	0	0	1/2	0	0	0	1	-
X2	0	1	-1/2	-1	0	-1/2	0	0	0	1/2	0	0	1	-
Y3	0	0	**5/2**	2	1	1/2	-1	0	-1	-1/2	1	0	1	**2/5**
Y4	0	0	2	5/2	1/2	1	0	-1	-1/2	-1	0	1	1	1/2
A. Obj.	0	0	**-9/2**	-9/2	-3/2	-3/2	1	1	5/2	5/2	0	0	w-2	-

4

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	Y1	Y2	Y3	Y4	bi	bi/ai
X1	1	0	0	3/10	-1/10	1/5	-2/5	0	1/10	-1/5	2/5	0	7/5	14/3
X2	0	1	0	-3/5	1/5	-2/5	-1/5	0	-1/5	2/5	1/5	0	6/5	-
X3	0	0	1	4/5	2/5	1/5	-2/5	0	-2/5	-1/5	2/5	0	2/5	1/2
Y4	0	0	0	**9/10**	-3/10	3/5	4/5	-1	3/10	-3/5	-4/5	1	1/5	**2/9**
A. Obj.	0	0	0	**-9/10**	3/10	-3/5	-4/5	1	7/10	8/5	9/5	0	w-1/5	-

2차 계획 문제 예제
- Simplex 방법을 이용한 풀이(10)

5

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	Y1	Y2	Y3	Y4	bi	bi/ai
X1	1	0	0	0	0	0	-2/3	1/3	0	0	2/3	-1/3	4/3	-
X2	0	1	0	0	0	0	7/15	-2/3	2/5	0	-7/15	2/15	4/3	-
X3	0	0	1	0	2/3	-1/3	-10/9	8/9	-2/3	7/15	10/9	-8/45	2/9	-
X4	0	0	0	1	-1/3	2/3	8/9	-10/9	1/3	-2/3	-8/9	2/9	2/9	-
A. Obj.	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	w-0	-

인위 목적 함수가 0이므로 초기 기저 가능해가 구해졌음

$$\mathbf{X}^T{}_{(1\times 8)} = [x_1 \quad x_2 \quad u_1 \quad u_2 \quad \zeta_1 \quad \zeta_2 \quad s_1 \quad s_2]$$

이로부터 초기 기저 가능해 중의 하나는 $X_1=X_2=4/3, X_3=X_4=2/9, X_5=X_6=X_7=X_8=0$

$$x_1 = x_2 = \tfrac{4}{3}, u_1 = u_2 = \tfrac{2}{9}, \zeta_1 = \zeta_2 = s_1 = s_2 = 0$$

한편, 이들은 제약 조건 $u_1 s_1' = 0, u_2 s_2' = 0, \ \zeta_1 x_1 = 0, \ \zeta_2 x_2 = 0$ 을 모두 만족한다.

따라서 주어진 문제의 최적해는 $x_1 = x_2 = \tfrac{4}{3}, u_1 = u_2 = \tfrac{2}{9}, \zeta_1 = \zeta_2 = s_1' = s_2' = 0$ 이며,

이것은 비선형 부정 방정식을 먼저 푼 경우와 동일함을 알 수 있다.

2차 계획 문제 예제
- Simplex 방법을 이용한 풀이(11)

만약 첫 번째 Table에서 첫 번째 열이 아니라 목적 함수의 계수가 -5으로서 그 값이 동일한 두 번째 열을 Pivot 열로 선택한다면?

1

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	Y1	Y2	Y3	Y4	bi	bi/ai
Y1	2	0	-2	-1	-1	0	0	0	1	0	0	0	2	-
Y2	0	2	-1	-2	0	-1	0	0	0	1	0	0	2	1
Y3	2	1	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	0	4	4
Y4	1	2	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	1	4	2
A. Obj.	-5	-5	3	3	1	1	1	1	0	0	0	0	w-12	-

2

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	Y1	Y2	Y3	Y4	bi	bi/ai
Y1	2	0	-2	-1	-1	0	0	0	1	0	0	0	2	1
X2	0	1	-1/2	-1	0	-1/2	0	0	0	1/2	0	0	1	-
Y3	2	0	1/2	1	0	1/2	-1	0	0	-1/2	1	0	3	3/2
Y4	1	0	1	2	0	1	0	-1	0	-1	0	1	2	2
A. Obj.	-5	0	1/2	-2	1	-3/2	1	1	0	5/2	0	0	w-7	-

3

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	Y1	Y2	Y3	Y4	bi	bi/ai
X1	1	0	-1	-1/2	-1/2	0	0	0	1/2	0	0	0	1	-
X2	0	1	-1/2	-1	0	-1/2	0	0	0	1/2	0	0	1	-
Y3	0	0	5/2	2	1	1/2	-1	0	-1	-1/2	1	0	1	2/5
Y4	0	0	2	5/2	1/2	1	0	-1	-1/2	-1	0	1	1	1/2
A. Obj.	0	0	-9/2	-9/2	-3/2	-3/2	1	1	5/2	5/2	0	0	w-2	-

2차 계획 문제 예제
- Simplex 방법을 이용한 풀이(12)

4

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	Y1	Y2	Y3	Y4	bi	bi/ai
X1	1	0	0	3/10	-1/10	1/5	-2/5	0	1/10	-1/5	2/5	0	7/5	-
X2	0	1	0	-6/10	1/5	-2/5	-1/5	0	-1/5	2/5	1/5	0	6/5	-
X3	0	0	1	4/5	2/5	1/5	-2/5	0	-2/5	-1/5	2/5	0	2/5	-
Y4	0	0	0	9/10	-3/10	3/5	4/5	-1	3/10	-3/5	-4/5	1	1/5	1/4
A. Obj.	0	0	0	-9/10	3/10	-3/5	-4/5	1	7/10	8/5	9/5	0	w-1/5	-

5

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	Y1	Y2	Y3	Y4	bi	bi/ai
X1	1	0	0	3/4	-1/4	1/2	0	-1/2	-1/4	-1/2	0	1/2	3/2	-
X2	0	1	0	-3/8	1/8	-1/4	0	-1/4	-1/8	1/4	0	1/4	5/4	-
X3	0	0	1	5/4	1/4	1/2	0	-1/2	-1/4	-1/2	0	1/2	1/2	-
X7	0	0	0	9/8	-3/8	3/4	1	-5/4	3/8	-3/4	-1	5/4	1/4	-
A. Obj.	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	w-0	-

인위 목적 함수가 0이므로 초기 기저 가능해가 구해졌음

$$\mathbf{X}^T{}_{(1\times8)} = [x_1 \quad x_2 \quad u_1 \quad u_2 \quad \zeta_1 \quad \zeta_2 \quad s_1 \quad s_2]$$

이로부터 또 다른 초기 기저 가능해는 X_1=3/2, X_2=5/4, X_3=1/2, X_4=X_5=X_6=0, X_7=1/4, X_8=0

$x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = \frac{5}{4}, u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \zeta_1 = \zeta_2 = 0, s_1' = \frac{1}{4}, s_2' = 0$

한편, 이들은 제약 조건 $u_1 s_1' = 0$**을 만족하지 않는다.**

따라서 이들은 주어진 문제의 최적해가 될 수 없다.

➡ Pivot **과정 중 선택 가능한 열 또는 행 또는 "b_i/a_i"의 계수가 같은 경우, 어떤 것을 선택하느냐에 따라 초기 기저 가능해가 달라진다.**

➡ **위의 모든 경우에 대해서 비선형 방정식(u_i*s_i=0)을 만족하는 해가 있는지 확인해 봐야 함**

2차 계획 문제 예제
- Simplex 방법을 이용한 풀이(13)

만약 세 번째 Table에서 세 번째 열이 아니라 목적 함수의 계수가 -9/2로서 그 값이 동일한 네 번째 열을 Pivot 열로 선택한다면?

3

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	Y1	Y2	Y3	Y4	bi	bi/ai
X1	1	0	-1	-1/2	-1/2	0	0	0	1/2	0	0	0	1	-
X2	0	1	-1/2	-1	0	-1/2	0	0	0	1/2	0	0	1	-
Y3	0	0	5/2	2	1	1/2	-1	0	-1	-1/2	1	0	1	1/2
Y4	0	0	2	5/2	1/2	1	0	-1	-1/2	-1	0	1	1	5/2
A. Obj.	0	0	-9/2	-9/2	-3/2	-3/2	1	1	5/2	5/2	0	0	w-2	-

4

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	Y1	Y2	Y3	Y4	bi	bi/ai
X1	1	0	-6/10	0	-2/5	1/5	0	-1/5	2/5	-1/5	0	1/5	6/5	-
X2	0	1	3/10	0	1/5	-1/10	0	-2/5	-1/5	1/10	0	2/5	7/5	-
Y3	0	0	9/10	0	3/5	-3/10	-1	4/5	-3/5	3/10	1	-4/5	1/5	1/4
X4	0	0	4/5	1	1/5	2/5	0	-2/5	-1/5	-2/5	0	2/5	2/5	-
A. Obj.	0	0	-9/10	0	-3/5	3/10	1	-4/5	8/5	7/10	0	9/5	w-1/5	-

5

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	Y1	Y2	Y3	Y4	bi	bi/ai
X1	1	0	-3/8	0	-1/4	1/8	-1/4	0	1/4	-1/8	1/4	0	5/4	-
X2	0	1	3/4	0	1/2	-1/4	-1/2	0	-1/2	-1/4	1/2	0	3/2	-
X8	0	0	9/8	0	3/4	-3/8	-5/4	1	3/4	3/8	5/4	-1	1/4	-
X4	0	0	5/4	1	1/2	1/4	-1/2	0	-1/2	-1/4	1/2	0	1/2	-
A. Obj.	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	w-0	-

2차 계획 문제 예제
- Simplex 방법을 이용한 풀이(14)

5

	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	Y1	Y2	Y3	Y4	bi	bi/ai
X1	1	0	-3/8	0	-1/4	1/8	-1/4	0	1/4	-1/8	1/4	0	5/4	-
X2	0	1	3/4	0	1/2	-1/4	-1/2	0	-1/2	-1/4	1/2	0	3/2	-
X8	0	0	9/8	0	3/4	-3/8	-5/4	1	3/4	3/8	5/4	-1	1/4	-
X4	0	0	5/4	1	1/2	1/4	-1/2	0	-1/2	-1/4	1/2	0	1/2	-
A. Obj.	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	w-0	-

인위 목적 함수가 0이므로 초기 기저 가능해가 구해졌음

$$\mathbf{X}^T_{(1\times 8)} = [x_1 \quad x_2 \quad u_1 \quad u_2 \quad \zeta_1 \quad \zeta_2 \quad s_1 \quad s_2]$$

이로부터 또 다른 초기 기저 가능해는 X_1=5/4, X_2=3/2, X_3=0, X_4=1/2, X_5=X_6=0=X_7=0, X_8=1/4

$$x_1 = \tfrac{4}{3}, x_2 = \tfrac{5}{4}, u_1 = 0, u_2 = \tfrac{1}{2}, \zeta_1 = \zeta_2 = s_1' = 0, s_2' = \tfrac{1}{4}$$

한편, 이들은 제약 조건 $u_2 s_2' = 0$ 을 만족하지 않는다.

따라서 이들은 주어진 문제의 최적해가 될 수 없다.

➡ Pivot 과정 중 선택 가능한 열 또는 행 또는 "b_i/a_i"의 계수가 같은 경우,
어떤 것을 선택하느냐에 따라 초기 기저 가능해가 달라진다.

➡ 위의 모든 경우에 대해서 비선형 방정식(u_i*s_i=0)을 만족하는 해가 있는지 확인해 봐야 함

[참고] Simplex 방법의 적용을 위해 하나의 변수를 두 개의 음이 아닌 변수로 분리하는 경우(1/3)

Simplex 방법을 적용할 때는 모든 변수들이 0보다 크거나 같다고 가정한다.

즉, 주어진 문제의 최적점에서 모든 변수 값이 음이 아닌 경우에만 Simplex로 풀 수 있다.

Simplex를 적용하기 위한 "선형 수학 모델이 포함한 변수"들 중
최적점에서 부호 제한이 없는 변수는 두 개의 음이 아닌 변수로 분리해야 한다.

$$\begin{aligned} \textit{Minimize} \quad & z = -y_1 - 2y_2 \\ \textit{Subject to} \quad & 3y_1 + 2y_2 \le 12 \\ & 2y_1 + 3y_2 \ge 6 \\ & y_1 \ge 0 \end{aligned}$$

y_2 는 부호 제한 없음

Simplex 방법이 적용 가능한 선형 최적화 문제

y_2는 부호 제한이 없기 때문에
두 개의 음이 아닌 변수로 분리한다.

$$y_2 = y_2^+ - y_2^-$$

$$y_2^+, y_2^+ \ge 0$$

부호 제한이 없는 변수
→ 음이 아닌 변수로 수정

$$\begin{aligned} \textit{Minimize} \quad & f = -y_1 - 2y_2^+ + 2y_2^- \\ \textit{Subject to} \quad & 3y_1 + 2y_2^+ - 2y_2^- \le 12 \\ & 2y_1 + 3y_2^+ - 3y_2^- \ge 6 \\ & y_1, y_2^+, y_2^- \ge 0 \end{aligned}$$

"≤" 형태의 부등호 제약 조건:
완화 변수(slack variable)의 도입

"≥" 형태의 부등호 제약 조건:
잉여 변수(surplus variable) 및
인위 변수(artificial variable)의 도입

$$\begin{aligned} \textit{Minimize} \quad & f = -y_1 - 2y_2^+ + 2y_2^- \\ \textit{Subject to} \quad & 3y_1 + 2y_2^+ - 2y_2^- + x_1 = 12 \\ & 2y_1 + 3y_2^+ - 3y_2^- - x_2 + x_3 = 6 \\ & y_1, y_2^+, y_2^- \ge 0,\ x_i \ge 0; i = 1 \text{ to } 3 \end{aligned}$$

→ Simplex 방법으로 문제를 푼다

[참고] Simplex 방법의 적용을 위해 하나의 변수를 두 개의 음이 아닌 변수로 분리하는 경우(2/3)

Simplex 방법을 적용할 때는 모든 변수들이 0보다 크거나 같다고 가정한다.

즉, 주어진 문제의 최적점에서 모든 변수 값이 음이 아닌 경우에만 Simplex로 풀 수 있다.

Simplex를 적용하기 위한 "선형 수학 모델이 포함한 변수"들 중
최적점에서 부호 제한이 없는 변수는 두 개의 음이 아닌 변수로 분리해야 한다.

최적화 수학 모델

$$\textit{Minimize} \quad f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 2$$

$$\textit{Subject to} \quad g_1(\mathbf{x}) = -2x_1 - x_2 + 4 \le 0$$

$$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 - 2x_2 + 4 \le 0$$

단, $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$

선형 최적화 문제가 아니기 때문에
Simplex 방법을 바로 적용할 수 없음

Kuhn-Tucker 필요 조건을 이용하여
선형 수학 모델을 작성할 때

x_1, x_2가 음이 아니라는 제약조건도
함께 이용하였기 때문에

x_1, x_2가 음이 아니라고 확신할 수 있다.

Kuhn-Tucker 필요 조건에 의해 →

Kuhn-Tucker 필요 조건: $\nabla L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\delta}) = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial s_1} = 2u_1 s_1' = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial s_2} = 2u_2 s_2' = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial \delta_1} = 2\zeta_1 x_1 = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \delta_2} = 2\zeta_2 x_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2 + 2x_1 - 2u_1 - u_2 - \zeta_1 = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = -2 + 2x_2 - u_1 - 2u_2 - \zeta_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = -2x_1 - x_2 + 4 + s_1' = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial u_2} = -x_1 - 2x_2 + 4 + s_2' = 0$$

단, $u_i, \zeta_i, s_i', x_i \ge 0$

Simplex 방법을 적용할 수 있는 선형 부정 방정식

모든 변수가 음이 아니기 때문에
인위 변수만 추가하여 Simplex방법으로 문제를 푼다.

[참고] Simplex 방법의 적용을 위해 하나의 변수를 두 개의 음이 아닌 변수로 분리하는 경우(3/3)

Simplex 방법을 적용할 때는 모든 변수들이 0보다 크거나 같다고 가정한다.

즉, 주어진 문제의 최적점에서 모든 변수 값이 음이 아닌 경우에만 Simplex로 풀 수 있다.

Simplex를 적용하기 위한 "선형 수학 모델이 포함한 변수"들 중
최적점에서 부호 제한이 없는 변수는 두 개의 음이 아닌 변수로 분리해야 한다.

최적화 수학 모델

$$\textit{Minimize} \quad f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 2x_2 + 2$$

$$\textit{Subject to} \quad g_1(\mathbf{x}) = -2x_1 - x_2 + 4 \le 0$$

$$g_2(\mathbf{x}) = -x_1 - 2x_2 + 4 \le 0$$

선형 최적화 문제가 아니기 때문에
Simplex 방법을 바로 적용할 수 없음

Kuhn-Tucker 필요 조건에 의해 →

Kuhn-Tucker 필요 조건: $\nabla L(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{s}, \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\delta}) = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial s_1} = 2u_1 s_1' = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial s_2} = 2u_2 s_2' = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = -2 + 2x_1 - 2u_1 - u_2 = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial x_2} = -2 + 2x_2 - u_1 - 2u_2 = 0$$

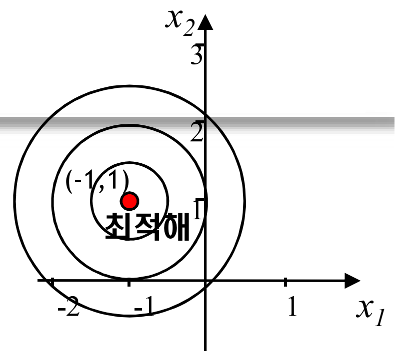
$$\frac{\partial L}{\partial u_1} = -2x_1 - x_2 + 4 + s_1' = 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial u_2} = -x_1 - 2x_2 + 4 + s_2' = 0$$

단, $u_i, s_i' \ge 0$

Simplex 방법을 적용할 수 있는 선형 부정 방정식

x_1, x_2의 부호 제한이 없기 때문에
x_1, x_2를 각각 두 개의 음이 아닌 변수로 분리한 후
인위 변수를 추가하여 Simplex방법으로 문제를 푼다.

[참고] Simplex 방법의 적용을 위해 하나의 변수를 두 개의 음이 아닌 변수로 분리하는 이유(1/3)



Minimize $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2$: 2차 형식의 목적 함수

Minimize $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2$

Lagrange 함수 구성

$$L(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + 2 = 0 \quad \text{---} ①'$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 2 = 0 \quad \text{---} ②'$$

Simplex 방법으로 풀면?

$-2x_1 = 2$

$2x_2 = 2$

등호 제약 조건이므로 인위변수 추가 →

$-2x_1 + y_1 = 2$ --- ③

$2x_2 + y_2 = 2$ --- ④

인위 변수는 최종적으로 0이 되어야 함

인위 변수의 합을 최소(0)로 하도록 인위 목적 함수를 구성

식 ③+④ ⟶ $-2x_1 + 2x_2 + y_1 + y_2 = 4$

$$2x_1 - 2x_2 = \underbrace{y_1 + y_2}_{w} - 4$$

$x_1 = X_1, x_2 = X_2, y_1 = Y_1, y_2 = Y_2$ 로 변경 후 Matrix 구성

기저변수	X1	X2	Y1	Y2	bi	bi/ai
Y1	-2	0	1	0	2	-
Y2	0	2	0	1	2	1
A. Obj.	2	-2	0	0	w-4	-

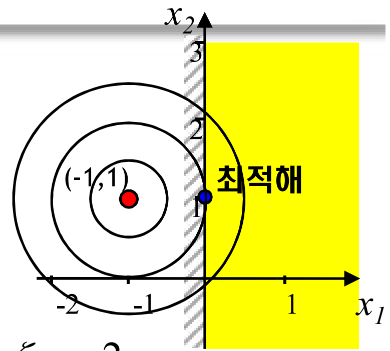
기저변수	X1	X2	Y1	Y2	bi	bi/ai
Y1	-2	0	1	0	2	2
X2	0	1	0	1/2	1	-
A. Obj.	2	0	0	1	w-2	-

- 인위 목적 함수 계수가 전부 양으로 변경 되었음 ⇨ Simplex가 중단됨
- 그러나 인위 변수의 합(w)이 0이 되지 않았음

$x_1 = 0, x_2 = 1, y_1 = 2, y_2 = 0$

- x_1의 부호 제한이 없음에도 불구하고 변수를 분리하지 않았으므로 Simplex 방법으로 문제를 풀 수 없다.

[참고] Simplex 방법의 적용을 위해 하나의 변수를 두 개의 음이 아닌 변수로 분리하는 이유(2/3)



Minimize $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2$: 2차 형식의 목적 함수

Subject to $x_1 \ge 0$: 선형화 된 부등호 제약 조건

Minimize $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2$

Subject to $x_1 \ge 0 \rightarrow -x_1 \le 0 \rightarrow -x_1 + \delta^2 = 0$

Lagrange 함수 구성

$$L(x_1, x_2, \zeta, \delta) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2 + \zeta(-x_1 + \delta^2)$$

Kuhn-Tucker 필요조건으로부터: $\nabla L(x_1, x_2, \zeta, \delta) = 0$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + 2 - \zeta = 0 \text{ --- ①}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 2 = 0 \text{ --- ②}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \zeta} = -x_1 + \delta^2 = 0 \text{ --- ③}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \delta} = 2\zeta\delta = 0 \text{ --- ④}$$

Simplex 방법으로 풀면?

$\zeta = 0$ 이라 가정하면 $x_1 = -1$ → 식③이 성립 안함

$\delta = 0$ 이라 가정하면 $x_1 = 0, x_2 = 1, \zeta = 2$

Simplex 방법으로 풀면?

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 2x_1 + 2 - \zeta = 0 \text{ --- ①} \longrightarrow 2x_1 - \zeta = -2$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 - 2 = 0 \text{ --- ②} \longrightarrow 2x_2 = 2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \zeta} = -x_1 + \delta^2 = 0 \text{ --- ③} \longrightarrow x_1 = \delta^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \delta} = 2\zeta\delta = 0 \text{ --- ④} \longrightarrow 2\zeta\delta^2 = 0$$

식④에의 양변에 δ 를 곱한 후 식③을 대입 $\zeta x_1 = 0$ --- ⑤

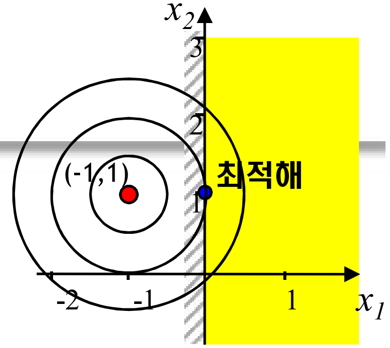
1. 식①, ②, ⑤를 만족하는 해를 찾아야 한다.
2. 식①, ②는 선형이므로 Simplex 방법으로 푼다.
   이때 모든 변수가 음이 아니라고 확신할 수 있으므로 인위 변수만 추가하여 Simplex 방법으로 푼다.
3. 2번에서 구해진 해가 비선형 방정식 ⑤를 만족하는지 확인 한다.

[참고] Simplex 방법의 적용을 위해 하나의 변수를 두 개의 음이 아닌 변수로 분리하는 이유(3/3)

Minimize $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2$: 2차 형식의 목적 함수

Subject to $x_1 \geq 0$: 선형화 된 부등호 제약 조건

$$2x_1 - \zeta = -2$$
$$2x_2 = 2$$
$$\zeta x_1 = 0$$



$$\left.\begin{aligned}2x_1 - \zeta &= -2\\ 2x_2 &= 2\end{aligned}\right. \xrightarrow{\text{우변은 음이 아니어야 함}} \left.\begin{aligned}-2x_1 + \zeta &= 2\\ 2x_2 &= 2\end{aligned}\right.$$

$$\left.\begin{aligned}-2x_1 + \zeta &= 2\\ 2x_2 &= 2\end{aligned}\right. \xrightarrow{\text{등호 제약 조건이므로 인위변수 추가}} \left.\begin{aligned}-2x_1 + \zeta + y_1 &= 2\\ 2x_2 + y_2 &= 2\end{aligned}\right.$$

인위 변수는 최종적으로 0이 되어야 함

인위 변수의 합을 최소(0)로 하도록 인위 목적 함수를 구성

$$-2x_1 + 2x_2 + \zeta + y_1 + y_2 = 4$$
$$2x_1 - 2x_2 - \zeta = \underbrace{y_1 + y_2}_{w} - 4$$

$x_1 = X_1, x_2 = X_2, \zeta = X_3, y_1 = Y_1, y_2 = Y_2$ 로 변경 후 Matrix 구성

기저변수	X1	X2	X3	Y1	Y2	bi	bi/ai
Y1	**-2**	0	1	1	0	2	-
Y2	0	2	0	0	1	2	1
A. Obj.	**2**	-2	-1	0	0	w-4	-

기저변수	X1	X2	X3	Y1	Y2	bi	bi/ai
Y1	**-2**	0	1	1	0	2	-
Y2	0	2	0	0	1	2	1
A. Obj.	**2**	-2	-1	0	0	w-4	-

기저변수	X1	X2	X3	Y1	Y2	bi	bi/ai
Y1	**-2**	0	1	1	0	2	**2**
X2	0	1	0	0	1/2	1	-
A. Obj.	**2**	0	-1	0	1	w-2	-

기저변수	X1	X2	X3	Y1	Y2	bi	bi/ai
X3	**-2**	0	1	1	0	2	-
X2	0	1	0	0	1/2	1	1
A. Obj.	**0**	0	0	1	1	w-0	-

$$X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 2, Y_1 = 0, Y_2 = 0$$
$$x_1 = 0, x_2 = 1, \zeta = 2, y_1 = 0, y_2 = 0$$

$\zeta x_1 = 0$ - - - 식⑤를 만족하므로 해가 된다.

[참고] 부호 제약이 없는 변수로 인하여 변수의 개수가 증가 하였을 경우 구해지는 해 (1/2)

행렬식 표현

식의 개수 $n+2m+p$

미지수의 개수 $2n+2m+2p$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{(n\times n)} & -\mathbf{H}_{(n\times n)} & \mathbf{A}_{(n\times m)} & \mathbf{0}_{(n\times m)} & \mathbf{N}_{(n\times p)} & -\mathbf{N}_{(n\times p)} \\ \mathbf{A}^T{}_{(m\times n)} & -\mathbf{A}^T{}_{(m\times n)} & \mathbf{0}_{(m\times m)} & \mathbf{I}_{(m\times m)} & \mathbf{0}_{(m\times p)} & \mathbf{0}_{(m\times p)} \\ \mathbf{N}^T{}_{(p\times n)} & -\mathbf{N}^T{}_{(p\times n)} & \mathbf{0}_{(p\times m)} & \mathbf{0}_{(p\times m)} & \mathbf{0}_{(p\times p)} & \mathbf{0}_{(p\times p)} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{B}_{((n+m+p)\times(2n+2m+2p))}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{d}^+_{(n\times1)} \\ \mathbf{d}^-_{(n\times1)} \\ \mathbf{u}_{(m\times1)} \\ \mathbf{s}'_{(m\times1)} \\ \mathbf{y}_{(p\times1)} \\ \mathbf{z}_{(p\times1)} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{X}_{((2n+2m+2p)\times1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{c}_{(n\times1)} \\ \mathbf{b}_{(m\times1)} \\ \mathbf{e}_{(p\times1)} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{D}_{((n+m+p)\times1)}}$$

$$u_i s_i' = 0; i = 1 \; to \; m$$

$$\mathbf{B}_{((n+m+p)\times(2n+2m+2p))}\mathbf{X}_{((2n+2m+2p)\times1)} = \mathbf{D}_{((n+m+p)\times1)}$$

본래 위의 식은 미지수의 개수와 식의 개수가 모두 $n+2m+p$인 방정식이다.
식 $\mathbf{v}_{(p\times1)} = \mathbf{y}_{(p\times1)} - \mathbf{z}_{(p\times1)}$, $\mathbf{d}_{(n\times1)} = \mathbf{d}^+_{(n\times1)} - \mathbf{d}^-_{(n\times1)}$ 에 의해 미지수의 개수가 $n+p$개만큼 증가 하였다.
관심있는 변수v_i, d_i는 $\mathbf{v}_{(p\times1)} = \mathbf{y}_{(p\times1)} - \mathbf{z}_{(p\times1)}$, $\mathbf{d}_{(n\times1)} = \mathbf{d}^+_{(n\times1)} - \mathbf{d}^-_{(n\times1)}$ 에 의해 결정 된다.

예시

방정식	$x+y+z=2$ $2x+2y+z=6$ $2x+y=5$	$z = z_1 - z_2$로 치환 $\longrightarrow$ $(z_1, z_2 \ge 0)$	$x+y+z_1-z_2=2$ $2x+2y+z_1-z_2=6$ $2x+y=5$
해	$x=1, y=3, z=-2$		$x=1, y=3, z_1=0, z_2=2$

치환 후의 방정식은 부정 방정식이다. 항상 z_1-z_2=-2가 된다.

[참고] 부호 제약이 없는 변수로 인하여 변수의 개수가 증가 하였을 경우 구해지는 해 (2/2)

예시 방정식		
$x+y+z=5$ $2x+3y+z=11$ $xz=0$	$\xrightarrow[(z_1, z_2 \geq 0)]{z=z_1-z_2 \text{ 로 치환}}$	$x+y+z_1-z_2=5$ $2x+3y+z_1-z_2=11$ $xz=0$

Case #1

Simplex로 풀기 위해 인위변수 도입

$$x+y+z+Y_1=5$$
$$2x+3y+z+Y_2=11$$

← 변수 5개 선형 독립인 식 2개

3개의 변수를 0으로 가정하여 해를 구함

인위 변수의 합 Y1+Y2가 0이 되면 Simplex가 종료 됨

	(x,	y,	z,	Y1,	Y2)
①	(4,	1,	0,	0,	0)
②	(6,	0,	-1,	0,	0)
③	(0,	3,	2,	0,	0)

Simplex 방법으로 구할 수 있는 ①,③번 해 중 $xz=0$를 만족하는 것이 방정식의 최종 해이다.

z (z1-z2)가 음수인 것을 제외하면 Case #1 경우의 해와 Case #2 경우의 해가 같다.

Case #2

Simplex로 풀기 위해 인위변수 도입

$$x+y+z_1-z_2+Y_1=5$$
$$2x+3y+z_1-z_2+Y_2=11$$

← 변수 6개 선형 독립인 식 2개

4개의 변수를 0으로 가정하여 해를 구함

인위 변수의 합 Y1+Y2가 0이 되면 Simplex가 종료 됨

			z=z1-z2			
	(x,	y,	z1,	z2,	Y1,	Y2)
①	(4,	1,	0,	0,	0,	0)
②	(6,	0,	0,	1,	0,	0)
③	(6,	0,	-1,	0,	0,	0)
④	(0,	0,	-,	-,	0,	0)
⑤	(0,	3,	0,	-2,	0,	0)
⑥	(0,	3,	2,	0,	0,	0)

Simplex 방법으로 구할 수 있는 ①,②,⑥번 해 중 $xz=0$를 만족하는 것이 방정식의 최종 해이다.

[참고] 등호 제약 조건이 있는 문제의 후보 최적성 필요 조건
- Lagrange multiplier의 도입

$Minimize\ \ f(x_1,x_2),\ \ Subject\ to\ \ h(x_1,x_2)=0$

$h(x_1,\ x_2)=0$ 으로부터 x_2를 x_1으로 표현할 수 있다. 즉, $f(x_1,x_2)=f(x_1,\phi(x_1))$

1변수 함수의 국부적 후보 최소점을 구하기 위해서는

$df(x_1,x_2)/dx_1=0$, 그런데 $df(x_1,\ x_2)=\dfrac{\partial f(x_1,\ x_2)}{\partial x_1}dx_1+\dfrac{\partial f(x_1,\ x_2)}{\partial x_2}dx_2$이므로 $\dfrac{\partial f(x_1,\ x_2)}{\partial x_1}+\dfrac{\partial f(x_1,\ x_2)}{\partial x_2}\dfrac{dx_2}{dx_1}=0$

$\mathbf{x}^*=(x_1^*,\ x_2^*)$ 를 국부적 후보 최소점이라 가정하면,

$$\frac{\partial f(x_1^*,\ x_2^*)}{\partial x_1}+\frac{\partial f(x_1^*,\ x_2^*)}{\partial x_2}\frac{d\phi(x_1)}{dx_1}=0 \cdots \text{식 (1)}$$

$x_2=\phi(x_1)$ 는 양함수 형태이나 일반적으로 이렇게 표현이 안됨

등호 제약 조건으로부터 $\boxed{h(x_1^*,\ x_2^*)=0}$

$$\Rightarrow \frac{dh(x_1^*,x_2^*)}{dx_1}=\frac{\partial h(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_1}+\frac{\partial h(x_1^*,x_2^*)}{\partial x_2}\frac{d\phi(x_1)}{dx_1}=0$$

$$\therefore \frac{d\phi(x_1)}{dx_1}=-\frac{\partial h(x_1^*,\ x_2^*)/\partial x_1}{\partial h(x_1^*,\ x_2^*)/\partial x_2} \cdots \text{식 (2)}$$

식 (2)를 식 (1)에 대입하면

$$\therefore \frac{\partial f(x_1^*,\ x_2^*)}{\partial x_1}\boxed{-\frac{\partial f(x_1^*,\ x_2^*)}{\partial x_2}\frac{\partial h(x_1^*,\ x_2^*)/\partial x_1}{\partial h(x_1^*,\ x_2^*)/\partial x_2}}=0 \cdots \text{식 (3)}$$

만일 $\nu^*=-\dfrac{\partial f(x_1^*,\ x_2^*)/\partial x_2}{\partial h(x_1^*,\ x_2^*)/\partial x_2} \cdots$ 식 (4) 라고 가정하면

식 (3)은 $\boxed{\dfrac{\partial f(x_1^*,\ x_2^*)}{\partial x_1}+\nu^*\dfrac{\partial h(x_1^*,\ x_2^*)}{\partial x_1}=0}$

한편, 식 (4)를 다시 정리하면

$$\boxed{\frac{\partial f(x_1^*,\ x_2^*)}{\partial x_2}+\nu^*\frac{\partial h(x_1^*,\ x_2^*)}{\partial x_2}=0}$$

요약하면, $\mathbf{x}^*=(x_1^*,\ x_2^*)$가 국부적 후보 최소점이 되기 위해서는 아래의 3가지 조건을 모두 만족해야 함

$$\boxed{h(x_1^*,\ x_2^*)=0}$$

$$\boxed{\frac{\partial f(x_1^*,\ x_2^*)}{\partial x_1}+\nu^*\frac{\partial h(x_1^*,\ x_2^*)}{\partial x_1}=0}$$

$$\boxed{\frac{\partial f(x_1^*,\ x_2^*)}{\partial x_2}+\nu^*\frac{\partial h(x_1^*,\ x_2^*)}{\partial x_2}=0}$$

위 식에서 ν^*를 Lagrange multiplier라고 함